A 1. 8.

Math 834

Math
478
-2-

Beyträge
zum Gebrauche
der
Mathematik
und
deren Anwendung

durch

J. H. Lambert.

Mit Kupfern.

Zweyter Theil
Erſter Abſchnitt.

DER STADT
AUGSBURG

Berlin,
im Verlag der Buchhandlung der Realſchule,
1770.

Vorrede.

Jch liefere hier wiederum einige Abhandlungen, die theils die Erweiterung, theils die Anwendung der Mathematik zur Abſicht haben. Es ſind deren zwölfe von ſo verſchiedenem Jnhalte, daß jede beſonders angezeigt werden müſte, wenn man von allen zuſammen genommen einen Begrif geben wollte. Jch kann aber dieſes hier unterlaſſen, und diejenigen, die ſo geſchwinde weg ein Buch überſehen wollen, auf das am Ende dieſer Vorrede ſtehende Verzeichniß verweiſen. Andern, die ſich etwas mehr umſe-

hen wollen, muß ich ſagen, daß ſie von jeder Abhandlung wenigſtens den Anfang leſen, wo ſie mehrentheils angezeigt finden werden, wohin es bey jeder abgeſehen iſt. Vielleicht nehmen ſie ſich dann die Gedult, weiter fort zu leſen, und beym Fortleſen finden ſie etwan auch Dinge, die, wenn ſie ſchon nicht anfangs angekündigt waren, dennoch von einiger Brauchbarkeit und Erheblichkeit ſeyn werden.

Dieſes iſt nun, was ich überhaupt zu ſagen hatte. Es bleiben aber noch Anmerkungen über einzelne Stellen zurücke, die hier ihren Ort finden mögen. Einmal habe ich dieſe Abhandlungen nicht ununterbrochen, ſondern ſeit 1765 nach und nach geſchrieben. Und dieſes muß, um Anachroniſmen zu vermeiden, erinnert werden. So z. E. iſt die hier vorkommende fünfte Abhandlung: für die Erforſcher der Quadratur des Circuls, im Jahr 1766 vor derjenigen geſchrieben worden, die ich einige Monathe nachher bey der hieſigen Königl. Akademie der Wiſſenſchaften über eben die Materie vorgeleſen.

Sie

Sie können aber beyde ganz wohl beyſammen beſtehen. In der zweyten Abhandlung: Theiler der Zahlen in Tabellen wird man ſehen, daß ich erſt nachgehends näher müſſe erfahren haben, was es mit Pells Tafel von den Theilern der Zahlen für eine Bewandtniß habe. Man wird daher nicht übel thun, wenn man dieſe 2te Abhandlung mit dem vergleicht, was ich in den ganz neu herausgekommenen Zuſätzen zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen über die Sache anmerke. Die hier gelieferte Tafel der Theiler der Zahlen erſtreckt ſich zwar nur bis auf 10200, ſie giebt aber bey jeder Zahl die ſämtlichen Factoren an, hingegen geht die Pellſche Tafel zehnmal weiter, es wird aber darin bey jeder Zahl nur ihr kleinſter Theiler angegeben. Wer demnach die Pellſche Tafel vollſtändig machen wolte, würde immer noch etwas zu thun finden, wiewohl ich im §. 15. darauf eben noch nicht die rechte Unſterblichkeit des Namnes ſetze.

In Anſehung der vierten Abhandlung, welche algebraiſche Ausdrücke der

Sinus von 3 zu 3 Graden liefert, muß ich hier anmerken, daß bereits Wallis ſich die Mühe gegeben, ähnliche Formeln für die Chorden zu berechnen. Sie werden aber wegen der veralteten Zeichnungsart, dafern man ſich nicht daran gewöhnt, ziemlich unleslich.

Bey der zweyten Abhandlung verdient Huygens, daß ich wenigſtens hier erwähne, daß er von den in einem fortgehenden Brüchen (fractio continua) zuerſt Gebrauch gemacht hat, als er für die Umlaufszeit der Planeten, geſchmeidige Verhältniſſe in ganzen Zahlen ſuchte.

Was ich im Anfange der achten Abhandlung von Auflöſung der Cubic- und Biquadrat-Gleichungen ſage, wird ſich nützlich mit den Formeln vergleichen laſſen, die in vorerwähnten Tabellen vorkommen. Ueber die Verwandlung der Gleichungen hat, wo ich mich recht erinnere, Waring, ein Engländer, einen den meinigen ganz ähnlichen Verſuch gemacht, er nimmt aber die Sache ſo ſehr abſtracte vor, daß er die Vortheile, ſo beſondere und einfa-

chere Fälle anbieten, gar nicht ſehen konnte.

Wer die eilfte Abhandlung über die Grundſätze des Gleichgewichtes und der Bewegung zum Lernen lieſet, der wird hin und wieder einige Aufmerkſamkeit gebrauchen müſſen; denen aber muß ich Bedacht anrathen, die dieſe Abhandlung, um ſie zu beurtheilen, leſen wollen. Was im eigentlichſten Verſtande a priori ſeyn ſoll, kann nur Möglichkeiten enthalten. Man muß aber dieſe Möglichkeiten am allgemeinſten nehmen, ſie vollſtändig vorzählen, und dann erſt ſehen, welche davon in der wirklichen Welt vorkommen, und unter welchen Bedingungen ſie vorkommen. Was einer Möglichkeit den ſo verachteten Namen einer Hypotheſe giebt, iſt nicht, daß es eine Möglichkeit iſt, ſondern das unbewieſene Vorausſetzen, daß dieſe Möglichkeit exiſtire. Betrachtungen von dieſer Art machten, daß ich den Begrif der Kraft anfangs ſehr abſtract genommen, und nicht ſogleich den Begrif der Schwere damit verbunden habe. Der abſtracte Begrif iſt aber ge-

 rade

rade derjenige, den wir uns gedenken, wenn wir uns eine Kraft überhaupt vorſtellen, oder auch, wenn wir auf unſere eigene Empfindung merken. Der ſiebente Abſchnitt der Abhandlung wird über den Vortrag und die Anordnung der vorhergehende Abſchnitte ein ziemliches Licht ausbreiten. Man muß aber, um dabey recht zu ſehen, dieſe vorhergehende Abſchnitte vorerſt geleſen haben. Noch bleibt hier anzumercken, daß die im ſiebenten Abſchnitte angeführte Erfahrungen mit einer Allgemeinheit und mit einem Anſchein von åuſſerſt genauer Richtigkeit vorgetragen ſind, für welche ich gar nicht gut ſtehe. Man nimmt ſie zwar gewöhnlich ſo an, und bey dem Gebrauche der Mechanik im gemeinen Leben kann man es auch dabey bewenden laſſen. Wer aber auf Theorie ſieht, der kann ſowohl die durchgängige Allgemeinheit als die bis auf Infiniteſimaltheilchen richtige Genauigkeit in Zweifel ziehen. Vielleicht wird die noch immer ſo ſchwere und noch immer ſo unbekannte Theorie der Schwere und des dabey vorkommenden Mechanismus

nismus dabey gewinnen. In der That ſuchte auch Newton ſich durch beſondere Verſuche zu überzeugen, ob das, was man in der Dynamic Maſſe nennt, dem, was man in der Static Gewicht nennt, ſo durchgängig proportional ſey? Die Verſuche, ſo wie er ſie anſtellte, wiederlegten den Satz nicht. Vielmehr zeigten ſie eine Proportionalität. Sie zeigten aber dieſe nicht genauer als Newton beobachten konte. Und ſo läßt ſich, wenn es auf ſehr kleine Unterſchiede ankommen ſollte, noch anſtehen, ob die Proportionalität bis aufs unendlich Kleine ſtatt habe. Die meiſten Körper verliehren im Feuer von ihrer Maſſe, einige aber werden im Feuer ſchwerer. Wie, wenn ſie bey wenigerer Maſſe dennoch mehr Gewicht erhielten? Es mag nun aber mit bemeldten Erfahrungen beſchaffen ſeyn, wie es wolle, ſo richten ſich die im ſiebenten Abſchnitte daraus gezogenen Schlüſſe genau nach denſelben, und welchem Schluſſen etwas abgebrochen werden muß, daß wird der Erfahrung abgebrochen, die dabey zum Grunde liegt. Auch dieſes aber zeigt,

warum der ſiebente Abſchnitt nicht der erſte, oder überhaupt warum er erſt der ſiebente iſt.

Es iſt billig, daß ich hier nebſt Herrn Pr. Tetens, der ganz neulich über das Principium minimi eine ſchöne Abhandlung bekannt gemacht hat, die Herren Pr. Kåſtner und Karſten, als ſolche Gelehrten nenne, die ſich wegen Berichtigung der Beweiſe auch in der Mechanik hervorgethan haben. Ihre Bemühungen ſind weder unerheblich noch überflüßig. Das meiſte in der Mechanik war immer noch blos deswegen wahr, weil es die Erfahrung lehrte, und in der Hydroſtatik gieng es mit den Beweiſen nicht beſſer. Ungeachtet ich nun hier in dem Vortrage der ſtatiſchen Sätze einen andern Weg genommen, ſo finde ich dennoch den von dieſen beyden Gelehrten gegebenen Beweis vom Gleichgewichte bey dem Hebel, ſo weit er reicht, ganz gut. Was ſie beyde ſelbſt noch dabey vermiſſen werden, iſt daß der Beweis von jeden Verhåltniſſen aus dem Beweiſe von Verhåltniſſen in ganzen Zahlen hergeleitet werden muß, und

eben daher viel von der Kürze, Geſchmeidigkeit und von dem Einfachen verleurt, welches man bey den erſten Grundſätzen oder unmittelbar aus den Gründen abzuleitenden Lehrſätzen verlangen kann. Ich hatte mich, wiewohl ohne ſonderlichen Erfolg, umgeſehen, wiefern die Sache abgekürzt werden kan. Ich gab aber die Sache noch wegen einer andern Betrachtung auf, und dieſe iſt folgende:

Man ſetze, daß es ſich leicht und ſtrenge erweiſen laſſe, daß bey dem Hebel Kraft zur Laſt in umgekehrter Verhältniß des Abſtandes ſey, ſo ſehr auch Kraft und Laſt unter ſich incommenſurabel ſeyn mögen. Wenn auch ein ſolcher Beweis angeht, ſo hat man damit noch nicht viel anders gewonnen, als daß man das Geſetz bewieſen hat, nach welchem Kräfte auf einzelne Puncte des Hebels wirken. Es würde aber immer ein Sprung und zwar ein Sprung von einer auf zwo Dimenſionen ſeyn, wenn man von Kräften, die auf einzelne Puncte wirken, auf Kräfte verfallen wollte, die auf ganze Linien wirken. So

hete-

heterogen indeſſen dieſe Kräfte ſind, ſo iſt es deſſen unerachtet gedenkbar, daß eine auf einen Punct angebrachte Kraft, einer auf eine ganze Linie wirkenden Kraft das Gleichgewicht halte. Die Kräfte ſind hier eben ſo wie Puncte und Linien, der Dimenſion nach, verſchieden, weil ſonſt von keinem Gleichgewichte, und überhaupt von keiner Vergleichung die Rede ſeyn könnte. Die hieher gehörende Begriffe und Grundſätze müſſen nun nothwendig vorausgeſchicket werden; und dieſes machte auch, daß ich die Dimenſionen der Kraft im dritten Abſchnitte, die Theorie des Hebels aber erſt im vierten vortrug, und ſo war es ein leichtes, dieſe Theorie behörig ins reine zu ſetzen. Alles kömmt auf den §. 31 an. Die daſelbſt gebrauchte Vorausſetzung iſt, daß eine auf eine ganze Linie gleichförmig vertheilte Kraft eben ſo wie die Linie in beliebige Theile getheilt werden könne, und die Theile der Kraft eben ſo wie die Theile der Linien ihr Verhältniß zum Ganzen behalten. Dieſen Satz mag man als

einen

einen Grundſatz oder als ein *Poſtulatum* anſehen; es gilt mir gleichviel. Mir ſcheint er in dem Begrif der Kraft ſo am Tage zu liegen, daß ich nicht mehr wiſſen würde, was eine Kraft iſt, wenn er erſt ſollte bewieſen oder in Zweifel gezogen werden. Und wenn ich auch die Theorie des Hebels nicht darauf gründen wollte, ſo bleibt er deſſen unerachtet, eben ſo unentbehrlich, weil man in der Mechanik immer auch ſolche Kräfte betrachten muß, die auf ganze Linien, Flächen und körperliche Räume vertheilt ſind. Muß man ihn aber als einen Grundſatz annehmen, um andere Hauptſtücke der Mechanik darauf zu gründen, ſo gründe ich mit gleichem Rechte die Theorie des Hebels darauf, und erſpahre dadurch ſo wohl das Aufſuchen anderer oder gar nicht zu findender Grundſätze, als ängſtlich geſuchte Beweiſe, die zuletzt dennoch nur für einzelne Puncte des Hebels dienen.

Der nach dem dreyzehnten Abſchnitte eingerückte Zuſatz ſollte eigentlich nach dem vierzehnten folgen, wie man es gleich aus den erſten fünf Zeilen ſehen kann.

Es

Es hat übrigens dieſes Verſetzen nichts auf ſich, wiewol es wäre geändert worden, wenn ich die Aushängebogen nicht erſt nach dem Abdrucke erhalten hätte. Aus gleichem Grunde muß auch S. 72

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095$$

geleſen werden. S. 114 iſt in den drey letzten Ueberreſten im Rechnen um eine Unität gefehlt, um welche die achte Decimalſtelle zu klein iſt; und S. 154 unten muß

Nun iſt

$$\begin{aligned} 3 \log.(b:a) &= 0,6820631 - 17 \\ l.\tfrac{2}{81} \text{ - - -} &= 0,3925450 - 2 \\ \tfrac{1}{3}\log. a \text{ - -} &= \underline{0,7598949 - 1} \end{aligned}$$

demnach

$$\log.\frac{2b^3}{81a^3}.\sqrt[3]{a} = 0,8345030 - 19$$

geleſen werden. In den Kupferplatten ſind folgende Aenderungen zu machen:

Tab. III. Fig. 2. wird bey dem Durchſchnittspunct der Bögen EM, GC ein A geſetzt.

Tab. III. Fig. 5 muß oben zwiſchen Z, W ein N ſtehen.

Tab. V. Fig. 14. wird am untern Ecke ein D geſetzt.

Tab. VI. Fig. 18. wird von g nach q eine blinde Linie gezogen.

Die

Die übrigen Errata, die von einiger Erheblichkeit ſind, finden ſich am Ende der Vorrede; und die ſo ich beym nochmaligen Collationiren in den Mondstafeln und den Beyſpielen bemerkt, am Ende derſelben. In der Tafel von den Theilern der Zahlen müſſen

bey 1117	die Theiler	11. 101
. . 1603	. . . .	7. 229
. . 2737	. . . .	7. 17. 23
. . 4249	. . . .	7. 607
. . 8981	. . . .	7. 1283

geſetzt werden.

Einige Fehler im Texte rühren noch daher, daß der Setzer, vielleicht der Märkiſchen Mundart gemäß, die Fallendungen verwechſelt, und z. E.

S. 172. l. 4. um ſich der anſtatt um ſich die
S. 391. l. penult. denſelben anſtatt demſelben.
S. 512. l. 5. von unten, den Körper anſtatt dem Körper ꝛc.

geſetzt hat.

Wer die Mondstafeln gebrauchen will, thut wohl, wenn er die bemerkten Errata derſelben ausbeſſert. Ich glaube, daß ſie ſodann ziemlich zuverläßig ſeyn werden. Indeſſen da man

bey

bey dem Gebrauche ſelbſt auch ſich überrechnen kann, ſo iſt das Rathſamſte, jede Rechnung doppelt zu machen; bey der einen die Tage vom Anfang, bey der andern die Tage vom Ende des Jahrs zu gebrauchen. Dabey gebraucht man ſodann auch in der zweyten Tafel zween verſchiedene Jahrgänge, und da man doch einerley heraus bringen muß, ſo wird die Vergleichung immer zur Porbe dienen, und dadurch werden die mittlern Bewegungen auſſer Zweiffel geſetzt, oder man kann wenigſtens den Fehler nachſpühren. Andere Mittel werden ſich, wenn man ſich einmal an die Tafeln gewöhnt hat, leicht anbieten. Selbſt in der Abhandlung kommen einige bey den Beyſpielen vor.

Da dieſer zweyte Theil der Beyträge doppelt ſtärker geworden als der erſte, ſo habe ich zwey Titelblätter abdrucken laſſen, wovon das Zweyte vor die eilfte Abhandlung gebunden werden muß. Der Buchbinder wird daran dergeſtalt erinnert, daß er ſich nach der Willkühr des Beſitzers zu erkundigen hat, ob dieſer zween oder nur einen Band haben will.

ERRATA.

Errata.

Seite	anſtatt	lieſe:
2. linie 6	Theile	Theiler
5. l. 15	z. E.	So z. E.
5. unten	Ueberreſt der	Ueberreſt. Die
6. l. 18	$a - x$ mal	$a + x$ mal
29. l. 21	fürgegeben iſt	fürgegeben, iſt
30. l. 16	in einer	inner
70. l. 10	in Rechnung	Rechnung
78. §. 20. l. 1	$2 = 1$	$z = 1$
79. §. 21. l. 2	$l(1+2) = 2 \ldots$ ꝛc.	$l(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \&c.$
80. l. 1	$2 = 2$	$z = 2$
88. l. 3 von unten	$a^{2n+2} + b^{2n+2}$	$a^{2n+2} - b^{2n+2}$
97. §. 32. l. 11	657153 ꝛc.	67153 ꝛc.
118. §. 47. l. 3	$\frac{1}{7} + x^7$	$\frac{1}{7} x^7$
120. l. 3	$\frac{1}{9}\ \frac{1}{11}$	$\frac{1}{9} - \frac{1}{11}$
144. l. 4	Rakensburg	Ravensburg
192. §. 9. l. 6	$A x$	$A x^2$
213. l. 3	y^2	z
215. l. 23	$z^6 + \ldots$	$x^6 + \ldots$
254. l. 3	$m \nu C$	$\mu \nu C$
254. l. 5	$\alpha \mu \alpha$	$a \mu \alpha$
262. §. 15. l. 1	NH, MK	MH, NK
324. §. 13. l. 3	e	k
324. §. 13. am Ende	$d = NL$	$\delta = NL$
329. l. 18	Gleichgewichte	Gewichte

Errata.

Seite	anſtatt	lieſe:
333. §. 23. am Ende	E A E	E A R
340. §. 32. l. 5	E N	E R
349. unten	12ten Figur	13ten Figur
353. §. 48. l. 9	k	K
ibid. = = =	M P	A P
407. §. 45. l. 3	E	P
416. §. 54. l. 13	Schwůrigkeiten	Schwůnge
421. am Rande	Fig. IX	Fig. XI.
422. unten	p =	b =
439. l. 4	6 γ	C γ
= = am Rande	Fig. XI	Fig. XII
449. l. 3	C D	C d
= = = 4	C A	C a
488. l. 5	d c v k : m	d c ∽ k : m
496. l. 4	M	Q
520. l. 5	D C	D B
= = 6	D D	D B
= = 13	R	k
521. unten	P. D P	P. D B
542. l. 1	D E H	D E K
543. l. 9	geſetzte	Geſetz
618. l. 1	als	als die
639. §. 8. l. 6	weil	weil man
644. §. 11. l. 4	138	183
652. §. 22. l. 11	Eben ſo	finden. Eben ſo
658. l. 5	3 12 34 27	3 12 39 27
= = ibid.	3 12 39 46	3 12 34 46
= = §. 30. l. 7	142 20 46 39	144 20 46 39

665.

Errata.

Seite	anſtatt	lieſe:
665. §. 38. am Ende	PM	P—M
669. §. 48. l. 5	1 S	2 S
691.	$TL = \frac{1 \rightarrow ee}{1 = e\,\text{coſ}\,\mu}$	$TL = \frac{1 - ee}{1 - e\,\text{coſ}\,\mu}$
693. l. 11. von unten	warum	warum ſich
698. l. 3	+92 ſ2(2☉−2☊)	+92 ſ(2☉—2☊)
738. l. 10	20 St.	21 St.
767. §. 186. l. 3	Inclination	Declination
778. §. 200. l. 4	die meiſten	wie die meiſten
805. l. 3. von unten	1738	1783

Inhalt.

I. Theilung und Theiler der Zahlen S. 1

II. Vorſchlag die Theiler der Zahlen in Tabellen zu bringen = = = = 42

Nebſt einer ſolchen Tabelle von 1 bis 10200 = = = = = = 53

III. Verwandlung der Brüche = = 54

IV. Algebraiſche Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden = = = 133

V. Vorläufige Kenntniſſe für die, ſo die Quadratur und Rectification des Circuls ſuchen = = = 140

VI. Einige Anmerkungen von Ausmeſſung der Winkel und Linien auf dem Papier = = = = 170

VII.

VII. Anlage zur Tetragonometrie 175

VIII. Anmerkungen über die Verwandlung und Auflöſung der Gleichungen 184

IX. Quadratur und Rectification der krummen Linien durch geradelinichte Vielecke, welche um dieſelbe und in denſelben beſchrieben werden können 250

X. Anmerkungen und Zuſätze zur Gnomonic 314

1°. Anmerkungen über die Azimuthal-Uhren 315

2°. Beſtimmung des Azimuth durch die Höhe der Sonne 322

3°. Sector, um aus der Sonnenhöhe die Zeit zu beſtimmen 337

4°. Methode dieſe Sectoren für jede Polhöhe univerſal zu machen 341

5°. Conſtructionen für die Sonnenhöhe 347

6°. Anmerkungen über die Horizontal- und Verticaluhren 350

7°. Beſchreibung eines halben Circuls, um aus der Höhe der Sonne die Zeit zu finden 358

8°. Beſchreibung eines gleichſchenklichten Triangels, um aus der Sonnenhöhe die Stunden zu finden 360

Inhalt.

XI. Gedanken über die Grundlehren des Gleichgewichtes und der Bewegung 363

Erſte Grundlehren der Static.

1°. Der Begrif der Kraft . . 370

2°. Die unbiegſame Linie . . . 377

3°. Die Dimenſionen der Kraft . . 383

4°. Der Hebel 392

5°. Der Druck der Kräfte auf ebene Flächen 421

6°. Der Druck der Kräfte auf körperliche Räume 430

7°. Einige ſtatiſche Definitionen und Sätze 440

8°. Die Zuſammenſetzung der Kräfte 444

Erſte Gründe der Dynamic.

9°. Das Entſtehen der Bewegung 477

10°. Die Beſtimmung der Geſchwindigkeit 498

11°. Anwendung der Dynamic auf die Schwere 509

12°. Anwendung der Dynamic auf die Federkraft 516

13°. Der Stoß elaſtiſcher Körper 523

Zuſatz von dem Principe de la moindre Action 543

14°. Das Carteſiſche und Leibnitziſche Kräftenmaaß 556

Erſte Grundlehren der Hydroſtatic.

15°. Beſchaffenheit flüßiger Materien 575

16°.

Inhalt.

16°. Das Gleichgewicht flüßiger Materien 587
17°. Die Bewegung flüßiger Materien 608

XII. Zergliederung und Anwendung der Mayerſchen Mondstafeln.

1°. Vorläufige Betrachtungen . . 629
2°. Die mittlere Bewegúng . . 639
3°. Ungleichheiten des Mondlaufes 660
4°. Beſtimmung der Ungleichheiten des Mondlaufes durch die mittlere Bewegungen 668
5°. Betrachtung des Falls, wenn der Mond keine andere Ungleichheiten hätte, als die er zur Zeit der wahren Syzigien hat 672
6°. Die ſtündliche Bewegung des Mondes 681
7°. Die Keplerſche Beſtimmung des Mondlaufes 688
8°. Beſtimmung der Zeit zwiſchen den wahren und mittlern Syzigien 694
9°. Tafeln zur Berechnung der Syzigien und Finſterniſſe 702
10°. Berechnung und Entwerfung der Mondsfinſterniſſe 706
11°. Berechnung und Entwerfung der Sonnen- und Erdfinſterniſſe . . 720
12°. Allgemeine Entwerfung der Erdfinſterniſſe 727
13°. Die Genauigkeit der Projectionen 738

14°

14°. Die Zeit der gröſten Verfinſterung 751
15°. Die Zuverläßigkeit bey den Finſterniſſen 755
16°. Tafeln für den Mondlauf auſſer den Syzigien 764
17°. Bewegung des wahren Orts der Sonne und des Mondes auſſer den Syzigien 767
18°. Tafeln für die Bedeckung der Fixſterne von dem Monde, Berechnung und Entwerfung derſelben . . 780

Tafeln und Beyſpiele . . . 817

I.

Theilung und Theiler der Zahlen.

§. 1.

Es iſt nicht zu zweifeln, daß die Aufgabe von Erfindung der Theiler der Zahlen von den älteſten Zeiten an die Geometer beſchäftigt habe. Die Theorie der Primzahlen kömmt bereits in den Euclidiſchen Anfangsgründen vor, und eben ſo findet ſich in denſelben die Aufgabe von dem gröſten gemeinſamen Theiler zwoer Zahlen. Daß aber **Euclid** von der Aufgabe, die Theiler einer fürgegebenen Zahl zu finden, nicht Erwähnung thut, rührt ſchlechthin nur daher, weil er alles wegläßt, was er nicht auf eine ganz determinirte Art erweiſen

konnte. Dieſe Aufgabe gehört einiger maſſen unter die Diophantiſchen; ſie iſt aber auch zum Theil davon verſchieden. Denn ungeachtet die Bedingung, daß die Theiler ganze Zahlen ſeyn müſſen, dabey vorkommt, ſo bleibt die Frage: wie viele Theile eine jede Zahl habe, ſchlechthin unbeſtimmt; weil man Zahlen findet, die ſo viele und ſo wenig Theiler haben, als man immer will. Dieſer Umſtand aber verurſacht, daß man in der Algebra die Frage von Erfindung der Theiler einer Zahl, ſchwerlich oder gar nicht auf eine Gleichung bringen kann. Man hat dabey kein ander Datum als die Zahl, deren Theiler zu ſuchen ſind. Von dieſer weiß man nicht voraus, ob ſie Theiler hat, oder nicht. Wolte man demnach die Theiler, oder wenigſtens die Factoren der fürgegebenen Zahl als Wurzeln einer Gleichung anſehen; ſo würde dieſe Zahl zwar das letzte Glied der Gleichung ſeyn, als welches allemal das Product der Wurzeln iſt. Hingegen bleibt die Anzahl der Glieder dieſer Gleichung, die Coefficienten derſelben und der Grad der Gleichung ganz unerörtert, bevor nicht die Factoren der fürgegebenen Zahl gefunden ſind. Man reicht eben ſo nicht aus, wenn man ſich mit einer quadratiſchen Gleichung begnügen, und nur zween Factores finden will.

§. 2.

Die Auflöſung, die man für dieſe Aufgabe angiebt, iſt, daß man die Zahl, deren Theiler man

man ſuchen will, durch jede kleinere Zahl wirklich theile, um dadurch, der Ordnung nach, zu finden, ob ſie Theiler habe oder nicht? Ich ſage, durch jede kleinere Zahl. Denn ungeachtet ſeit Euclids Zeiten an ſchon bewieſen iſt, daß man hiebey alle die Zahlen vorbey gehen kann, die nicht Primzahlen ſind, ſo ſetzt dieſes dennoch voraus, daß man die Primzahlen kenne. Es iſt aber die Erfindung der Primzahlen eben ſo ſchwer, als die Erfindung der Theiler einer Zahl, und man muß eben die Theilungen, die wir vorſchlagen, vornehmen, es ſey daß man eine Zahl als Primzahl erkennen, oder ihre Theiler finden will. Indeſſen läßt ſich die Arbeit auf eine gedoppelte Art abkürzen. Denn wenn die Theilung mit einer Zahl nicht angeht, ſo geht ſie auch mit jedem vielfachen dieſer Zahl nicht an, und eben ſo viele Theilungen können demnach erſparet werden. Verfährt man auf dieſe Art von 1 an gerechnet; ſo behält man allerdings nur jede Primzahlen, womit die Theilung vorgenommen werden muß. Sodann läßt ſich ohne Mühe erweiſen, daß, wenn eine Zahl Theiler hat, von dieſen Theilern eben ſo viele kleiner ſind als ihre Quadratwurzeln, als es deren giebt, die gröſſer ſind, und daß letztere gefunden ſind, ſobald man erſtere gefunden hat, weil jene die Quotienten von dieſen ſind. Dieſer Umſtand macht, daß man ſich begnügen kann, die Theilung nur mit denen Primzahlen vorzu-

nehmen, welche kleiner ſind, als die Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man ſuchen will.

§. 3.

Indeſſen wenn leicht dieſe Zahl ſich auf 100000, oder ein Million belåuft; ſo hat man ſo viele Theilungen vorzunehmen, daß man es gewiß nicht fůr die langeweile unternimmt, und anſteht, ob man die Zahl nicht eben ſo gut ungetheilt laſſe, oder aufgebe; zumal da man nicht voraus wiſſen kann, ob es nicht eine Primzahl iſt, und daher gar keine Zerfållung in Factoren zulåßt. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, alle dieſe Theilungen dergeſtallt unnöthig zu machen, daß man ohne eine einige davon vorzunehmen, dennoch jede Quotienten und jede Ueberreſte finden, und gleichſam in einer Reihe hinſchreiben kann. Man ſieht leicht, daß dieſes in einer gewiſſen Ordnung, oder nach einem allgemeinen Geſetze geſchehen můſſe. Und da die Ordnung, wie die Primzahlen auf einander folgen, noch ganz unbekannt iſt; ſo ſieht man auch leicht, daß es beſſer angehen werde, wenn man die Theiler entweder nach der natůrlichen Ordnung der Zahlen, oder wenigſtens nach einer andern ganz einfachen Ordnung nimmt. Ich werde indeſſen die Sache ſo vortragen, wie ich darauf geleitet worden. Dahin gehören demnach folgende Betrachtungen.

§. 4.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, dergleichen z. E. 2, 3, 5, 7, 11, 13 ꝛc. ſind, ſo iſt die Theilung damit bald vorgenommen, und die Probe fällt deſto leichter aus, weil man für dieſe Theiler Kennzeichen hat, daran ſich bald finden läßt, ob ſie in einer Zahl aufgehen, oder nicht. Hat hingegen eine Zahl nur groſſe Theiler, ſo iſt dieſes eben der Fall, wo man ſehr viele Theilungen mit den kleinern Primzahlen vergebens vornehmen muß. Man ſieht leicht, daß man hier durch groſſe Theiler ſolche verſtehen muß, die von der Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man ſucht, wenig unterſchieden ſind, oder ein geringes Verhältniß zu derſelben habe. Z. E. hat die Zahl 479707 nur die zween Theiler 491 und 977. Und dieſe werden groß genennt, weil ſie von der Quadratwurzel 692 + ... kaum um die Hälfte verſchieden ſind. Hingegen hat die Zahl 479708 allerdings einen gröſſern Theiler 239854; ſie hat aber auch einen ſehr kleinen 2. Man kann daher nicht ſagen, daß ſie lauter groſſe Theiler habe.

§. 5.

Wenn demnach eine Zahl A ſolche Theiler hat, die von ihrer Quadratwurzel nicht viel verſchieden ſind; ſo iſt es das natürlichſte, dieſelben auf folgende Art zu ſuchen. Man ziehe die Quadratwurzel derſelben in ganzen Zahlen aus, und ſehe zugleich auf den Ueberreſt der

Quadratwurzel in ganzen Zahlen, oder die von der nächſt kleinern Quadratzahl ſey = a, und der Ueberreſt = b, ſo iſt

$$A = aa + b.$$

Es iſt klar, daß wenn A ſelbſt eine Quadratzahl iſt, ſodann b = o wird. Da wir nun annehmen, A habe ſolche Theiler, die von a wenig verſchieden ſind, ſo nenne man den kleinern a — x, den gröſſern a + x + y, ſo iſt

$$A = aa + b = (a - x).\ (a + x + y)$$

und $\frac{A}{a-x} = \frac{aa+b}{a-x} = a + x + \frac{xx+b}{a-x}$

$$= a + x + y$$

demnach wird

$$y = \frac{xx+b}{a-x}$$

eine ganze Zahl ſeyn, welche zu a + x addirt, den Theiler a + x + y giebt. Man ſieht zugleich auch, daß der Zähler dieſes Bruches xx + b der Ueberreſt iſt, welcher bleibt, wenn A durch a — x getheilt, a — x mal geht, oder wenn a — x mit a + x multiplicirt, von A abgezogen wird.

§. 6.

Man kann nun, um es im Vorbeygehen anzumerken, vermittelſt dieſer Formel

$$y = \frac{xx+b}{a-x}$$

ſprungsweiſe Zahlen beſtimmen, zwiſchen welche

kein

kein Theiler von A fällt. Es ſey z. E. die Zahl 150737, ſo iſt die nächſt kleinere Quadratzahl 150544, ihre Wurzel $388 = a$, und der Unterſchied $b = 193$, demnach

$$150737 = (388)^2 + 193$$

und
$$y = \frac{193 + xx}{388 - x}$$

eine ganze Zahl. Hier ſieht man nun leicht, daß man x wenigſtens = 14 nehmen müſſe, wenn y auch nur = 1 ſolle werden können; und daß demnach zwiſchen 388 und $388 - 14 = 374$ kein Theiler der Zahl 150737 vorkomme. Man ſetze ferner $x = 14 + p$, ſo findet man

$$y = \frac{389 + 28p + pp}{374 - p} = 1 + \frac{15 + 29p + pp}{374 - p}$$

eine ganze Zahl. Hier ſieht man wiederum, daß p wenigſtens = 10 müſſe genommen werden, wenn der Quotient auch nur = 1 werden ſolte. Demnach iſt auch zwiſchen 374 und 364 kein Theiler der Zahl 150737. Man kann eben ſo fortfahren und $p = 10 + q$ ſetzen; und ſo wird man

$$y - 2 = \frac{41 + 50q + qq}{364 - q}$$

erhalten, welches wiederum eine ganze Zahl ſeyn muß.

§. 7.

Will man hiebey der beſtändig wieder vorkommenden Reductionen entübrigt ſeyn, ſo

kehrt man die Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

um, indem man ſie in

$$2x + y = \surd(4ay + yy - 4b)$$

verwandelt. Hier muß demnach

$$4ay + yy - 4b$$

eine Quadratzahl ſeyn. Dieſes giebt in erſt angeführtem Beyſpiele, wo a = 388 und b = 193 iſt,

$$2x + y = \surd(1552y - 772 + yy)$$

woraus man für

y = 1	781*	y = 11	16421*
2	2336	12	17996
3	3893*	13	19573*
4	5452*	14	21152*
5	7013*	15	22733*
6	8576	16	24316
7	10141*	17	25901*
8	11708*	18	27488*
9	13277*	19	29077*
10	14848*	20	30668*
11	16421*	21	32261*
		22	33856 ꝛc.

findet. Ueber dieſe Zahlen bemerke man:

1. Daß, wenn die zwo erſten gefunden ſind, die folgenden durch bloſſes addiren gefunden werden. Denn ihre Unterſchiede ſind 1555, 1557, 1559, 1561, 1563 ꝛc. jeder folgende um 2 gröſſer.

2. Da

2.° Da dieſe Zahlen Quadrate ſeyn ſollen, ſo werden die meiſten von denen, die es nicht ſind, leicht an den Endigungen erkannt; dieſe ſind mit einem * bezeichnet.

3. Demnach bleiben nur noch die wenige bey $y = 2, 6, 12, 16, 22$ ꝛc. zu unterſuchen. Da nun von dieſen, wenn man die Probe anſtellt, nur die letzte 33856 eine Quadratzahl iſt, und 184 zur Wurzel hat, ſo findet man dadurch

$$2x + y = 2x + 22 = 184$$
$$x = 81$$

folglich den einen Theiler

$$388 - x = 307$$

den andern

$$388 + x + y = 491.$$

Und zugleich weiß man, daß, wenn auch die Zahl 150737 noch andere Theiler haben ſolte, derſelben keiner zwiſchen 307 und 491 falle.

§. 8.

Die erſtbemeldete Kennzeichen der Quadratzahlen, ſind folgende:

1. Keine Quadratzahl endet ſich mit 2, 3, 7, 8; ſondern die Endungen ſind

p 01	04	00	16	p 09
i 21	24	025	36	i 29
p 41	44	225	56	p 49
i 61	64	625	76	i 69
p 81	84		96	p 89

wo p überhaupt jede gerade Zahl, i aber jede ungerade bedeutet.

2.° Jede gerade Quadratzahl läßt ſich ſo vielmal durch 4 theilen, bis der Quotient ungerade wird. Geſchieht dieſes bey einer fürgegebenen geraden Zahl nicht, ſo iſt ſie keine Quadratzahl.

3.° Demnach laſſen ſich auch die zwo letzten Ziffern einer geraden Quadratzahl durch 4 theilen.

4.° Jede ungerade Quadratzahl um 1 vermindert, läßt ſich durch 8 theilen.

5.° Demnach auch die drey letzten Ziffern derſelben um 1 vermindert, können durch 8 getheilet werden.

6. Jede Quadratzahl, durch 9 getheilt, geht entweder auf, oder ſie läßt 1, 4, 7 im Ueberreſte.

7. Eine ungerade Quadratzahl, ſo durch 9 nicht theilbar iſt, läßt ſich, um 1 vermindert, durch 24 theilen.

Proben

Proben von dieſer Art giebt es noch unzählige. Man ſieht aber aus dieſer angeführten leicht, daß, wenn eine Zahl dieſelbe aushält, es ſehr wahrſcheinlich eine Quadratzahl ſey.

§. 9.

Man kann auch von dieſen Kennzeichen mehrere verbinden, und dadurch das Aufſuchen der Theiler einer Zahl abkürzen. Um dieſes durch ein Beyſpiel zu erläutern, ſo ſey die Zahl 479707 fürgegeben; und es ſolle gefunden werden, ob, oder welche Theiler ſie habe? Zieht man nach den vorhingegebenen Regeln (§. 6.) die Quadratwurzel aus, ſo findet man

$$479707 = (692)^2 + 843 = a^2 + b$$

demnach $a = 692$
$b = 843$

und folglich

$$2x + y = \sqrt{(2768y + yy - 3372)}$$

demnach für

y = 2	2168*	y = 8	18836
3	4941*	9	21621*
4	7716	10	24408*
5	10493*	11	27197*
6	13272*	12	29988*
7	16053*	13	32781*
		14	35576 ꝛc.

Dieſe Zahlen ſolten wiederum Quadratzahlen ſeyn; es werden aber vermöge der erſt angegebenen Kennzeichen, die mit einem * bezeichneten

neten leicht ausgeſchloſſen, und ſo bleiben nur noch die zu unterſuchen, welche bey $y = 4, 8, 14, 18$ ꝛc. ſtehen. Um nun auch von dieſen noch die meiſten auszuſchlieſſen, werden wir das ſechſte dieſer Kennzeichen gebrauchen, daß nemlich jede Quadratzahl durch 9 getheilt, müſſe 0, 1, 4, 7 übrig laſſen. Man ſetze demnach

$y = 10m + 4$ und $y = 10m + 8$

ſo verwandelt ſich der Ausdruck

$$2768y + yy - 3372$$

in folgende beyde

$$27760m + 100m^2 + 7716$$

und $$27840m + 100m^2 + 17836.$$

Dieſe beyde Ausdrücke theile man durch 9, und behalte nur die Ueberreſte, ſo iſt

der erſte	der zweyte
$4m + 3 + mm$	$3m + 7 + mm.$

Man ſetze nun für m die Werthe von 0 bis 8, und indem man wiederum durch 9 dividiret, behalte man ebenfalls nur die Ueberreſte, ſo findet ſich

für m =		für m =	
0	3	0	7*
1	8	1	2
2	6	2	8
3	6	3	7*
4	8	4	8
5	3	5	2
6	0*	6	7*
7	8	7	5
8	0*	8	5

Unter

Unter dieſen Ueberreſten finden ſich nur 0 und 7, welche bey Quadratzahlen vorkommen. Demnach werden für m auch nur die Werthe

6	0
8	3
15	6
17	9
24	12
26 ꝛc.	15 ꝛc.

beybehalten, welches für y die Werthe

64	8
84	38
154	68
ꝛc.	98 ꝛc.

giebt. Wir können aber bey m und den Ausdrücken

$$27760\,m + 100\,m^2 + 7716$$
$$27840\,m + 100\,m^2 + 17836$$

bleiben. Wird demnach in dieſen

m = 6	m = 0
8	3
15	6
ꝛc.	9 ꝛc.

geſetzt, ſo findet ſich

für		für	
m = 6	177976	m = 0	17836
= 8	236196*	= 3	25314
	ꝛc.	= 6	188476 ꝛc.

Hier

Hier iſt nun $\frac{236196}{4} = \frac{59049}{(9)} = \frac{6561}{(9)}$

$$= \frac{729}{(9)} = \frac{81}{(9)} = \frac{9}{(9)} = 1;$$

demnach die Quadratwurzel $= 2.3.3.3.3.3.$ $= 486 = 2x + y$ und $y = 10m + 4 = 84$.

Demnach $2x + 84 = 486$

$x = 201$

$a - x = 692 - 201 = 491$ der erſte Theiler,

$a + x + y = 692 + 201 + 84 = 977$ der andere Theiler.

Da die übrige Zahlen 177976, 17836, 25314, 188476 keine Quadratzahlen ſind, welches vermittelſt der Theilung durch 4 leicht erhellet, ſo folgt auch, daß die fürgegebene Zahl 479707, wenn ſie auſſer den beyden Theilern 491 und 977 noch andere hätte, derſelben keiner zwiſchen dieſe beyde falle.

§. 10.

Um nun wiederum zu dem §. 5. zurücke zu kehren, ſo haben wir daſelbſt angemerkt, daß in der Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

der Zähler dieſes Bruches $xx + b$, der Ueberreſt iſt, welcher bleibt, wenn $a - x$ in A getheilt, $a + x$ mal geht; oder wenn $a - x$, $a + x$ male genommen von A abgezogen wird.

Setzt

Setzt man nun für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. ſo ſieht man leicht, daß in

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

der Zähler immer gröſſer, der Nenner aber immer kleiner wird, und daß daher nach und nach y gröſſer als 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. werden muß. Es iſt aber, wenn man A durch a — x theilt, der Quotient

$$a + x + y = a + x + \frac{xx + b}{a - x}$$

demnach wächſt dieſer nicht nur um die Einheiten von x, ſondern zugleich auch, wiewohl langſamer, um die von y. Ferner ſieht man, daß die Ueberreſte xx + b anfangs wie die Quadrate von x, und daher ihre Unterſchiede wie die ungerade Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ꝛc. anwachſen, bis ſie gröſſer als der Theiler a — x werden. Wird demnach, ſo bald dieſes geſchiehet, a — x von xx + b abgezogen, ſo wird der Quotient um 1 gröſſer, und die folgenden Ueberreſte nehmen nun ebenfalls ſtärker zu. Denn man ſetze, das Abziehen geſchehe, wo x = c wird, ſo iſt der Ueberreſt für x = c

vor dem Abziehen	nach dem Abziehen
$cc + b$	$cc + c + b - a$

demnach für die nächſtfolgende Stelle x = c + 1

$cc + 2c + 1 + b$	$cc + 3c + 2 + b - a$

und daher das Anwachſen dieſer Ueberreſte

$2c + 1$	$2c + 2$

woraus

woraus man ſieht, daß, wenn man das Abziehen wirklich vornimmt, die folgende Ueberreſte um 1 ſtärker anwachſen, als wenn man das Abziehen nicht vorgenommen hätte.

§. 11.

Da ſich alles dieſes in einem Beyſpiele klarer zeigen läßt, ſo ſey die Zahl 10007 durch jede kleinere Zahlen zu theilen, und die zu jedem Theiler gehörige Quotienten und Ueberreſte zu finden. Nun iſt $10007 = (100)^2 + 7 = aa + b$, demnach $a = 100$ und $b = 7$, folglich

$$y = \frac{7 + xx}{100 - x}$$

Dieſes giebt nun folgende Tabelle für jede Theiler $100 - x$.

§. 12.

In dieſer Tabelle enthält die Columne A die Theiler $100 - x$. In der Columne B ſteht neben jedem Theiler der Ueberreſt. Die dritte Columne C giebt die Unterſchiede, oder die allmählige Zunahme dieſer Ueberreſte an. Endlich kommen in der vierten Columne D die Quotienten in ganzen Zahlen vor. Alle dieſe Zahlen laſſen ſich nun allerdings finden, wenn man, der Ordnung nach, die fürgegebene Zahl 10007 durch 100, 99, 98, 97, 96 ꝛc. theilen will. Da es aber ſehr langweilig iſt, ſo viele Theilungen vorzunehmen, ſo iſt es unſtreitig

A	B	C	D
100	7		100 (I)
99	8	1	101
98	11	3	102
97	16	5	103
96	23	7	104
95	32	9	105
94	43	11	106
93	56	13	107
92	71	15	108
91	88	17	109
90	107	19	110
90	17		111
89	39	22	112
88	63	24	113
87	89	26	114
87	2		115
86	31	29	116
85	62	31	117
84	95	33	118
84	11		119
83	47	36	120
82	85	38	121
82	3		122
81	44	41	123
80	87	43	124
80	7		125
79	53	46	126
78	101	48	127
78	23		128
77	74	51	129
76	127	53	130

A	B	C	D
76	51		131
75	107	56	132
75	32		133
74	91	59	134
74	17		135
73	79	62	136
73	6		137
72	71	65	138
71	138	67	139
71	67		140
70	67	0 (70)	142 (II)
69	71	4	144
69	2		145
68	11	9	147
67	24	13	149
66	41	17	151
65	62	21	153
64	87	25	155
64	23		156
63	53	30	158
62	87	34	160
62	25		161
61	64	39	163
61	3		164
60	47	44	166
59	95	48	168
59	36		169
58	89	53	171
58	31		172
57	32	1 (58)	175 (III)
56	39	7	178
55	52	13	181
54	71	19	184

A	B	C	D
54	17		185
53	43	26	188
52	75	32	191
52	23		192
51	62	39	195
51	11		196
50	57	46	199
50	7		200
49	11	4 (53)	204 (IV)
48	23	12	208
47	43	20	212
46	71	28	216
46	25		217
45	62	37	221
45	17		222
44	19	2 (46)	227 (V)
43	31	12	232
42	53	22	237
42	11		238
41	44	33	243
41	3		244
40	7	4 (44)	250 (VI)
39	23	16	256
38	51	28	262
38	13		263
37	17	4 (41)	270 (VII)
36	35	18	277
35	67	32	284
35	32		285
34	45	13 (47)	293 (VIII)
34	11		294
33	41	30	302

A	B	C	D
33	8		303
32	23	15 (47)	312 (IX)
31	25	2 (33)	322 (X)
30	47	22	332
30	17		333
29	31	14 (43)	344 (XI)
29	2		345
28	11	9 (37)	357 (XII)
27	17	6 (33)	370 (XIII)
26	23	6 (32)	384 (XIV)
25	32	9 (34)	399 (XV)
25	7		400
24	23	16 (40)	416 (XVI)
23	48	25 (48)	433 (XVII)
23	25		434
23	2		435
22	41	39 (61)	453 (XVIII)
22	19		454
21	74	55 (76)	473 (XIX)
21	53		474
21	32		475
21	11		476
20	87	76 (96)	496 (XX)
20	67		497
20	47		498
20	27		499
20	7		500
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

eine beträchtliche Abkürzung, wenn alle dieſe Zahlen durch bloſſes Addiren gefunden, und gleichſam nur hingeſchrieben werden können, ſo bald man vermittelſt der Ausziehung der Quadratwurzel aus der fürgegebenen Zahl 10007 die drey erſten Zahlen

100 7 100

gefunden hat.

§. 13.

Dieſes geht nun nach folgenden Regeln an.

1.° Erhellet aus der (§. 11.) gefundenen Formel $y = \frac{7 + xx}{100 - x}$ daß die erſten Ueberreſte nach den Quadraten xx demnach ihre Unterſchiede nach den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ꝛc. anwachſen.

2.° Daher finden ſich in der dritten Columne C. dieſe ungerade Zahlen, der Ordnung nach, bis auf 19; und bis eben ſo weit ſind ſie in der zweyten Columne B zu dem erſten Ueberreſte 7 addirt. Man begreift leicht, daß wenn 10007 eine Quadratzahl wäre, dieſer erſte Ueberreſt $= 0$ ſeyn, und demnach die zweyte Columne die Quadrate 1, 4, 9, 16, 25 ꝛc. enthalten würde.

3. Nun findet ſich die erſtbemeldte Ordnung bey dem Theiler 90 unterbrochen: denn

19 zu 88 addirt, giebt 107. Da nun dieſer Ueberreſt gröſſer iſt als der Theiler, ſo wird dieſer davon abgezogen, und ſo bleibt 17, welcher nunmehr kleinere Ueberreſt, unter 107 und ebenfals neben 90 geſetzt iſt; ſo, daß auf dieſe Art 90 zweymal vorkömmt.

4. Sodann nahmen die Quotienten in der Columne D, welche überhaupt

$$100 + x + y = 100 + x + \frac{7 + xx}{100 - x}$$

ſind, bis eben dahin, der Ordnung nach, um 1 zu. Von da an wird jeder um 1 gröſſer. Denn da 90 mal 110 = 9900 von 10007 abgezogen 107, demnach mehr als 90 übrig läßt; ſo ſieht man leicht, daß ſich in der That 90 mal 110 + 1, oder 90 mal 111 abziehen laſſen. Und dieſes macht, daß der Quotient 111 neben dem zweyten 90 und nicht neben 89 ſteht, wo er ſonſt würde zu ſtehen gekommen ſeyn, wenn man nicht 90 von 107 abgezogen hätte.

5. Endlich ſieht man in der dritten Columne C daß von 19 nicht auf 21, ſondern auf 22 geſprungen wird. Dieſes würde ebenfalls nicht ſeyn, wenn nicht 90 wäre von 107 abgezogen worden. Denn ſo würde man

A	B	C	D
90	107	19	110
89	128	21	111
88	151	23	112
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

gehabt haben. Da aber auf dieſe Art alle Ueberreſte B gröſſer ſeyn würden als ihre Theiler A, ſo müßten dieſe ſämtlich abgezogen werden. Man ziehe ſie wirklich ab, ſo wird jeder Quotient D um 1 gröſſer, und man erhält

90	17	19	111
89	39	22	112
88	63	24	113
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

demnach eben die Zahlen, wie ſie in der Tafel ſind. Man verfährt daher kürzer, wenn man, wie es in der Tafel geſchehen, 90 von 107 abzieht, und ſodann von 19 auf 22 ſpringt.

6.° Da nun die Ueberreſte durch das beſtändige Addiren der Unterſchiede, ſo in der Columne C ſind, immer anwachſen; ſo ſieht man leicht, daß im folgenden wiederum müßten Subtractionen vorgenommen werden, ſo oft ein Ueberreſt anfängt gröſſer als der Theiler zu werden.

7.° Dieſes geſchieht auch würklich bey den Theilern 87, 84, 82, 80, 78, 76, 75, 74, 73, 71, welche daher eben ſo wie vorhin

90 doppelt vorkommen, und wo die Unterſchiede C ebenfalls um 3 gröſſer werden.

8.° Bis dahin geht demnach alles nach einem ſehr einfachen Geſetze. Hingegen fängt bey dem Theiler 70 eine neue Ordnung an; und dieſes geſchieht immer wo der Quotient anfängt, doppelt, drey, vier, fünf ꝛc. mal gröſſer als der Theiler zu werden.

9.° Um dieſe Abänderungen aber, der Ordnung nach, zu betrachten, ſo ſieht man, daß bey 71 der Ueberreſt 138 ſteht, und demnach 71 davon abgezogen werden muß. Dieſes Abziehen macht, daß man in der Columne C von 67 auf 70 kömmt, welche Zahl nun eben ſo groß iſt als der Theiler; demnach wird ſie zu dem neben dem 71 ſtehenden Ueberreſt 67 nicht erſt addirt, weil man den Theiler 70 von der Summe wiederum abziehen müßte. Ich habe demnach in der Columne C 70 in ( ) eingeſchloſſen, und 0 voran geſetzt, welches anzeigt, daß der neben 71 ſtehende Ueberreſt 67 nicht vermehrt werde, ſondern ebenfalls neben den Theiler 70 zu ſtehen komme.

10. Da nun aber dadurch der Quotient um 1 gröſſer wird, ſo ſteht auch neben dem Theiler 70 nicht 141, ſondern 142.

11. Da

11. Da ferner bey dem Theiler 70 eine Subtraction geſchehen, ſo ſolte in der Columne C neben 69 nunmehr 73 ſtehen; da ſich aber auch hievon 69 abziehen läßt, und 4 übrig bleibt, ſo habe ich auch nur 4 neben 69 geſetzt, welches zu 67 addirt, den Ueberreſt 71 giebt. Man ſieht auch leicht, daß ebenfalls wegen des Abziehens, der Quotient um 1 gröſſer, und demnach 144 werden muſte.

12. Aus gleichen Gründen nehmen von da an die Quotienten um 2, die Unterſchiede C um 4 zu, jedoch mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreſte gröſſer als die Theiler werden, daſelbſt wiederum ſubtrahirt, der Theiler doppelt geſetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columne C 4 + 1 oder 5 addirt wird; wie man es bey den Theilern 69, 64, 62, 61, 59 ſehen kann.

13. Bis dahin geht es nach der zweyten Ordnung. Die dritte fängt aus ganz ähnlichen Gründen bey 57 an. Denn da würde in der dritten Columne 58 zu ſtehen kommen, wenn man nach der zweyten Ordnung fortfahren wolte. Da aber 58 bereits gröſſer iſt als der Theiler 57, ſo habe ich 58 in ( ) eingeſchloſſen, und dafür 1 geſetzt, um der Subtractionen überhoben zu ſeyn. Dieſes machte aber, daß

nun die Quotienten um 3, die Zahlen C um 6 gröſſer werden, doch ebenfalls mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreſte gröſſer als die Theiler werden, daſelbſt wiederum ſubtrahirt, der Theiler doppelt geſetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columne C 6 + 1 oder 7 addirt wird, wie man es bey den Theilern 54, 52, 51, 50 ſehen kann.

14. Auf dieſe Art geht es auch mit den folgenden Ordnungen, deren Anfang in der Columne D mit römiſchen Zahlen gezeichnet ſteht. Bey jeder Ordnung wachſen die Theiler um ſo viel Einheiten als die Zahl der Ordnung angiebt, die Unterſchiede C aber um doppelt ſo viel. Doch immer mit Vorbehalte des Umſtandes, wo eine Subtraction vorgenommen wird.

15. Man ſieht auch leicht, daß die Ordnungen immer näher zuſammen kommen, oder ſich auf weniger Theiler erſtrecken. Dieſes macht auch, daß man die Aufmerkſamkeit wegen der Abwechſelung der Zahlen in der Columne C verdoppeln muß.

16. So z. E. bey dem Theiler 29 fängt die XIte Ordnung an, und zugleich wird 29 von 31 abgezogen; dieſes macht, daß man in C 2. XI + 1 = 23 zu 14 addiren muß, um (37) zu erhalten. Nun wird der Theiler 28 von (37) abgezogen, und

und dieſes macht, daß die XIIte Ordnung anfängt. Der Unterſchied 37 — 28 = 9 wird vor (37) geſetzt und zu 2 addirt, um den Ueberreſt 11 zu haben. Endlich wird 345 + XII = 357 der Quotient; ſodann giebt 2. XII + 9 = 24 + 9 = (33), und 33 — 27 = 6, und 6 + 11 = 17. Und wegen des Abziehens fängt die XIIIte Ordnung an; ſo, daß 357 + XIII = 370 der Quotient wird ꝛc.

17. Bey dem Theiler 23 wird zweymal, bey 21 dreymal, bey 20 viermal ſubtrahirt; weil die Zahlen C immer gröſſer, die Theiler aber immer kleiner werden. Ich habe demnach bey 20 abgebrochen, weil nachgehends die Quotienten ſo ſchnelle wachſen, daß des ſubtrahirens kein Ende wird.

18. Noch iſt anzumerken, daß es Fälle giebt, wo gleich Anfangs ſubtrahirt werden muß. So z. E. wenn anſtatt der Zahl 10007 die Zahl 10157 wäre vorgenommen worden zu theilen; ſo würde a = 100, b = 157 geweſen ſeyn. Demnach hätte man

A	B	C	D
100	157		100
100	57		101
99	59	2	102
98	63	4	103
97 ꝛc.	69 ꝛc.	6 ꝛc.	104 ꝛc.

und folglich gleich Anfangs zu ſubtrahiren gehabt; und ſo wären auch die Unterſchiede C gleich Anfangs um 1 gröſſer geweſen.

§. 13.

Das bisher geſagte betrift den Fall, wo man a — x als Theiler anſieht. Man kann aber auch a + x als Theiler anſehen, und da erhält man

$$\frac{A}{a+x} = \frac{aa+b}{a+x} = a - x + \frac{xx+b}{a+x}$$

Setzt man demnach für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. ſo wird der Theiler a + x der Ordnung nach um 1 gröſſer, der Quotient

$$a - x + \frac{xx+b}{a+x}$$

der Ordnung nach um 1 kleiner, ausgenommen an denen Stellen wo der Bruch

$$\frac{xx+b}{a+x}$$

anfängt gröſſer als 1, 2, 3, 4 ꝛc. zu werden, welches aber hier, wo der Theiler immer anwächſt, nicht ſo ofte wie in den vorhergehenden Fall geſchieht. Man ſieht auch leicht, daß, weil hier der Theiler von a bis auf A = aa + b anwachſen kann, die Berechung von jeden Quotienten und Ueberreſten um ſo viel mehr verlängert wird. Denn ſo z. E. hatten wir vorhin bey der Zahl 10007 nur die Theiler von

100 bis 1; hingegen haben wir hier Theiler die von 100 bis 10006 gehen. Bey noch gröſſern Zahlen wird dieſer Unterſchied noch gröſſer. Uebrigens wird die länger dauernde Arbeit bey den Theilern a + x dadurch leichter gemacht, daß man hier nicht auf ſo viele Abwechslungen von Ordnungen zu ſehen hat. Ich werde nun, um das Verfahren zu erläutern, eben die Zahl 10007 vornehmen, ohne jedoch die daraus erwachſende Tabelle bis zum Ende fortzuſetzen, weil die Berechnung von Anfang bis zum Ende gleich einfach bleibt.

§. 14.

Hier ſind nun wiederum in A die Theiler, in B ihre Ueberreſte, in C deren Unterſchiede, in D die Quotienten. Bey dem Theiler 111 geht die erſte Subtraction vor, weil der Ueberreſt 128 gröſſer als der Theiler iſt. Dadurch wird der Quotient, welcher 89 war, in 90 verwandelt, und in der Columne C geht man nun von 21 nur zu 22. Denn die Subtraction, die mit 111 vorgenommen worden, iſt ſo gut als mit allen folgenden Theilern vorgenommen. Da aber bey den folgenden Theilern nicht 111, ſondern der Theiler ſelbſt, oder 112, 113, 114, 115 ꝛc. hätte müſſen abgezogen werden, ſo wird dieſe Verminderung der dazu gehörenden Ueberreſte dadurch erhalten, daß die Unterſchiede C nicht 23, 25 ꝛc. ſondern nur 22, 24, 26 ꝛc. genommen werden. Eine eben dergleichen

A	B	C	D
100	7		100
101	8	1	99
102	11	3	98
103	16	5	97
104	23	7	96
105	32	9	95
106	43	11	94
107	56	13	93
108	71	15	92
109	88	17	91
110	107	19	90
111	128	21	89
111	17		90
112	39	22	89
113	63	24	88
114	89	26	87
115	117	28	86
115	2		87
116	31	29	86
117	62	31	85
118	95	33	84
119	130	35	83
119	11		84
120	47	36	83
121	85	38	82
122	125	40	81
122	3		82
123	44	41	81
124	87	43	80
125	132	45	79
125	7		80
126	53	46	79
127	101	48	78
128	151	50	77
128	23		78

A	B	C	D
129	74	51	77
130	127	53	76
131	182	55	75
131	51		76
132	107	56	75
133	165	58	74
133	32		75
134	91	59	74
135	152	61	73
135	17		74
136	79	62	73
137	143	64	72
137	6		73
138	71	65	72
139	138	67	71
140	207	69	70
140	67		71
141	137	70	70
142	209	72	69
142	67		70
143	140	73	69
144	215	75	68
144	71		69
145	147	76	68
145	2		69
146	79	77	68
147	158	79	67
147	11		68
148	91	80	67
149	173	82	66
149	24		67
150	107	83	66
151	192	85	65
151	41		66
152	127	86	65

chen Verminderung geht auch bey jeder folgenden Subtraction, z. E. bey den Theilern 115, 119, 122, 125, 128, 131, 133 ꝛc. vor.

§. 15.

Es iſt nun die Frage, dieſe Methode, wodurch unzählige Diviſionen in ein bloſſes addiren und ſubtrahiren verwandelt werden, bey der Aufgabe von Erfindung der Theiler einer Zahl anzuwenden. Man ſieht von ſelbſt, daß es hiebey eigentlich nur auf die Ueberreſte ankömmt. Die in erſtgegebenem Beyſpiele gebrauchte Zahl 10007 iſt eine Primzahl; und ſo iſt ſich nicht zu verwundern, daß in den Columnen B kein Ueberreſt $=0$ wurde. Denn man ſieht leicht, daß dieſes geſchehen muß, ſo ofte die Zahl, ſo man auf dieſe Art behandelt, wirklich Theiler hat. Man ſieht auch leicht, daß der Ueberreſt deſto früher $=0$ wird, je näher ein Theiler der Quadratwurzel der Zahl kömmt, deren Theiler man ſucht. So z. E. wenn die Zahl 53297 fürgegeben iſt

$$53297 = (230^2) + 397,$$

demnach hat man (§. 13. No. 18.)

A	B	C	D
230	397		230
230	167		231
229	169	2	232
228	173	4	233
227	179	6	234
226	187	8	235
225	197	10	236
224	209	12	237
223	223	14	238
223	•		239

Da

Da hier der erſte Ueberreſt 397 bereits gröſſer iſt als der Theiler, ſo wird gleich Anfangs die Subtraction vorgenommen, und daher die Unterſchiede C um 1 vermehrt, = 2, 4, 6, 8 ꝛc. Bey 223 kömmt die zweyte Subtraction vor. Und da der Ueberreſt = 0 wird; ſo folgert man ohne weiters, daß die fürgegebene Zahl 53297 das Product aus 223 und 239 ſey. Es iſt für ſich klar, daß man ungleich länger würde zu rechnen gehabt haben, wenn man 53297 durch alle Primzahlen von 1 bis 223 hätte wirklich dividiren wollen; und daß demnach durch dieſe Methode gerade diejenigen Theiler am kürzeſten gefunden werden, die man ſonſt am mühſamſten durch das Dividiren mit Primzahlen findet.

§. 16.

Da man aber nicht voraus wiſſen kann, ob eine Zahl ſo ſchickliche Theiler habe, ſo würde in jeden andern Fällen der Vortheil dieſer Methode nur in der Abkürzung beſtehen, wodurch alle ſolche Diviſionen erſpahrt werden. Dieſer Vortheil iſt zwar allemal an ſich beträchtlich; es findet ſich aber noch ein anderer mit ein, und dieſer macht, daß auch dann, wo eine fürgegebene Zahl entweder nur kleine, oder auch gar keine Theiler hat, man nicht nöthig hat, die Theiler ſämtlich durch die Muſterung gehen zu laſſen; ſondern, daß man ſich mit denen begnügen kann, welche ſich in einer dem

Bezir-

Bezirke der oben (§. 12. No. 14.) ſogenannten erſten Ordnung befinden. Oder, welches einerley iſt, man ſetzt die Tabelle nur ſo weit fort, bis der Quotient anfängt doppelt gröſſer als der Theiler zu werden.

§. 17.

Um dieſes zu erweiſen, und zugleich durch ein Beyſpiel aufzuklären, werden wir wiederum die Zahl 10007 vornehmen, und dabey ſetzen, die Tabelle (§. 11), ſo wir für dieſelbe berechnet, ſey nur bis auf den Theiler 70 fortgeſetzet. Da nun bis dahin kein Ueberreſt B=0 iſt; ſo ſieht man ſogleich, daß, wenn auch die Zahl 10007 Theiler haben ſolte, deren keiner zwiſchen 70 und 142 falle. Nun ſage ich, daß wenn die Zahl 10007 einen Theiler z haben ſolte, der kleiner als 70 iſt, dieſes ſich an denen bis zu dem Theiler 70 berechneten Theilern, Ueberreſten und Quotienten erkennen laſſe. Denn was auch immer z für eine Zahl ſeyn mag, ſo fällt wenigſtens ein Multiplum davon zwiſchen 70 und 142, oder auch nur zwiſchen 70 und 140; und zwar wird es

2z	ſeyn, wenn z zwiſchen		35	und	70
4z	.	.	18	.	35
8z	.	.	9	.	17
16z	.	.	5	.	8
32z	.	.	3	.	4
64z	.	.	2	.	2
128z	.	.	1	.	1.

fällt.

fällt. Demnach wird ein Multiplum von z, und zwar wenigſtens eines, zwiſchen 70 und 140 fallen, und daher unter denen von 100 bis 70 berechneten Theilern oder unter ihren Quotienten vorkommen. Dazu kommt nun noch der Umſtand, daß, wo auch immer dieſes Multiplum vorkommt, der in B dabey befindliche Ueberreſt, entweder der Theiler z ſelbſt, oder wenigſtens ein Multiplum davon iſt. Das will nun ſagen: wenn unter den bis zu dem Theiler 70 in B befindlichen Ueberreſten einer vorkommt, der entweder mit dem Theiler oder mit dem Quotienten commenſurabel iſt, ſo, daß entweder der Ueberreſt und der Theiler, oder der Ueberreſt und der Quotient, oder alle drey ſich durch einerley Zahl dividiren laſſen; ſo iſt dieſe Zahl zugleich auch ein Theiler der fürgegebenen Zahl 10007. Geht es aber bey keinem der Ueberreſte an, ſo iſt 10007 eine Primzahl. Denn da der Vorausſetzung zufolge z in 10007 getheilt werden kann, ſo wird 10007 durch das Multiplum n z getheilt, entweder ebenfalls aufgehen, oder z, 2 z, 3 z, 4 z .... m z übrig laſſen, nemlich eben ſo vielmal z, als n in (10007 : z) getheilt, Einheiten übrig läßt. Laſſet uns nun dieſes durch einige Beyſpiele erläutern.

§. 18.

Es ſeyn die Theiler der Zahl 217871 zu finden. Hier iſt

$$217871 = (466)^2 + 715$$

dem-

demnach

A	B	C	D	A	B	C	D
466	715	—	466	455	381	22	478
466	249		467	454	405	24	479
465	251	2	468	453	431	26	480
464	255	4	469	452	459	28	481
463	261	6	470	452	7		482
462	269	8	471	451	38	31	483
461	279	10	472	450	71	33	484
460	291	12	473	449	106	35	485
459	305	14	474	448	143	37	486
458	321	16	475	447	182	39	487
457	339	18	476	446	223	41	488
456	359	20	477				

Da ſich nun hier bey dem Theiler 446 der Ueberreſt 223 findet, welcher halb ſo groß als der Theiler iſt; ſo iſt 223 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 217871. Nimmt man die Theilung vor, ſo iſt der Quotient $977 = 2 \cdot 488 + 1$. Denn da 446 in 217871 getheilt, $488\frac{1}{2}$ mal geht, ſo geht die Hälfte von 446 doppelt ſo viel, oder 977 mal. Will man nun ſehen, ob 977 Theiler habe; ſo iſt

$$977 = (31)^2 + 16$$

demnach

A	B	C	D
31	16		31
30	17	1	32
29	20	3	33
28	25	5	34
27	32	7	35
27	5		36
26	15	10	37
25	27	12	38
25	2		39
24	17	15	40
23	34	17	41
23	11		42
22	31	20	43
22	9		44

Dieſe Tabelle wird nur bis zu den Theiler 22 fortgeſetzt, weil ſchon dieſer den doppelt gröſſern Quotienten 44 giebt. Sie muſte aber bis dahin fortgeſetzet werden, weil unter den Ueberreſten B keiner vorkame, der mit ſeinen zugehörenden Theiler oder Quotienten commenſurabel wäre; demnach iſt 977 eine Primzahl.

§. 19.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, ſo darf man die dafür zu berechnende Tabelle nicht weit fortſetzen, weil ihre Multipla ſich bald zeigen. Es ſeyn z. E. die Theiler der Zahl 391391 zu ſuchen,

ſuchen, wo man leicht ſieht, daß ſie deren haben muß, und daß wenigſtens 391 und 1001 ſolche ſind. Nun iſt

$$391391 = (625)^2 + 766$$

demnach

A	B	C	D
625	766		625
625	141		626
624	143	2	627
623	147	4	628
622	153	6	629
621	161	8	630

Es iſt unnöthig die Tabelle weiter fortzuſetzen: denn

143 und 624 laſſen ſich durch 13 theilen.
143 = 627 = = = = 11 =
147 = 623 = = = = 7 =
153 = 622 = = = = 17 =
161 = 621 = = = = 23 =
161 = 630 wiederum durch 7 theilen.

Und da man leicht ſieht, daß ſchon das Product aus 7, 11, 13, 17, 23 die Zahl 391391 geben wird, wie es dieſelbe auch wirklich giebt; ſo ſind die einfachſten Factoren dieſer Zahl ſämtlich gefunden. Da übrigens ſo viele kleine Factoren ebenfalls viele nicht gar groſſe Producte haben, ſo kann es nicht fehlen, daß nicht auch von dieſen die Multipla bald vorkommen ſolten. Wir wollen zu dieſem Ende die Tabelle um etwas weiter fortſetzen:

621	161	8	630
620	171	10	631
619	183	12	632
618	197	14	633
617	213	16	634
616	231	18	635
615	251	20	636
614	273	22	637
613	297	24	638
612	323	26	639
611	351	28	640
610	381	30	641
609	413	32	642
608	447	34	643
607	483	36	644
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Hier findet ſich nun bereits, daß

231 und 616 durch 77 oder 7 mal 11,
273 = 637 = = 91 = 7 = 13,
483 = 644 = = 161 = 7 = 23,

und auſſer dem wiederum

297 und 638 durch 11,
323 = 639 = = 17,
413 = 609 = = 7 theilbar ſind.

§. 20.

So giebt es auch ſehr håufig ſolche Fålle, wo die Theiler unter den Ueberreſten ſo gleich ſelbſt zum Vorſchein kommen. Denn man ſieht leicht, daß dieſes in erſt angefůhrtem Beyſpiele ſchlechthin nur deswegen nicht geſchehen, weil

weil die erſten Ueberreſte an ſich ſchon viel gröſſer als die Theiler waren. So z. E. iſt

$$35351 = (188)^2 + 7$$

demnach

A	B	C	D
188	7		188
187	8	1	189
186	11	3	190
185	16	5	191
184	23	7	192

Hier findet ſich nun ſchon 184 = 8 . 23: ſo, daß demnach 23 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 35351 iſt. Wenn man aber auch weiter fortfährt,

183	32	9	193
182	43	11	194
181	56	13	195
180	71	15	196
179	88	17	197
178	107	19	198
177	128	21	199
176	151	23	200
175	176	25	201
175	1		202
174	29	28	203

ſo kömmt man auf 174 = 6 . 29, ſo, daß demnach auch 29 ein Theiler von 35351 iſt. Da man nun voraus ſehen kann, daß der dritte Theiler 53 ſeyn müſſe, ſo darf man nur noch ein wenig die Rechnung forſetzen, um auf den

Quotienten 212 = 4. 53, oder auf den Theiler A = 159 = 3. 59 zu kommen. Es iſt

173	59	30	204
172	91	32	205
171	125	34	206
170	161	36	207
169	199	38	208
169	30		209
168	71	41	210
167	114	43	211
166	159	45	212
165	206	47	213
165	41		214
164	91	50	215
163	143	52	216
162	197	54	217
162	35		218
161	92	57	219
160	151	59	220
159	212	61	221
159	53		222.

Hier kömmt demnach der dritte Factor 53 zum Vorſchein.

§. 21.

Es giebt aber auch Fälle, wo man die Rechnung beynahe eben ſo weit fortſetzen muß, um die Theiler zu finden, als wenn die Zahl eine Primzahl wäre. Dahin gehört z. E. die Zahl 10001, welche $= (100)^2 + 1$ iſt. Man hat

hat demnach

A	B	C	D
100	1		100
99	2	1	101
98	5	3	102
97	10	5	103
96	17	7	104
95	26	9	105
94	37	11	106
93	50	13	107
92	65	15	108
91	82	17	109
90	101	19	110
90	11		111
89	33	22	112
88	57	24	113
87	83	26	114
86	111	28	115
86	25		116
85	56	31	117
84	89	33	118
84	5		119
83	41	36	120
82	79	38	121
81	119	40	122

A	B	C	D
81	38		123
80	81	43	124
80	1		125
79	47	46	126
78	95	48	127
78	17		128
77	68	51	129
76	121	53	130
76	45		131
75	101	56	132
75	26		133
74	85	59	134
74	11		135
73	73	62	136
73	0		137
72	65	65	138
71	132	67	139
71	61		140
70	131	70	141
70	61		142

Hier fande ſich demnach bis auf A = 73 kein Ueberreſt B, welcher mit ſeinem Theiler, oder mit ſeinem Quotienten commenſurabel geweſen wäre. Bey A = 73, wird B = 0, und dem-

nach iſt 10001 = 73 . 137. Und dieſe Factoren müſſen Primzahlen ſeyn.

§. 22.

Wir können nun noch zugleich anmerken, daß wenn man eine ſolche Tabelle für eine Zahl bis dahin berechnet hat, wo der Quotient doppelt ſo groß wird, als der Theiler, eine ſolche Tabelle zugleich auch für Zahlen dienen kann, die um einige Einheiten, oder auch um mehrere gröſſer oder kleiner ſind als die Zahl, für welche die Tabelle iſt berechnet worden. So z. E. wenn die Theiler der Zahl 10003 zu finden ſind; ſo werden in der erſt für die Zahl 10001 berechneten Tabelle, alle Ueberreſte B um 2 gröſſer. Alles Uebrige bleibt. Man ſieht ſodann bald, daß z. E. der dritte Ueberreſt 5 ſich in 5 + 2 = 7 verwandelt, und daß der dabey ſtehende Theiler A = 98 durch 7 getheilet werden kann, folglich 7 ein Theiler von 10003 iſt. Vergleicht man die ſämtlichen Ueberreſte, jeder um 2 vergröſſert, mit ihren Theilern und Quotienten, ſo findet man ſie nur in denen Stellen commenſurabel, wo ſie Multipla von 7 ſind, und daraus läßt ſich folgern, daß $\frac{10003}{7}$ = 1429 eine Primzahl ſey.

§. 23.

Hätte man hingegen die Zahl 10005 vorgenommen, von welcher man zwar ohnehin ſiehet, daß ſie wenigſtens durch 5 und 3 getheilt werden kann; ſo würden alle Ueberreſte um 4 vergröſſert werden müſſen. Dieſes verwandelt den Ueberreſt 83 in 83 + 4 = 87, ſo, daß er dem Theiler gleich wird. Demnach läßt ſich 10005 durch 87 theilen. Eben ſo wird der Ueberreſt 111 in 111 + 4 = 115 verwandelt, und daher dem Quotienten gleich. Daher iſt auch 115 ein Theiler von 10005. Mehr hat man nicht nöthig zu ſuchen, weil 10005 = 87. 115 = 3. 5. 23. 29 iſt. Nimmt man eben dieſe Vergleichung mit 10007 vor, in dem man zu jeden Ueberreſten 6 addirt; ſo findet ſich keiner weder mit ſeinem Theiler noch mit dem Quotienten commenſurabel, demnach iſt 10007 eine Primzahl.

II.

Vorſchlag
die Theiler der Zahlen in Tabellen zu bringen.

§. 1.

Die vorhergehende Abhandlung enthält zwar einige Methoden, wodurch die Theiler der Zahlen mit leichter Mühe gefunden werden können. Wenn ſich aber auch noch kürzere Methoden finden lieſſen, ſo werden dennoch ſolche Tabellen, worinne die Zahlen bereits in ihre Factoren aufgelöſt ſind, immer angenehm ſeyn, weil ſie weiter nichts als das bloſſe Aufſchlagen fordern. Man hat aus gleichem Grunde unzählige andere Tabellen, z. E. die von Quadrat und Cubiczahlen, die trigonometriſchen und logarithmiſchen, die aſtronomiſchen ꝛc. bey allen war die Bequemlichkeit des Gebrauches ein zureichender Grund, warum man ſich Zeit und Mühe, ſie ein für allemale zu berechnen, nicht hat verdrieſſen laſſen.

§. 2.

Nun hat es zwar an Tabellen, in Abſicht auf die Theiler der Zahlen, eben nicht ganz gefehlt. Sie ſind aber lange nicht ſo bekannt wor-

worden, als ſie es hätten werden ſollen, und es trug ſich ſogar dabey zu, daß ſie mehrmalen ganz von neuem berechnet worden. So z. E. wuſte Poetius, daß dergleichen bereits im vorigen Jahrhundert in England herausgekommen, und 1717 vom Herrn *de Traytorrens d'Yverdun* der Pariſiſchen Akademie ein Project von ſolchen Tabellen übergeben worden. Allein da ihm weiter nichts davon zu Geſichte kam, ſo berechnete er ſie von neuem, und gab ſie, wiewohl etwas abgekürzt, 1728 in ſeiner **Anleitung zur arithmetiſchen Wiſſenſchaft vermittelſt einer parallelen Algebra** heraus. Eben dieſes begegnete dem Peter Jäger mit ſeinen *Primzahlen*, die Krüger ſeinen **Gedanken über die Algebra** angehenkt. Selbſt Anjema, deſſen **Verzeichnis der Theiler aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000** nach ſeinem Tode 1767 in einem ziemlichen Quartbande zu Leyden herausgekommen, und ſeine Herausgeber ſcheinen von bereits vorhanden geweſenen Tabellen nichts gewuſt zu haben, da in der Vorrede das Werk als das erſte und einige in ſeiner Art angerühmet wird. Solche Erſcheinungen in der gelehrten Welt ſind um deſto merkwürdiger, weil unſtreitig die Tabellen von den Theilern der Zahlen eben ſo gemein ſeyn ſolten, als es die trigonometriſchen und logarithmiſchen ſind. Denn wer dieſe zu gebrauchen weiß, wird ganz gewiß auch jene brauchbar finden.

§. 3.

§. 3.

Es mögen indeſſen verſchiedene Urſachen ſeyn, warum die Tabellen von den Theilern der Zahlen weniger gemein ſind. Sowohl D. Pell in England, als Poetius in Teutſchland haben ſich begnügt, ſie ihren Anleitungen zur Algebra und Rechenkunſt einzuverleiben, anſtatt daß ſie beſonders hätten herausgegeben werden ſollen. Eben ſo finden ſie ſich in dem 2ten Bande des 1742 zu Leipzig herausgekommenen mathematiſchen Lexicons unter ſehr viel andern Tabellen. Anjema war demnach meines Wiſſens der erſte, der ſie vollſtändiger zu machen und beſonders herauszugeben gedachte. Da er aber durch den Todt an der Arbeit gehindert worden, ſo erſtrecken ſich ſeine Tabellen auch nur bis auf 10000. Und es iſt unſtreitig, daß wenn ſie eben ſo vollſtändig bis auf 100000 hätten fortgeſetzt werden ſollen, das Werk zu einem ungeheuren Folianten angewachſen wäre, und vielleicht ſodann keinen Verleger würde gefunden haben.

§. 4.

Es läßt ſich aber ein ſolcher Foliant ganz bequem auf 10 Folioſeiten abkürzen, wenn man ſich mit dem nöthigſten begnügen und auf die ſchicklichſte Einrichtung denken will. Anjema hat ſeine Tafeln dadurch ſehr weitläuftig gemacht, daß er alle Zahlen von 1 bis 10000 mitgenommen, und alle Theiler aufgezeichnet hat.

hat. Da es aber überhaupt genug iſt, wenn man die eigentlichen Factoren einer Zahl weiß, weil aus dieſen alle übrige Theiler leicht gefunden werden; ſo ſieht man ohne Mühe, daß dadurch eine beträchtliche Abkürzung der Tafeln erhalten werden kann.

§. 5.

Zu dieſer Abkürzung kömmt noch eine andere, welche man erhält, wenn aus der Tafel alle die Zahlen wegbleiben, die ſich durch 2, 3, oder 5 theilen laſſen. Denn ſolche Zahlen laſſen ſich ohne Mühe erkennen. Und werden ſie, ſo vielmal es angeht, durch 2, 3, 5 getheilt, ſo iſt es immer genug, wenn man aus der Tabelle ſehen kann, ob der letzte Quotient noch ferners in Factoren zerfällt werden kann.

§. 6.

Auf dieſe Art aber werden von 30 Zahlen nur 8 beybehalten, ſo, daß man für 30000 Zahlen nicht mehr Raum gebraucht, als man ſonſt nur für 8000 würde gebraucht haben. Denn da 30 die kleinſte Zahl iſt, die ſich durch 2, 3, 5 theilen läßt, ſo folgt, daß jede Zahl die durch 30 getheilt, entweder 0, oder einen durch 2, 3, 5 thielbaren Reſt übrig läßt, ebenfalls durch 2, 3, 5 getheilt werden kann; und hinwiederum daß auch letzteres nicht angeht, wenn erſteres nicht ſtatt findet. Nun findet dieſes nur in denen Fällen nicht ſtatt, wo eine Zahl,

wenn

wenn ſie durch 30 getheilt wird, eine der Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 zum Reſte läßt. Und ſo hat man auch nur unter jeden 30 Zahlen dieſe achterley Fälle beyzubehalten.

§. 7.

Es verurſacht aber die decimale Einrichtung des Zahlengebäudes, daß man anſtatt 30 zum Grunde zu legen, bequemer 300 zum Grunde legt, und daher nur die Zahlen beybehält, welche, wenn ſie durch 300 getheilt werden, eine von folgenden Zahlen

1	31	61	91	121	151	181	211	241	271
7	37	67	97	127	157	187	217	247	277
11	41	71	101	131	161	191	221	251	281
13	43	73	103	133	163	193	223	253	283
17	47	77	107	137	167	197	227	257	287
19	49	79	109	139	169	199	229	259	289
23	53	83	113	143	173	203	233	263	293
29	59	89	119	149	179	209	239	269	299

zum Ueberreſte haben. Dieſe ſind es allein, welche ſich durch 2, 3, 5 nicht theilen laſſen.

§. 8.

Dieſe Ueberreſte zeigen nun ebenfalls an, in welcher Ordnung die beyzubehaltende Zahlen, in Abſicht auf ihre zwo letzte Ziffern, auf einander folgen, weil dieſe Ordnung, ſo oft man um 300 weiter ſchreitet, allemal wiederkehrt. Es wird ſich nun hieraus begreiflich machen laſſen, wie es möglich geweſen, den ganzen Anjema-

ſchen

ſchen Quartband auf die beygefügte Folioſeite abzukürzen.

§. 9.

Denn einmal war es genug, die zwo letzte Ziffern erſt angeführter Ueberreſte (§. 7.) in der vorderſten Columne herunter zu ſchreiben, und an den zwo Stellen, wo ein neues hundert anfängt, einen Zwiſchenraum zu laſſen, in welchem der Queere nach die ganzen hunderte hintereinander, und zwar jedes über ſeine Columne, geſchrieben werden konnten. Dadurch, und wegen des nach den 3000 und 6000 herunterlauffenden Zwiſchenraumes findet ſich die Tabelle in 9 Quadrate eingetheilt, und dadurch erhielt die Tabelle theils eine beſſere Geſtalt, theils auch wurde dadurch das Aufſuchen erleichtert. Man ſieht leicht, daß die Theiler jeder Zahl da zu ſuchen ſind, wo man von den hunderten herunterwärts, und von den Ueberreſten in der erſten Columne des Quadrats, über welchen die hunderter ſtehen, hinterwerts fährt, bis man zuſammen trift.

§. 10.

So z. E. wenn die Zahl 4361 fürgegeben, ſo findet ſich 4300 über der vierten Columne des mittlern Quadrats. Fährt man demnach von 4300 herunterwerts, und von 61 hinterwerts, ſo trift man da zuſammen, wo die Zahlen 7. 7. 89 ſtehen. Und dieſes ſind die Factoren, aus deren Multiplication die Zahl 4361 erwächſt.

§. 11.

§. 11.

Trift es ſich bey ſolchen Aufſuchen, daß man auf eine leere Stelle kömmt, ſo iſt dieſes eine Anzeige, daß die aufgeſuchte Zahl eine Primzahl iſt. So z. E. wenn man 4363 aufgeſucht hätte, ſo würde man auf die leere Stelle gefallen ſeyn, welche unmittelbar unter den für 4361 gefundenen Factoren 7. 7. 81 ſteht.

§. 12.

Trift man aber eine Zahl bey dem Aufſuchen gar nicht an; ſo kann man ſchlieſſen, daß ſie durch 2, 3 oder 5 getheilt werden kann. So z. E. wenn man (um bey gleicher Columne zu bleiben) die Zahl 4371 hätte aufſuchen wollen, ſo würde man in der Columne der Ueberreſte die zwo letzten Ziffern 71 nicht gefunden haben. Da nun 4371 weder gerade iſt, noch zur letzten Ziffer eine 0 oder 5 hat, ſo bleibt nur, daß ſie durch 3 getheilt werden kann. Nimmt man die Theilung vor; ſo erhält man den Quotient 1457, welcher unter 1400 und hinter 57 aufgeſucht, auf die Factoren 31, 47 verweiſet, ſo, daß demnach die Factoren der Zahl 4371 die Zahlen 3, 31, 47 ſind.

§. 13.

Da nun die Tabelle ſich bis auf 10199 oder 10200 erſtreckt, ſo ſieht man, daß man dadurch die Theiler der Zahlen von 1 bis auf 10200 nebſt den Primzahlen auf eine ſehr

geſchmei-

geſchmeidige Art beyſammen hat, und ſie gleichſam mit einem Anblicke überſehen kann. Auch hat man bey dem Aufſuchen nicht nöthig lange zu blättern, weil ſowohl die hunderter als die zwo letzte Ziffern jeder fürgegebenen Zahl gleich in die Augen fallen.

§. 14.

Ungeachtet ſich nun die Tabelle nur bis auf 10200 erſtreckt, ſo dient ſie doch auch für gröſſere Zahlen, die, wenn ſie durch 2, 3, 5 können getheilt werden, ſich ſo weit herunter bringen laſſen, daß der letzte Quotient kleiner als 10200 iſt. Da dieſes aber nicht mit jeden gröſſern Zahlen angeht, ſo werde ich auch den Vortheil nicht mehr erheben, als er es verdient.

§. 15.

Vielmehr werde ich anmerken, daß ich die Tabelle vorzüglich deswegen durch den Druck bekannt mache, daß etwann jemand durch die ſo geſchmeidige Einrichtung derſelben ſich bewegen laſſe, noch 9 andere, oder wenn er ſich einen recht unſterblichen Namen machen will, noch 99 andere beyzufügen. Denn ſo würde man im letztern Fall, auf die geſchmeidigſte Art, die nur immer möglich iſt, die Theiler jeder Zahlen haben die unter einer Million, oder unter 1020000 ſind, und das wäre doch immer genug. Im erſtern Fall hätte man ſie bis auf 102000, und man würde immer 10 mal weiter

damit reichen, als mit der gegenwärtigen, die nur bis auf 10200 geht.

§. 16.

Da es aber ſchwerlich zu hoffen ſteht, daß zu dieſer Tabelle noch 99 andere hinzugerechnet werden, wiewohl die Arbeit weder ſo groß, noch ſo weitläuftig ſeyn würde, als ſie es bey den trigonometriſchen Tafeln war, ſo werde ich es bey den 102000 bewenden laſſen, und nun noch angeben, wie die Berechnung merklich erleichtert werden könne.

§. 17.

Die Quadratwurzel von 102000 iſt etwas weniger als 320, demnach wenn eine Zahl, die kleiner als 102000 iſt Theiler hat, ſo hat ſie nothwendig einen Theiler der kleiner als 320 iſt.

§. 18.

Da ferners die durch 2, 3, 5 theilbare Zahlen wegbleiben, ſo iſt 7 die kleinſte Primzahl die unter den Factoren vorkömmt. Theilt man demnach 102000 durch 7, ſo iſt der Quotient 14571. Und ſo iſt es zu Verfertigung der Tabelle genug, wenn man die Primzahlen bis auf 14571 weiß. Denn gröſſere kommen unter den Factoren nicht vor, wenn die Tabelle nur bis auf 102000 fortgeſetzt wird.

§. 19.

Theilt man ferners 10200 durch 7, ſo iſt der Quotient 1457. Und hieraus folgt, daß alle durch 2, 3, 5 nicht theilbare Zahlen, die zwiſchen 1457 und 14571 fallen, durch 7 müſſen multiplicirt werden. Dieſe Zahlen wären nun ſämtlich in der Tafel enthalten, wenn ſie bereits bis auf 14571 fortgeſetzt wäre. Da ſie ſich nun vorerſt auf eben die Art bis dahin fortſetzen läßt, wie ſie ſodann bis auf 102000 fortgeſetzt wird; ſo werde ich annehmen, daß ſie bereits bis auf 14571 fortgeſetzt ſey. Denn ſo wie ſie iſt, läßt ſie ſich bis auf 7 mal 10200, oder 71400, und von da an bis auf 71400 mal 7, oder 499800 fortſetzen.

§. 20.

Nun iſt vor allen Dingen nöthig, daß, ſo weit man die Tafel fortſetzen will, man die Eintheilung in Quadrate und Columnen gleich anfangs mache, und die hunderter und die zwo letzte Ziffern auf eben die Art, wie in der hier vorgelegten Tabelle hinſchreibe, damit ſodann die Factoren ſogleich können an ihren Ort eingetragen werden.

§. 21.

So z. E. um die Columne von 40000 bis 40100 auszufüllen, werden die in der Tafel vorkommende Zahlen von 7 an bis zu der Quadratwurzel von 40100 gebraucht. Man theilt

40000 durch 7, ſo iſt der Quotient $5714\frac{2}{7}$. Die nächſt gröſſere Zahlen in der Tafel ſind nebſt ihren Factoren

5717
5719 = 7. 19. 43
5723 = 59. 97
5729 = 17. 337 ꝛc.

dieſe mit 7 multiplicirt, geben nun

40019 = 7. 5717
40033 = 7. 7. 19. 43
40061 = 7. 59. 97
40103 = 7. 17. 337 ꝛc.

An die Stelle von dieſen Producten werden nun die neben denſelben ſtehenden Factoren eingetragen. Sodann verfährt man eben ſo mit 11 als der nächſt gröſſern Zahl. Denn 40000 durch 11 getheilt, giebt $3636\frac{4}{11}$. Die nächſt gröſſere Zahlen in der Tafel ſind nebſt ihren Factoren

3637
3641 = 11. 331
3643
3647 = 7. 521 ꝛc.

dieſe durch 11 multiplicirt, geben

40007 = 11. 3637
40051 = 11. 11. 331
40073 = 11. 3643
40117 = 7. 11. 521 ꝛc.

Eben ſo verfährt man auch mit 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 ꝛc. das will ſagen,

ſagen, mit allen Primzahlen bis zu der Quadratwurzel von 40100, wenn man nemlich nur bis auf dieſe Zahl die Tafel ausfüllen will. Man füllt ſie aber, wie vorhin geſagt, entweder nur bis auf 14571, oder auch gar bis auf 71400, und ſodann vollends bis auf 102000 aus. Die Stellen, die zuletzt unausgefüllt bleiben, ſind die von Primzahlen.

§. 22.

Auf die erſt beſchriebene Art habe ich die Tafel von 10000 bis auf 10200 ausgefüllt, nachdem ich das übrige aus des *Poëtii* anatomia numerorum genommen, und zugleich in die 20 Druck- und Rechenfehler verbeſſert, die ich wegen der Einrichtung der hier beygefügten Tafel, leicht entdecken konnte.

III.
Verwandlung der Brüche.

§. 1.

Man trägt gemeiniglich die Brüche ſo vor, daß ſowohl der Zähler als der Nenner ganze Zahlen ſind, weil dieſes die eigentliche Abſicht der Brüche iſt, daß man die Verhältniß des Theils zum Ganzen durch die Verhältniß zwoer ganzer Zahlen vorſtelle. Der Nenner zeigt an, in wie viele Theile man das Ganze theilen müſſe, und der Zähler drücket die Anzahl ſolcher Theile aus, die man zu nehmen hat. Indeſſen kann es auch Fälle geben, wo der Nenner oder der Zähler, oder beyde zugleich ebenfalls wiederum Brüche haben, und ſolche kann man ſehr gut gebrauchen, weil ſie zu beſondern Abſichten dienen, denen zu gefallen man auch öfters ganz reine Brüche in ſolche verwandelt, deren Nenner ſelbſt wiederum mit Brüchen behaftet ſind.

§. 2.

Nun kommen zwar die Regeln, ſo man bey ſolchen Verwandlungen zu beobachten hat, bereits in verſchiedenen Schriften der Mathematicker vor. Da ſie aber theils noch häufiger und ſelbſt in den gemeinen Anweiſungen zur

Rechen-

Rechenkunſt vorkommen ſolten, theils auch verſchiedenes dabey nachzuholen iſt; ſo werde ich den meiſten Leſern einen Gefallen erweiſen, wenn ich mich hier ſowohl bey den Regeln als bey deren Gebrauch ein wenig aufhalte.

§. 3.

Man habe z. E. 3 durch $5\frac{1}{7}$ zu theilen, ſo kann dieſes in Form eines Bruches geſchrieben werden, welcher

$$\frac{3}{5\frac{1}{7}} \text{ oder } \frac{3}{5+\frac{1}{7}}$$

ſeyn wird. Dieſer Bruch läßt ſich nun leicht in einen reinen Bruch verwandeln, wenn man Nenner und Zähler mit 7 multiplicirt. Denn ſo iſt $7 \cdot 3 = 21$, und $7 \cdot 5\frac{1}{7} = 36$, folglich

$$\frac{3}{5+\frac{1}{7}} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

§. 4.

Hinwiederum wenn man z. E. $\frac{7}{30}$ vor ſich hat, ſo kann man Zähler und Nenner durch 7 theilen, und da erhält man

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{4+\frac{2}{7}}.$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas kleiner als $\frac{1}{4}$ ſey. Nun läßt ſich $\frac{2}{7}$, wenn Zähler und Nenner durch 2 getheilt werden, ebenfalls in

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

verwandeln, und ſo erhålt man

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas weniges grőſſer als $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ oder $\frac{2}{9}$ iſt. (§. 3.)

§. 5.

Man habe nun z. E. $\frac{216}{1147}$, ſo theilt man erſtlich Zähler und Nenner durch 216, und dieſes giebt

$$\frac{216}{1174} \quad \frac{1}{5+\frac{67}{216}}$$

auf eine åhnliche Art erhålt man

$$\frac{67}{216} = \frac{1}{3+\frac{15}{67}} = \frac{1}{3+a}.$$

$$a = \frac{15}{67} = \frac{1}{4+\frac{7}{15}} = \frac{1}{4+b}$$

$$b = \frac{7}{15} = \frac{1}{2+\frac{1}{7}} = \frac{1}{2+c}$$

Da man nun nach dieſer vierten Theilung auf $\frac{1}{7}$ verfållt, ſo iſt man mit der Auflőſung des Bruchs fertig, und man findet, wenn man der Ordnung nach ſubſtituirt,

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}}}$$

Dieſes will nun ſagen, der Bruch $\frac{216}{1147}$ ſey etwas kleiner als $\frac{1}{5}$, etwas weniges gröſſer als $\frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{3}{16}$, etwas noch wenigeres kleiner als

$$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{5 + \frac{4}{13}} = \frac{13}{69}$$

etwas noch wenigeres gröſſer als

$$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \frac{2}{9}}} = \frac{1}{5 + \frac{9}{29}} = \frac{29}{154}$$

und genaue gleich $\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}}}$.

§. 6.

Hiebey kommen nun zwo Fragen vor: Einmal, wie man die ganze Rechnung nach einer gewiſſen Ordnung einrichten, und die Brüche $\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}$, als welche dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ immer näher kommen, leichte finden könne? Sodann wie man eben ſo leichte finden könne, um wie viel ſie von dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ verſchieden ſind, damit man allenfalls des Unterſchiedes Rechnung tragen könne?

§. 7.

Man ſetze erſtlich

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5+\frac{1}{3+a}}$$

wobey $a = \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{7}}}$ iſt, ſo darf man nur Zähler und Nenner mit $3+a$ multipliciren, und ſo erhält man

$$\frac{216}{1147} = \frac{3+a}{16+5a}.$$

Ferner

Ferner ſetze man $a = \frac{1}{4+b}$

wobey folglich $b = \frac{1}{2+\frac{1}{7}}$ iſt, ſo erhält man

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{3+\cfrac{1}{4+b}}{16+\cfrac{5}{4+b}}$$

und folglich, wenn Nenner und Zähler mit $4+b$ multiplicirt wird

$$\frac{216}{1147} = \frac{13+3b}{69+16b}.$$

Setzt man nun wiederum $b = \frac{1}{2+c}$

ſo iſt $c = \frac{1}{7}$, und man erhält

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{13+\cfrac{3}{2+c}}{69+\cfrac{16}{2+c}} = \frac{29+13c}{154+69c}.$$

Endlich da $c = \frac{1}{7}$ iſt, ſo wird

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{29+\cfrac{13}{7}}{154+\cfrac{69}{7}} = \frac{216}{1147}$$

welches wiederum den fürgegebenen Bruch giebt.

§. 8.

§. 8.

Dieſes Verfahren zeiget nun an, wie die Brüche $\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}$ aus den Theilern 5, 3, 4, 2, 7 entſpringen. Denn ſo iſt

$1.\ 3 = 3$	$5.3 + 1 = 16$
$3.4 + 1 = 13$	$16.4 + 3 = 69$
$13.2 + 3 = 29$	$69.2 + 16 = 154$
$29.7 + 13 = 216$	$154.7 + 69 = 1147.$

Man darf nemlich in den gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a}, \frac{13+3b}{69+16b}, \frac{29+13c}{154+69c}$$

nur $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{7}$ ſetzen, um die abſolute Zahlen des folgenden Bruches zu erhalten. Denn ſo iſt

$$\frac{3+\frac{1}{4}}{16+\frac{5}{4}} = \frac{13}{69}, \text{ und } \frac{13+\frac{2}{3}}{69+\frac{16}{2}} = \frac{29}{154}$$

$$\text{und } \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}.$$

§. 9.

Wenn wir nun die ganze Rechnung in ihre einfachſte Ordnung bringen, ſo läßt ſie ſich folgender geſtalt vorſtellen. Erſtlich dividiret man jeden Theiler durch ſeinen Ueberreſt. Demnach nun bey eben dem Beyſpiele zu bleiben

```
216 | 1147 | 5
    | 1080 |
    ------
       67  | 216 | 3
           | 201 |
           -----
             15 | 67 | 4
                | 60 |
                ----
                  7 | 15 | 2
                    | 14 |
                    ----
                      1 | 7 | 7.
                        | 7 |
                        ---
                         0
```

Mit dieſen Theilern, Ueberreſten und Quotienten macht man ſodann folgende Figur

1147		1	0
216	5	0	1
67	3	1	5
15	4	3	16
7	2	13	69
1	7	29	154
		216	1147

Man ſchreibt nemlich in der erſten Columne die Theiler und Ueberreſte, in der zweyten die Quotienten, in der dritten zeichnet man 1, 0, und in der vierten 0, 1. Die übrigen Zahlen dieſer beyden Columnen ergeben ſich ſodann, indem man

5. 0 + 1 = 1	und	5. 1 + 0 = 5
3. 1 + 0 = 3		3. 5 + 1 = 16
4. 3 + 1 = 13		4. 16 + 5 = 69
2. 13 + 3 = 29		2. 69 + 16 = 154
7. 29 + 13 = 216		7. 154 + 69 = 1147

macht,

macht, das will ſagen, jede Zahl der dritten und vierten Columne mit dem nebenſtehenden Quotienten der zweyten Columne multiplicirt, und zu dem Producte die nächſt über derſelben ſtehenden Zahl addirt. Nun geben die Zahlen der beyden letzten Columnen die Brüche

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}, \frac{216}{1147},$$

welche wechſelsweiſe gröſſer und kleiner ſind als der letzte, wovon aber je der folgende weniger verſchieden iſt.

§ 10.

Das bisher geſagte, kömmt bereits in mehren Schriften der Mathematicker vor, und dient überhaupt dahin, daß man einen durch gröſſere Zahlen ausgedrückten Bruch, der ſich nicht genau auf kleinere Zahlen bringen läßt, dergeſtalt auf kleinere Zahlen bringe, daß er durch keine kleinere genauer getroffen wird. Da man auf dieſe Art mehrentheils eine ganze Reyhe von Brüchen findet, wovon je der folgende genauer, dabey aber durch gröſſere Zahlen ausgedrückt iſt; ſo behält man dabey die Wahl, zu beſtimmen, ob man ſich mit einem kleinern begnügen könne, oder einen durch gröſſere Zahlen ausgedruckten dafür nehmen wolte. In phyſiſchen und practiſchen Dingen fällt dieſes deſto bequemer, weil man da ohnehin an keine geometriſche Schärfe gedencken kann.

§. 11.

§. 11.

Man iſt aber, ſo viel ich weiß, bey der Erfindung ſolcher Brüche ſtehen geblieben, ohne zu ſehen, ob nicht durch eben das Verfahren, die Genauigkeit eines jeden beſtimmt werden könnte? Die natürlichſte Probe, die ſich hierüber anſtellen läßt, und die uns zugleich auf die Spuhr führen wird, iſt, daß man nach der gewöhnlichen Art die Brüche zu ſubtrahiren, dieſe Subtraction vornehme. Denn ſo findet man

$$\frac{1}{5} - \frac{216}{1147} = \frac{1147 - 1080}{5 \cdot 1147} = \frac{67}{5 \cdot 1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{3}{16} = \frac{15}{16 \cdot 1147}$$

$$\frac{13}{69} - \frac{216}{1147} = \frac{7}{69 \cdot 1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{29}{154} = \frac{1}{154 \cdot 1147}.$$

Und hieraus ſieht man, daß die Zähler dieſer Brüche 67, 15, 7, 1 der Ordnung nach die Ueberreſte der erſten Columne, die Nenner aber das Product aus dem Nenner eines jeden Bruches und dem Nenner 1147 des fürgegebenen Bruches ſind. Auf dieſe Art wird demnach der fürgegebene Bruch in zween aufgelöſt, und es iſt

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5} - \frac{76}{5 \cdot 1147} = \frac{3}{16} + \frac{15}{16 \cdot 1147} = \frac{13}{69} - \frac{7}{69 \cdot 1147}$$

$$= \frac{29}{153} + \frac{1}{154 \cdot 1147} = \frac{216}{1147} + 0.$$

§. 12.

§. 12.

Um nun überhaupt einzuſehen, wie dieſe Ueberreſte der erſten Columne hier zum Vorſchein kommen, dörfen wir nur anſtatt die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{13}{69}$, $\frac{29}{154}$ von dem Bruche $\frac{216}{1147}$ abzuziehen, dieſelben von den vorhin (§. 7.) gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a},\ \frac{13+3b}{69+16b},\ \frac{29+13c}{154+69c}$$

abziehen. Denn dieſe ſtellen ſämtlich den Bruch $\frac{216}{1147}$ vor, und es iſt aus dem (§. 5.) zu ſehen, daß die Buchſtaben a, b, c durch die Ueberreſte 67, 15, 7 beſtimmt werden. Auf dieſe Art haben wir demnach

$$+\frac{3+a}{16+5a}-\frac{3}{16}=\frac{a}{16(16+5a)}=\frac{15:67}{16(16+5\cdot\frac{15}{67})}$$

$$=\frac{15}{16.\ 1147}$$

$$-\frac{13+3b}{69+16b}+\frac{13}{69}=\frac{b}{69(69+16b)}=\frac{7:16}{69(69+16\cdot\frac{7}{16})}$$

$$=\frac{7}{69.\ 1147}$$

$$\frac{29+13c}{154+69c}-\frac{29}{154}=\frac{c}{154(154+69c)}$$

$$=\frac{1:7}{154(154+\frac{69}{7})}=\frac{1}{154.\ 1147}.$$

Und hieraus ſieht man, wie die Ueberreſte der erſten Columne zu Nennern werden.

§. 13.

§. 13.

Wenn man die Brüche

$$\frac{1}{5},\ \frac{3}{16},\ \frac{13}{69},\ \frac{29}{154},\ \frac{216}{1147}$$

umkehrt, und ſtatt derſelben

$$\frac{5}{1},\ \frac{16}{3},\ \frac{69}{13},\ \frac{154}{29},\ \frac{1147}{216}$$

nimmt, ſo findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{1147}{216} = \frac{5}{1} + \frac{67}{1.\,216} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3.\,216} = \frac{69}{13} + \frac{7}{13.\,260}$$

$$= \frac{154}{29} - \frac{1}{29.\,216} = \frac{1147}{216} + 0,$$ wo ebenfalls die Ueberreſte 67, 15, 7, 1 als Zähler erſcheinen.

§. 14.

Wir haben bisher das ganze Verfahren, in Form eines Beyſpieles vorgetragen, doch ſo, daß ſich der Grund deſſelben zugleich mit einſehen läßt. Berechnet man auf dieſe Art noch mehrere Beyſpiele, ſo wird man leicht finden, daß man bald mehr, bald minder Diviſionen vorzunehmen hat, bis der Bruch ganz aufgelöſt iſt. Wir wollen, um den Unterſchied zu zeigen, die Figur von zwey andern Beyſpielen herſtellen, welche die Brüche

$$\frac{61}{97} \text{ und } \frac{231}{257}$$

betreffen. Es iſt folglich

97		1	0
61	1 ——	0	1
36	1 ——	1	1
25	1 ——	1	2
11	2 ——	2	3
3	3 ——	5	8
2	1 ——	17	27
1	2	22	35
—		61	97

257		1	0
231	1 ——	0	1
26	8 ——	1	1
23	1 ——	8	9
3	7 ——	9	10
2	1 ——	71	79
1	2 ——	80	89
—		231	257

und daher für das erſte Beyſpiel

$$\frac{61}{97}=\frac{1}{1}-\frac{36}{1.97}=\frac{1}{2}+\frac{25}{2.97}=\frac{2}{3}-\frac{11}{3.97}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8.97}=\frac{17}{27}-\frac{2}{27.97}=\frac{22}{35}+\frac{1}{35.97}$$

$$=\frac{61}{97}-0,$$

oder umgekehrt

$$\frac{97}{61}=\frac{1}{1}+\frac{36}{1.61}=\frac{2}{1}-\frac{25}{1.61}=\frac{3}{2}+\frac{11}{2.61}$$

$$=\frac{8}{5}-\frac{3}{5.61}=\frac{27}{17}+\frac{2}{17.61}=\frac{35}{22}-\frac{1}{22.61}$$

$$=\frac{97}{61}+0.$$

Für das andere Beyſpiel

$$\frac{231}{257}=\frac{1}{1}-\frac{26}{1.257}=\frac{8}{9}+\frac{23}{9.257}=\frac{9}{10}-\frac{3}{10.257}$$

$$=\frac{71}{79}+\frac{2}{79.257}=\frac{80}{89}-\frac{1}{89.259}=\frac{231}{257}+0,$$

oder umgekehrt $\frac{257}{231}$

$$\frac{257}{231}=\frac{1}{1}+\frac{26}{1.231}=\frac{9}{8}-\frac{23}{8.231}=\frac{10}{9}+\frac{3}{9.231}$$
$$=\frac{79}{71}-\frac{2}{71.257}=\frac{89}{80}+\frac{1}{80.231}=\frac{257}{231}-0.$$

§. 15.

Es iſt aber eben dieſe immer verſchiedene Anzahl der vorzunehmenden Diviſionen, welche den algemeinen Beweis ſchwerer macht, weil man dabey genöthiget wird, Glied für Glied zu beweiſen, und die Anzahl der Diviſionen unbeſtimmt laſſen muß. Wir werden dieſen Beweis folgendergeſtalt vortragen: Es ſey die allgemeine Figur

A		1	0
B	a ——	0	1
C	b ——	1	a
D	c ——	b	ab + 1
E	d ——	bc + 1	abc + c + a
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.
- -	- - - - - - -		- - - - - -
O	——	x	v
P	q	y	w
Q		qy + x	qw + v

ſo iſt überhaupt $Pq + Q = O$, weil O durch P dividirt q giebt, und Q übrig läßt. Nun iſt zu beweiſen, daß, was von den Brüchen $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{w}$ gilt, auch von dem folgenden und daraus formirten Bruche $\frac{qy+x}{qw+v}$ gelte, oder, daß wenn

erſtere beyde die Gleichungen

$$+\frac{x}{v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{y}{w}+\frac{B}{A}=\frac{\pm P}{Aw}$$

geben, der dritte auf eben die Art die Gleichung

$$+\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

geben werden. Um dieſes zu beweiſen, haben wir weiter nichts zu thun, als die in dieſen Gleichungen angezeigte Subtractionen vorzunehmen. Denn ſo verwandeln ſich die beyden erſtern in

$$\frac{Ax-Bv}{vA}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{Ay+Bw}{wA}=\frac{\pm P}{Aw}$$

Und hieraus folgt, daß

$$\pm O=+Ax-Bv$$

$$\pm P=-Ay+Bw$$

iſt. Nun aber iſt

$$\pm Q=O-Pq$$

demnach, wenn man die für O und P gefundene Werthe ſetzt,

$$\pm Q=Ax-Bv+Ayq-Bwq.$$

Eben dieſes folgt aber auch aus der dritten Gleichung

$$\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}.$$ Denn

Denn wird die Subtraction vorgenommen, ſo erhält man

$$\frac{qyA+Ax-qwB-vB}{A(qw+v)}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

demnach, mit Weglaſſung der Nenner

$$\pm Q = Ax - Bv + qyA - qwB,$$

welches eben die Gleichung iſt, die aus denen beyden erſtern folgte, und demnach das, was wir zu beweiſen hatten, an Tag legt. Wir haben demnach nur noch zu zeigen, daß dieſe beyden Gleichungen von den 2 erſten Gliedern der Figur

A	————	——
B	a ———— o	1
C	b ———— 1	a

gelten, denn ſo werden ſie auch von dem dritten, demnach von dem vierten, und jeden folgenden wahr ſeyn. Zu dieſem Ende haben wir nur

$P = B$	$q = a$	$x = o$	$v = 1$
$Q = C$		$y = 1$	$w = a$

zu ſetzen, ſo werden die Gleichungen

$$\pm O = +Ax - Bv$$
$$\pm P = -Ay + Bw$$

in folgende

$$\pm B = +A.o - B.1 = -B$$
$$\pm C = -A.1 + B.a$$

verwandelt. Erſtere iſt für ſich klar, letztere wird dadurch als richtig erkannt, weil A durch

B dividiret, a giebt, und C übrig läßt, demnach

$$C = A - Ba$$

iſt. Wir haben demnach

$$\frac{B}{A} = \frac{0}{1} + \frac{B}{A}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{C}{A(a)}$$

$$= \frac{b}{ab+1} + \frac{D}{A(ab+1)}$$

$$= \frac{bc+1}{abc+c+a} - \frac{E}{A(abc+c+a)}$$

$$= \&c.$$

$$= \frac{x}{v} \pm \frac{O}{Av}$$

$$= \frac{y}{w} \mp \frac{P}{Aw}$$

$$= \frac{qy+x}{qw+v} \pm \frac{Q}{A(qw+v)}$$

&c.

Nun ſind die Zähler B, C, D, E &c. O, P, Q der Ordnung nach kleiner, weil der letzte $= 0$ wird; hingegen aber die Nenner A, Aa, A(ab+1) &c. der Ordnung nach gröſſer, weil a, b, c &c. poſitiv und ganze Zahlen, demnach entweder $= 1$, und mehrentheils gröſſer als 1 ſind. Da folglich die Brüche $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{Aa}$, $\frac{D}{A(ab+1)}$ &c. ſehr merklich kleiner, und zuletzt $= 0$ werden, ſo ſind auch die

Brü-

Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{b}{ab+1}$, $\frac{bc+1}{abc+c+a}$ &c. von dem fürgegebenen $\frac{B}{A}$ der Ordnung nach weniger, und der letzte gar nicht davon verſchieden.

§. 16.

Wenn ein Bruch ſich in der That durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt, ſo erhält man nach dieſem Verfahren nicht nur den verkleinerten Bruch genau, ſondern auch noch alle noch kleinere, die von demſelben am wenigſten verſchieden ſind. Man habe z. E. $\frac{189}{301}$, ſo iſt

301		1	0
189	1 ———	0	1
112	1 ———	1	1
77	1 ———	1	2
35	2 ———	2	3
7	5 ———	5	8
		27	43

Demnach iſt

$$\frac{189}{301}-\frac{27}{43}=\frac{1}{2}+\frac{77}{2.\,301}-\frac{2}{3}-\frac{35}{3.\,301}-\frac{5}{8}+\frac{7}{8.\,301}$$

$$\text{oder} = \frac{1}{2}+\frac{11}{2.\,43}-\frac{2}{3}-\frac{5}{3.\,43}-\frac{5}{8}+\frac{1}{8.\,43}.$$

§. 17.

Man ſieht ferners auch leicht, daß beſonders Decimalreyhen auf dieſe Art in Brüche verwandelt werden können, die ſie ſo genau, als man es verlangt, vorſtellen. Doch da man ſolche Reyhen nicht ſo unendlich, wie ſie ſind, in die Rechnung ziehen kann, ſo nimmt man auch nur ſo viele Ziffern, als es nöthig iſt. Indeſſen kann man derer, ſo man wegläßt, dennoch in Rechnung tragen, damit man das Dividiren eben nicht weiter verfolge als es nöthig iſt. Und dabey hat man auf zweyerley Umſtände zu merken: Einmal findet man früher den Bruch, welcher die Decimalreihe, ſo weit man ſie verlangt, vorſtellt. Sodann häuft ſich bey dem fortgeſetzten Dividiren der Fehler, der aus dem weggelaſſenen Theile der Decimalreihe entſteht, und dieſes kann machen, daß man zuletzt ganz andere Zahlen heraus bringt, als die, ſo man heraus bringen würde, wenn man die Reihe ganz in die Rechnung ziehen würde. Wir wollen beydes durch ein Beyſpiel erläutern. Es ſey das Verhältniß der Seite eines Quadrates zu der Diagonale deſſelben durch Brüche auszudrücken, welche daſſelbe ſehr genaue, oder beynahe ganz richtig ausdrücken. Nun weiß man, daß, wenn die Seite $= 1$ iſt, die Diagonale $= \sqrt{2} = 1,4142135530202722\ldots$ iſt. Wir wollen uns hier mit den 7 erſten Decimalzahlen 1, 4142135 begnügen, und den Ueberreſt $= a$ ſetzen; demnach iſt

1,

1,4142135 + a			1	0
1,0000000		1	0	1
4142135 + a		2	1	1
1715730 —	2a	2	2	3
710675 +	5a	2	5	7
294380 —	12a	2	12	17
121915 +	29a	2	29	41
50550 —	70a	2	70	99
20815 +	169a	2	169	239
8920 —	408a	2	408	577
2975 +	985a	2	985	1393
2970 —	2378a			

Man ſieht hieraus, daß der von dem Ueberreſt a herrührende Unterſchied anfängt beträchtlich groß zu werden, und daß man folglich, ohne mehrere Ziffern mitzunehmen, die Diviſion nicht weiter fortſetzen müſſe. Da nun

$$\frac{17}{12} = 1,4166\ldots$$

$$\frac{41}{29} = 1,41379\ldots$$

$$\frac{99}{70} = 1,41428\ldots$$

$$\frac{239}{169} = 1,414207\ldots$$

$$\frac{577}{408} = 1,414215$$

$$\frac{1393}{985} = 1,4142132$$

iſt, ſo ſieht man hieraus, daß, wenn man bey

den 7 angenommenen Decimalziffern bleiben will, der letzte Bruch eben ſo weit reicht, und daher auch aus dieſem Grunde das fernere Dividiren überflüßig wird.

§. 18.

Um noch ein Beyſpiel anzuführen, welches nicht ſo regulär iſt, wie das erſt angebrachte; ſo ſetzen wir, der Mond durchlaufe den Thierkreis in 27 T. 7 St. 43 M. 5'', 2''', $58\frac{1}{2}^{IV}$. Dieſes giebt in Decimaltheilen 27, 32158601 Tage. Um nun zu ſehen, wie ſich dieſe Zahl zu ganzen Tagen verhalte, ſo iſt

27, 32158601 + a	1	0
1, 00000000	27 — 0	1
32158601 + a	3 — 1	27
3524197 — 3a	9 — 3	82
440828 + 28a	7 — 28	765
438401 — 199a	1 — 199	5437
12427 + 227a	35 — 227	6202.
3456		

Weiter iſt nun die Diviſion nicht fortzuſetzen, weil ſich der von a herrührende Unterſchied zu ſehr aufhäufen, und die Quotienten unrichtig machen würde. Nehmen wir demnach den letzten Bruch $\frac{6202}{227}$, ſo will dieſer ſagen, daß in 6202 Tagen der Mond 227 mal den Thierkreis durchlaufe, und dieſes iſt nun ſehr genaue. Denn wird 6202 durch 227 getheilt, ſo findet man

man 27 T. 7 St. 43 M. 5″. 1‴. 19⁗, welches von der wahren Zeit kaum um $1\frac{2}{3}$ Tertien verſchieden iſt, und folglich für die 6202 Tage kaum $6\frac{1}{3}$ Secunden Unterſchied giebt. Hingegen giebt der Bruch $\frac{765}{28}$ die Zeit von 27 T. 7 St. 42 M. $51\frac{1}{2}$ Sec. welche um $13\frac{3}{5}$ Secunden zu klein iſt. Dieſer Unterſchied iſt beträchtlicher als der vorhergehende; indeſſen iſt er für einen Uhrmacher, der den Mondlauf durch Räderwerke vorſtellen wolte, unerheblich genug, um ſo mehr, da der Bruch $\frac{765}{28}$, welcher $= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}{4 \cdot 7}$ iſt, durch dieſe ſchickliche Zerfällung der Zahlen, zu der Eintheilung der Räder ſehr bequem iſt, und weil man die Uhr erſt nach etwann 5 Umlaufszeiten des Mondes um 1 Minute zu verrücken hat.

§. 19.

Man kann auf eine ganz ähnliche Art algebraiſche Ausdrücke, und beſonders unendliche Reihen in Brüche verwandeln, ungeachtet ſich dabey nicht immer die Schicklichkeit einfindet, daß ſolche Brüche dem wahren Werthe geſchwinde näher kämen. Ich werde indeſſen die zwey Beyſpiele herſetzen, mit denen ich hierüber eine Probe angeſtellt habe. Das erſte betrift die Logarithmen. Denn da iſt $\log.(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \text{rc.}$

Wird

Wird dieſe Reihe in 1 getheilt, ſo iſt der Quotient $= \frac{1}{z}$, der Ueberreſt $= + \frac{1}{2} z - \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{4} z^3 -$ ꝛc. Theilt man durch dieſen die Reihe $z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 -$ ꝛc. ſo iſt der Quotient $= 2$, der Ueberreſt $= \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{6} z^3 + \frac{3}{20} z^4$ ꝛc. Wird durch dieſen zweyten Ueberreſt der erſte $\frac{1}{2} z - \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{4} z^3 -$ ꝛc. getheilt, ſo iſt der Quotient $= \frac{3}{z}$, der Ueberreſt $= \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{5} z^3 +$ ꝛc. Theilt man durch dieſen dritten Ueberreſt den zweyten, ſo iſt der Quotient $= 1$, der vierte Ueberreſt $= \frac{1}{30} z^3 -$ ꝛc. wodurch man wiederum den dritten theilt, und dadurch $\frac{5}{z}$ zum Quotienten erhält. Fährt man auf dieſe Art fort, ſo wird man der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{z}, 2, \frac{3}{z}, 1, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}$ ꝛc. erhalten, und dieſe geben ſodann

$$\log.(1+z) = \cfrac{1}{1{:}z + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3{:}z + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5{:}z + \cfrac{1}{2{:}3 + \cfrac{1}{7{:}z + \cfrac{1}{\text{ꝛc.}}}}}}}}}$$

Es ſey z. E. $z = \frac{1}{5}$, ſo iſt

log.

$$\log.\tfrac{6}{5} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{2:3+\cfrac{1}{35+\text{rc.}}}}}}}}$$

Dieſes giebt demnach

	1	0
5	0	1
2	1	5
15	2	11
1	31	170
25	33	181
2:3	856	4695
35	$603\frac{2}{3}$	3311
rc.	$21984\frac{1}{3}$	120580

Nun iſt

$$1:5 = 0,20\ldots\ldots$$
$$2:11 = 0,1818\ldots\ldots$$
$$31:170 = 0,18235\ldots\ldots$$
$$33:181 = 0,1823204\ldots$$
$$856:4695 = 0,18232161\ldots$$
$$603\tfrac{2}{3}:3311 = 0,1823215544\ldots$$
$$21984\tfrac{1}{3}:120580 = 0,1823215569\ldots$$

Es iſt aber $\log.\frac{6}{5} = 0,18232155679395\ldots$ woraus man ſieht, daß dieſe Brüche noch ziemlich geſchwinde den wahren Werthe näher kommen. Wenn wir die Theilung mit der

Zahl

Zahl ſelbſt vornehmen, ſo fällt die Rechnung folgendermaſſen aus

1 0000000000		1	0
1823215568	5 ——	0	1
883922160	2 ——	1	5
55371248	15 ——	2	11
53353440	1 ——	31	170
2017808	25 ——	33	181
2908240			
ꝛc.			

woraus man ſieht, daß der letzte Quotient 25 hätte um 1 gröſſer ſeyn können. Läßt man denſelben aber ſo wie er iſt, ſo wird der folgende $= \frac{2}{3}$, und ſo kommen alle Quotienten heraus, die wir vermittelſt der unendlichen Reihe gefunden haben.

§. 20.

Setzt man $2 = 1$, in welchem Fall die Reihe ſelbſt ſehr wenig convergirt, ſo erhält man

$$\log.2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2:3+\cfrac{1}{7+ \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

und

und dieſes giebt

	1	0
1 ——	0	1
2 ——	1	1
3 ——	2	3
1 ——	7	10
5 ——	9	13
2:3 ——	52	75
7 ——	$43\frac{2}{3}$	63
ꝛc. —	$357\frac{2}{3}$	516

Nun iſt

$$\frac{7}{10} = 0,700 \ldots\ldots$$
$$\frac{9}{13} = 0,6923 \ldots\ldots$$
$$\frac{52}{75} = 0,6933 \ldots\ldots$$
$$\frac{131}{189} = 0,69312 \ldots\ldots$$
$$\frac{1073}{1548} = 0,693152 \ldots$$

ꝛc.

$$\log. 2 = 0,693147 \ldots$$

Man ſieht hieraus, daß auch in dieſem Fall die Brüche ſich dem wahren Werthe noch merklich geſchwinde nähern.

§. 21.

Wenn $z > 1$ iſt, ſo wird die Reihe

$$\log. (1 + z) = z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \text{ꝛc.}$$

divergent, und giebt gar keinen Werth, der ſich beſtimmen lieſſe. Laßt uns demnach ſehen, ob es mit unſern Brüchen beſſer geht. Es ſey

z. E.

z. E. 2 = 2, ſo haben wir

$$\log.3 = \cfrac{1}{1:2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3:2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5:2 + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{7:2 + \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

um hiebey die Brüche zu vermeiden, werden wir die Figur ſo vorſtellen

	12	0		
1:2	0	12	=	0:1
2	12	6	=	2:1
3:2	24	24	=	1:1
1	48	42	=	8:7
5:2	72	66	=	12:11
2:3	228	207	=	76:69
7:2	224	204	=	56:51
ꝛc.	1012	921	=	1012:921

Nun iſt

$$8:7 = 1,14\ldots\ldots$$
$$12:11 = 1,0909\ldots$$
$$76:69 = 1,1014\ldots$$
$$56:51 = 1,0980\ldots$$
$$1012:921 = 1,0988\ldots$$
ꝛc.
$$\log.3 = 1,098612\ldots$$

Man

Man ſieht demnach, daß die Brüche nicht divergiren, ſondern in der That dem wahren Werthe näher kommen, ſo, daß der letzte kaum um 0,0002 davon verſchieden iſt.

§. 22.

Nimmt man für z eine gröſſere Zahl, ſo muß man zwar die Rechnung weiter fortſetzen, bis man auf Brüche kömmt, die dem wahren Werthe ſehr nahe kommen. Es wird aber immer angehen. Denn die Quotienten, ſo man wenn die Theilung der Reihe fortgeſetzt wird, findet, haben in der Art, wie ſie aufeinander folgen, ein ſehr einfaches Geſetz. Sie ſind nemlich

$$\frac{1}{z}, \frac{2}{1}, \frac{3}{z}, \frac{2}{2}, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}, \frac{2}{4}, \frac{9}{z}, \frac{2}{5}, \frac{11}{z}, \frac{2}{6}, \frac{13}{z} \text{ ꝛc.}$$

wobey folglich die Glieder, ſo durch z dividirt ſind, nach der Ordnung der ungeraden Zahlen fortgehen, und folglich ihr Zähler endlich gröſſer wird als jede fürgegebene Zahl. Hingegen nehmen zwar die nicht durch z getheilte Glieder $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$ ꝛc. immer ab, es hindert dieſes aber nicht, daß die dadurch herfürgebrachte Brüche nicht ſolten dem wahren Werthe näher kommen, als die nächſtvorhergehenden; und wie wir aus dem letzten Beyſpiele ſehen, ſo vermindern ſie das Anwachſen der Zahlen, ſo die Zähler und Nenner der Brüche ſind. Wir haben demnach hiedurch ein Mittel den Werth unendlicher Reihen auch für diejenigen Fälle zu finden, wo die Reihen ſelbſt divergirend werden.

§. 23.

Für die Reihe

$$v = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \tfrac{1}{9}z^9 - \text{rc.}$$

welche den Bogen eines Circuls durch ſeine Tangente ausdrücket, findet man nach angeſtellter Theilung auf eine ganz ähnliche Art

$$v = \cfrac{1}{1:z + \cfrac{1}{3:z + \cfrac{1}{5:4z + \cfrac{1}{28:9z + \cfrac{1}{81:64z + \cfrac{1}{704:225\,z + \text{rc.}}}}}}}$$

Es ſey z. E. $z = 1$, in welchem Fall die Reihe faſt gar nicht convergirt, ſo haben wir

$$\text{arc. } 45^\circ = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5:4 + \cfrac{1}{28:9 + \cfrac{1}{81:64 + \cfrac{1}{704:225 + \text{rc.}}}}}}}$$

folglich, um die Brüche zu vermeiden

36	0			
1 —— 0	36			
3 —— 36	36			
5:4 —— 108	144	=	3:4	= 0,75 .....
28:9 — 171	216	=	19:24	= 0,7917...
81:64 — 640	816	=	40:51	= 0,7843...
981	4995:4	=	436:555	= 0,7856...

Es iſt aber der Bogen von 45 Gr. ... = 0,7854

woraus

woraus man wiederum ſieht, daß dieſe Brüche dem wahren Werthe noch merklich geſchwinde näher kommen.

§. 24.

Die Quotienten, ſo man bey der Diviſion dieſer Reihe findet, haben ebenfalls ein ſehr ordentliches Geſetz, nach welchem ſie auf einander folgen. Es ſind nemlich dieſelben der Ordnung nach

$$\frac{1}{z}, \frac{3}{1.z}, \frac{5}{4.z}, \frac{7.4}{9.z}, \frac{9.\ 9}{4.16.z}, \frac{11.\ 4.16}{9.25.z},$$

$$\frac{13.\ 9.25}{4.16.36.z}, \frac{15.4.16.36}{9.25.49.z}, \frac{17.\ 9.25.49}{4.16.36.64.z},$$

$$\frac{19.\ 4.16.36.64}{9.25.49.81.z} \text{ ꝛc.}$$

In den Zählern kommen nemlich der Ordnung nach die ungeraden Zahlen vor. Die übrigen Factores ſind lauter Quadratzahlen, welche wechſelsweiſe Nenner und Zähler werden. In jede Nenner kömmt eine neue, oder die nächſt gröſſere Quadratzahl als ein Factor hinzu, und dieſe beſtimmt, wie die vorhergehende vertheilt werden, weil die geraden und ungeraden nicht zugleich im Nenner oder im Zähler vorkommen. Alle dieſe Brüche ſind durch z dividirt. Hingegen werden ſie nicht wechſelsweiſe immer gröſſer und kleiner, ſondern ſie nähern ſich zwoen beſtimmten Gröſſen, nemlich die Brüche

$$\frac{3}{1}, \frac{7.4}{9}, \frac{11.4.16}{9.25}, \frac{15.4.16.36}{9.25.49} \text{ ꝛc.}$$

nähern ſich der Zahl 3, 1415926 .... welche den halben Umkreiß des Circuls vorſtellt. Ihr allgemeiner Ausdruck iſt

$$\frac{(4x+3)(2^2.4^2.6^2.8^2....(2x)^2)}{3^2.5^2.7^2.9^2....(2x+1)^2}$$

Hingegen nähern ſich die Brüche

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{9.9}{4.16}, \frac{13.9.25}{4.16.36}, \frac{17.9.25.49}{4.16.36.64} \text{ ꝛc.}$$

der Zahl, welche herauskömmt, wenn man 4 durch den halben Umkreis des Circuls 3, 1415926.... dividirt, und welche demnach $= 1,27323954473 ....$ ꝛc. iſt. Dieſes macht nun, daß, wenn man $z > 1$ annimmt, die Brüche ſich dem wahren Werthe ſehr langſam nähern. Da ſie ſich aber dennoch nähern, ſo haben ſie vor der Reihe ein vieles voraus, weil dieſe in allen den Fällen, wo $z > 1$ iſt, divergirt, und daher gar keinen Werth giebt.

§. 25.

Es giebt überdies noch andere Arten, wie man, ohne eben eine Theilung vorzunehmen, zu den Quotienten gelangen kann, die man, um ſolche Brüche heraus zu bringen, nöthig hat. So z. E. wenn aus jeder Zahl $AA + BB$ die Quadratwurzel ſolle ausgezogen werden, ſo

ſo könnte man nach Anleitung der Newtonſchen Binomialformel dieſe Wurzel durch eine unendliche Reihe ausdrücken, und vermittelſt dieſer Reihe die Quotienten ſuchen, und ſo würde man der Ordnung nach und wechſelsweiſe $A, \frac{2A}{BB}, 2A, \frac{2A}{BB}, 2A$ &c. finden, welches den Bruch

$$1 : \sqrt{(A^2+B^2)} = \cfrac{1}{A + \cfrac{1}{2A:BB + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A:BB + \&c.}}}}$$

und daher die Wurzel

$$\sqrt{(AA+BB)} = A + \cfrac{1}{2A:BB + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A:BB + \&c.}}}$$

geben würde. Man kann aber dieſe Formel unmittelbar folgendergeſtalten finden. Man ſetze $\sqrt{(AA+BB)} = A+y$, ſo iſt

$$AA+BB = AA+2Ay+yy,$$

folglich $y(y+2A) = BB$

und daher

$$y = \frac{BB}{2A+y}.$$

Nun kann man für das y, ſo in dem Nenner des Bruches iſt, den Bruch ſelbſt wiederum ſetzen, ſo hat man

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + y}}$$

fährt man auf gleiche Art fort, ſo wird

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}}}$$

Und hiebey darf man nur jeden Bruch durch BB theilen, um ſodann die vorige Formel

$$y + A = \sqrt{(AA + BB)} = A + \cfrac{1}{2A:BB + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A:BB + \&c.}}}$$

zu erhalten.

§. 26.

Es ſey nun z. E. die Quadratwurzel aus 38 zu ziehen; ſo ſetzt man $38 = 36 + 2$, demnach $36 = AA$, $2 = BB$, $A = 6$, $2A:BB = 6$, und ſo hat man

$$\sqrt{38} = 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \&c.}}}}$$

Dieſes giebt nun folgende Figur

	1	0
6	0	1
12	1	6
6	12	73
12	73	444
6	888	5401
ꝛc.	5401	32850

demnach iſt $\sqrt{38} < 1\frac{1}{6}$

$> 1\frac{12}{73}$

$< 1\frac{73}{444}$

ꝛc.

Man kann ſich aber auch der erſten Formel

$$\sqrt{(AA+BB)} = A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}$$

bedienen, und die Quadratwurzel durch eine Reihe von Regeln de tri finden, welche man ſo lange fortſetzen kann, als man es der Genauigkeit halber nöthig erachtet. Und dieſes findet ſtatt, ſo oft die fürgegebene Zahl eine Summe von zwoen Quadratzahlen iſt, von welchen man die Wurzeln hat. Denn da macht man der Ordnung nach

$$2A:B = B:a$$
$$(2A+a):B = B:b$$
$$(2A+b):B = B:c$$
$$\&c.$$

und die Zahlen $A+a$, $A+b$, $A+c$ &c. werden der wahren Wurzel deſto näher kom-

men, je weiter man dieſe Analogien fortgeſetzt hat, und je gröſſer A als B iſt.

§. 27.

Um aber genauer zu ſehen, wie ſich dieſe gefundenen Werthe dem wahren nähern, ſo werden wir für A, B ſolche Ausdrücke nehmen, die ein Quadrat geben. Man ſetze demnach

$$A = a - b$$
$$BB = 4ab,$$

ſo iſt

$$AA + BB = a^2 + 2ab + bb$$

und

$$\surd(AA + BB) = a + b = A + y$$

demnach $y = 2b$

und

$$\surd(AA + BB) = (a - b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \&c.}}$$

Wird nun dieſer Bruch ſtuffenweiſe um ein Glied weiter abgebrochen und die Reduction vorgenommen, ſo erhält man der Ordnung nach

$$\surd(AA - BB) = a - b + 2ab\,(a+b) : (a^2 - b^2)$$
$$= a - b + 2ab(a^2 - b^2) : (a^3 + b^3)$$
$$= a - b + 2ab\,(a^3 + b^3) : (a^4 - b^4)$$

&c.

$$= a - b + 2ab\,(a^{2n} - b^{2n}) : (a^{2n+1} + b^{2n+1})$$
$$= a - b + 2ab(a^{2n+1} + b^{2n+1}) : (a^{2n+2} + b^{2n+2})$$

Um dieſes überhaupt zu beweiſen, darf man nur ſetzen, daß man mit Beybehaltung von

zn Gliedern des Bruches auf den Ausdrucke

$$\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

gekommen. Denn ſo wird man, wenn man um eine Stuffe tiefer anfängt den Ausdruck

$$\frac{4ab}{2(a-b)+\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}}$$

erlangen. Nimmt man bey dieſem die Reduction vor, ſo verwandelt derſelbe ſich in

$$\frac{2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1})}{a^{2n+1}-b^{n2+1}}$$

Und dieſer kommt ebenfalls heraus, wenn man in den erſt angenommenen

$$\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

für n, n+1 ſetzt, und die Zeichen verwechſelt, welche vor b ſtehen. Iſt demnach $a > b$, ſo läßt ſich n ſo groß annehmen, daß die Formel ſich in

$$\surd(A^2+B^2)=a-b+\frac{2ab.a^{2n}}{a^{2n+1}}$$
$$=a-b+2b=a+b$$

verwandelt, welches ſodann in der That die Wurzel iſt. Man ſieht zugleich hieraus, daß, weil

$$a-b+\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}=a+b-\frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

und

$$a-b+\frac{2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1})}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}=a+b+\frac{2(a+b).b^{2n+1}}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}$$

iſt, die Brüche ſich dem wahren Werthe der Wurzel in einer Progreßion nähern, welche einer geometriſchen deſto näher kommen, je gröſſer n iſt, und daß die Brüche, welche zu groß ſind, immer um mehr zu groß ſind, als die, ſo zu klein ſind, zu klein ſind. Denn die Unterſchiede der erſtern ſind mit $(a+b)$, die Unterſchiede der andern mit $(a-b)$ multiplicirt. Die Näherung iſt am langſamſten, wenn $A=B$ iſt. Nun iſt aber überhaupt

$$2a=+A+\surd(A^2+B^2)$$
$$2b=-A+\surd(A^2+B^2)$$

demnach für den Fall, wo $A=B$ iſt, findet ſich

$$2a=A(+1+\surd 2)=2,4142136\ldots.$$
$$2b=A(-1+\surd 2)=0,4142136\ldots.$$

demnach

$$\frac{a}{b}=\frac{\surd 2+1}{\surd 2-1}=3+2\surd 2=5,8284272\ldots$$

Da nun die Brüche entweder um

$$\frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}=\frac{2\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}{1+(b:a)^{2n+1}}$$

zu klein, oder um

$$\frac{2(a+b)b^{2n+1}}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}=\frac{2(1+b:a).(b:a)^{2n+1}}{1-(b:a)^{2n+2}}$$

zu klein ſind, und

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} = 0,1715728\ldots$$

folglich immer kleiner als 0,1715728, oder ungefehr $\frac{1}{6}$ iſt, ſo ſieht man, daß der Unterſchied jedes folgenden Bruches von dem wahren Werthe der Wurzel immer wenigſtens 6 mal kleiner wird, ſo oft man nemlich für A die gröſſere, für B aber die kleinere Zahl nimmt. Denn widrigenfalls iſt die Näherung langſamer.

§. 28.

Man ſetze z. E. $A = 4$, $B = 3$, ſo weiß man daß die Quadratwurzel von $A^2 + B^2 = 16 + 9 = 25$, wird $= 5$ ſeyn. Nach unſerer Formel haben wir $2A : BB = 8 : 9$, und $2A = 8$, folglich $y = 1$, und

	81	0	
8:9 —	0	81	
8 —	81	72 =	9:8
8:9 —	648	657 =	72:73
8 —	657	656 =	657:656
ꝛc.	5904	5905 =	5904:5905

Da nun dieſe Brüche ſolten $= y = 1$ ſeyn, ſo ſieht man, daß die Unterſchiede $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{73}$, $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{5905}$ ꝛc. ſind, und daher jeder folgende bey 9 mal kleiner wird.

§. 29.

Bey den Cubicwurzeln läßt ſich der bey den Quadratwurzeln gebrauchte Vortheil nicht anbrin-

anbringen. Nimmt man aber die Reihe

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a + \frac{b}{3a^2} - \frac{1.2b^2}{3.6a^5} + \frac{1.2.5b^3}{3.6.9a^8} - \frac{1.2.5.8b^4}{3.6.9.12a^{11}} + \text{ꝛc.}$$

vor, und theilt ſie anfangs durch 1, ſo, daß der erſte Quotient $= a$ ſey, und ſodann jeden Theiler durch den Ueberreſt, ſo ſind die Quotienten der Ordnung nach

$$a, \frac{3a^2}{b}, a, \frac{9a^2}{2b}, \frac{4a}{5}, \frac{75a^2}{14b}, \frac{7a}{10}, \frac{6a^2}{b}, \text{\&c.}$$

demnach

$$1:\sqrt[3]{(a^3+b)} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{3a^2:b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{9a^2:2b + \text{ꝛc.}}}}}$$

und

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a + \cfrac{1}{3a^2:b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{9a^2:2b + \cfrac{1}{4a:5 + \cfrac{1}{75a^2:14b + \text{ꝛc.}}}}}}$$

dieſe Quotienten geben nun Brüche, die ſehr geſchwinde ſich dem wahren Werthe der Wurzel nähern. Wir wollen es für den Fall zeigen, wo es noch am langſamſten zugeht, weil wir $a = b = 1$ ſetzen wollen. Denn es iſt klar, daß, wenn $a > 1$ und $b < a$ iſt, die

Quo-

Quotienten merklich gröſſer werden. Setzen wir demnach $a = b = 1$, ſo iſt $\sqrt[3]{(a^3 + b)} = \sqrt[3]{2}$ folglich die Cubicwurzel von 2 zu ſuchen, welche $= 1,259921 \ldots$ iſt. Wir haben demnach

	140	0		
3	0	140	= 0 : 1	
1	140	420	= 1 : 3	= 0, 333 ...
9 : 2	140	560	= 1 : 4	= 0, 25
4 : 5	770	2940	= 11 : 41	= 0, 268 ...
75 : 14	756	2912	= 27 : 104	= 0, 2596 ...
7 : 10	4820	18540	= 241 : 927	= 0, 259976 ...
6	4130	15890	= 59 : 227	= 0, 259912 ...
ꝛc.	29600	113880	= 740 : 2847	= 0, 2599227 ...

Demnach, wenn wir $a = 1$ addiren, die geſuchten Werthe

1, 333 ...
1, 25
1, 268 ...
1, 2596 ...
1, 259976 ...
1, 259912 ...
1, 2599227 ... ꝛc.

Die Quotienten, oder beſſer zu ſagen, deren Coefficienten $3, 1, \frac{9}{2}, \frac{4}{5}$, ꝛc. folgen nach einem gewiſſen Geſetze auf einander. Es ſind nemlich die Glieder folgender Reihe

$$\frac{1.3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3.3.2}{1.4}, \frac{2.4}{2.5}, \frac{5.3.2.5}{1.4.7}, \frac{2.4.7}{2.5.8}, \frac{7.3.2.5.8}{1.4.7.10} \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\frac{3}{1}, \frac{1}{1}, \frac{9.2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{15.2.5}{4.7}, \frac{4.7}{5.8}, \frac{21.2.5.8}{4.7.10} \text{ ꝛc.}$$

§. 30.

Man kann dieſes Geſetz allgemeiner vorſtellen, wenn man überhaupt die Wurzel

$$\sqrt[m]{(a^m+b)}$$

in eine Reihe auflöſet, und vermittelſt dieſer Reihe durch die Diviſion die Quotienten ſucht. Denn da findet man ſie in folgender Ordnung

$$\frac{ma^{m-1}}{b},\ \frac{2}{m-1}\,a,\ 3.m.\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{a^{m-1}}{b},\ \frac{2.}{m-1}\cdot\frac{m+1.a}{2m-1},$$

$$5m.\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{2m-1}{2m+1}\cdot\frac{a^{m-1}}{b},\ \frac{2.m+1}{m-1}\cdot\frac{2m+1}{2m-1}\cdot\frac{a}{3m-1},\ \text{etc.}$$

dieſe geben demnach überhaupt

$$\sqrt[m]{(a^m+b)}=a+\cfrac{1}{ma^{m-1}:b+\cfrac{1}{2a:m-1+\cfrac{1}{3.m.(m-1)a^{m-1}:(m+1)b+\&c.}}}$$

Man ſieht zugleich hieraus, daß dieſe Quotienten bey jeder Wurzel wechſelsweiſe zu- und abnehmen, und daß ihre Coefficienten nur bey der Quadratwurzel beſtändig $=2$ ſind. Setzt man für m, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. ſo erhält man Dignitäten von (a^m+b), und da irgend einer der Quotienten anfängt unendlich zu werden, ſo wird die Reihe daſelbſt abgebrochen, und man erhält die Dignität ganz rein. Es ſey z. E. $m=2$, und $a=b=1$, ſo ſind die Coefficienten

$$+\tfrac{1}{2},\ -4,\ -\tfrac{1}{2},\ \infty.$$

Folg-

Folglich die Figur

4	0
$+1:2 - - - 0$	4
$-4 - - + 4$	$+2 = 2$
$-1:2 - -16$	$-4 = 4$
$+12$	$+4 = 3$

demnach $(1+1)^2 = 1 + 3 = 4.$

§. 31.

Wir werden nun zu andern Reductionen der Brüche, und beſonders der Decimalreihen fortſchreiten. Wenn man mit einer Decimalreihe, wie z. E. mit 3, 1415926 .... oft zu multipliciren hat, und beſonders wenn entweder große Zahlen, oder andere Decimalreihen damit ſolten multiplicirt werden, ſo iſt ein ſolches Multipliciren, wegen der Weitläuftigkeit, beſchwerlich. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, demſelben abzuhelfen. So z. E. um bey eben dieſer Reihe 3, 1415926 .... zu bleiben, welche dem Umkreis des Circuls ausdrückt, fand ich

$$3{,}1415926 \text{ ꝛc.} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{800} - \frac{1}{70000} - \frac{1}{5000000} - \frac{1}{300000000} - \frac{1}{5000000000} - \frac{1}{50000000000} + \frac{1}{400000000000000} - \frac{1}{200000000000000} - \text{ ꝛc.}$$

Weiter

Weiter habe ich dieſe Reihe nicht verfolgt, weil man ohnehin ſelten bis auf 14 Decimalziffern rechnet. Man ſieht ſogleich und auf eine ſehr klare Art daraus, um wie viel die archimediſche Proportion, welche die erſten zwey Glieder dieſer Reihe vorſtellen, zu groß iſt, um wie viel man noch fehlt, wenn man ſie um $\frac{1}{800}$ des Diameters vermindert ꝛc. Es iſt beynahe ganz unnöthig, daß ich die Methode herſetze, nach welcher ich dieſe Reihe gefunden. Denn da ich mir dabey vorgeſetzt hatte, ſolche Brüche zu finden, deren Zähler = 1, die Nenner aber eine ganz einfache Zahl mit angehenkten 0 ſeyn ſolten, damit man ohne Mühe dividiren könne, ſo war leicht voraus zu ſehen, daß dieſe Nenner ohne alle Ordnung würden gröſſer werden, weil der Umſtand, daß wir nur bis auf 9 zählen, ganz willkührlich iſt, und mit der Quadratur des Circuls nichts zu thun hat. Das einige Mittel, ſo demnach übrig bliebe, war, daß ich die Ludolphiſchen Zahlen

3, 14159265358 9, 793238, ꝛc.

vor mich nahme, ſodann erſtlich 3 abzoge, und von dem Ueberreſte, welcher beynahe $\frac{1}{7}$ war, zog ich $\frac{1}{7}$ ab. Da aber $\frac{1}{7}$ gröſſer ware als der Ueberreſt, ſo ſahe ich, daß dieſer ſodann von $3\frac{1}{7}$ muſte abgezogen werden. Nun war dieſer Ueberreſt etwas gröſſer als $\frac{1}{800}$. Ich zoge demnach $\frac{1}{800}$ ab, und fand das Uebrigbleibende noch etwas gröſſer als $\frac{1}{70000}$. Dieſes zoge ich demnach wiederum ab, und was übrig bliebe,

bliebe, war noch etwas gröſſer als $\frac{1}{5000\,000.}$ Auf dieſe Art fuhr ich fort, bis der Ueberreſt gröſſer als $\frac{1}{6000\,000\,000\,00}$, und nur ein wenig kleiner als $\frac{1}{5000\,000\,000\,0}$ war. Ich zoge denſelben demnach von dieſem letztern Bruche ab, und damit muſte das Zeichen — in + verwandelt werden, weil mit $\frac{1}{5000\,000\,000\,0}$ zu viel war weggenommen worden ꝛc.

§ 32.

Man ſieht ohne mein Erinnern, daß es bey Ausfindung ſolcher Brüche eigentlich darum zu thun iſt, daß die Anzahl der o in den Nennern geſchwinde zunehme, damit man mit wenigern Theilungen weiter reiche. Hiezu kann man nun keine allgemeine Regel geben, theils weil man die Ueberreſte bey ſolchen Brüchen nicht vorher ſehen kann, theils weil es mehrere Anordnungen der Brüche giebt, die zuletzt dennoch auf eines hinaus laufen. So z. E. findet man

$$\frac{1}{3,1415926\ \text{ꝛc.}} = 0,318309886183790657153\ \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{60} + \frac{1}{600} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000}$$

$$- \frac{1}{9000000} - \frac{1}{4000\,000\,00} - \text{ꝛc.}$$

oder auch

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{50} + \frac{1}{200} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000} - \frac{1}{9000000} - \frac{1}{400000000} - \text{etc.}$$

Denn es iſt

$$\tfrac{1}{60} - \tfrac{1}{600} = \tfrac{1}{50} - \tfrac{1}{200}.$$

Man wird eben ſo auch die Reihe

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{70} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{80000} - \frac{1}{5000000} - \frac{1}{30000000} + \frac{1}{2000000000} - \frac{1}{300000000000} + \text{etc.}$$

finden, welche eben den Werth giebt, und von den beyden vorhergehenden, von dem zweyten Gliede an, ganz verſchieden iſt.

§. 33.

Dieſe Reihen ſind nun in dem Gebrauche ſehr vortheilhaft. Man ſieht mit einem male, bis auf die wievielſte Decimalſtelle jeder Bruch reicht, und wie viele Theilungen man folglich vorzunehmen hat, um zu einem fürgegebenen Grade der Genauigkeit zu gelangen. Wer überdies leicht im Rechnen geübt iſt, dem fällt es nicht ſchwerer mit einer Ziffer zu dividiren, als zu multipliciren, und er gebraucht kein beſonder

ſonder Blatt dazu, um jeden Quotienten zu finden.

§. 34.

Indeſſen iſt eben dieſe Leichtigkeit Schuld daran, daß dieſe Reihen weniger convergiren, als es an ſich geſchehen könnte. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, jede Decimalreihe, oder auch andere Brüche, in ſolche Brüche aufzulöſen, deren Zähler = 1, die Nenner aber in der gröſten möglichen Verhältniß der Ordnung nach gröſſer ſeyn. Dieſe Auflöſung geht nun ſtuffenweiſe von ſtatten, und die Bedingung, daß alle Zähler ſollen = 1 ſeyn, giebt die Methode von ſelbſt an. Es ſey z. E. der Bruch $\frac{94}{127}$. Da dieſer nun näher bey 1 als bey $\frac{1}{2}$ iſt, ſo wird er von 1 abgezogen, demnach

$$\frac{94}{127} - \frac{127}{127} = - \frac{33}{127}.$$

Nun iſt $\frac{33}{127}$ näher bey $\frac{1}{4}$ als bey $\frac{1}{3}$. Man zieht demnach $\frac{1}{4}$ davon ab, und ſo iſt

$$\frac{33}{127} - \frac{1}{4} = \frac{132 - 127}{4.127} = \frac{5}{508}.$$

Eben ſo iſt dieſer neue Ueberreſt $\frac{5}{508}$ näher bey $\frac{1}{102}$ als bey $\frac{1}{101}$, man zieht demnach $\frac{1}{102}$ davon ab, und ſo iſt

$$\frac{5}{508} - \frac{1}{102} = \frac{510 - 508}{508.102} = \frac{1}{508.51} = \frac{1}{4.127.51}$$

 dem-

demnach wenn man nun den Rückweg nimmt

$$\frac{5}{508} = \frac{1}{102} + \frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{33}{127} = \frac{1}{4} + \frac{1}{102} + \frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{94}{127} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{102} - \frac{1}{4.127.51}.$$

§. 35.

Wiederum, es ſey $\frac{355}{113}$ in eine ſolche Reihe von Brüchen aufzulöſen, ſo macht man erſtlich

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$$

ſodann, weil $\frac{16}{113}$ dem $\frac{1}{7}$ am nächſten kömmt

$$\frac{16}{113} - \frac{1}{7} = - \frac{1}{791} = \frac{1}{7.113}.$$

Da nun der Ueberreſt $\frac{1}{791}$ ſchon 1 zum Zähler hat, ſo gebraucht es keiner weitern Auflöſung, und es iſt ganz kurz

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113}$$

Man ſieht hieraus, um wie viel die Metianiſche Proportion des Umkreiſes zum Diameter von der Archimediſchen verſchieden iſt. Kehrt man den Bruch $\frac{355}{113}$ um, ſo findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{113}{355} - \frac{1}{3} = -\frac{16}{3.355} = -\frac{16}{1065}$$

$$\frac{16}{1065} - \frac{1}{67} = +\frac{7}{67.1065} = +\frac{7}{71355}$$

$$\frac{7}{71355} - \frac{1}{10194} = +\frac{3}{10194.71355} = \frac{1}{242464290}$$

ſoglich

$$\frac{113}{355} = \frac{1}{3} - \frac{1}{67} - \frac{1}{10194} - \frac{1}{242464290}.$$

Man ſagt nemlich: 113 in 355 geht 3 mal, und es bleiben 16 übrig. 16 in 3 mal 355, oder 1065 geht 67 mal, und es fehlen 7. Endlich 7 in 67 mal 1065, oder 71355 geht 10194 mal, und es fehlen 3. Dieſes 3 in 10194 mal 71355 geht genau 242464290 male. Und damit ſind die Nenner 3, 67, 10194 und 242464290 gefunden.

§. 36.

Bey den Decimalreihen verfährt man auf eine ganz ähnliche Art, nur daß man die Brüche, ſo man herausbringt, in Decimalreihen verwandelt, um zu finden, wie nahe ſie dem wahren Werthe der Reihe kommen, und was noch entweder hinzu zu ſetzen oder weg zu nehmen iſt. So z. E. iſt für die Ludolphiſche Zahlen

	$\pi =$	$3,14159265358979323 8$ ꝛc.
A	$3\frac{1}{7} =$	$3,142857142857142857$ ꝛc.
a		$-0,001264489267349618$ ꝛc.
B	$-\frac{1}{791} =$	1264222503151706 ꝛc.
b		-266764197911 ꝛc.
C	$-\frac{1}{3748629} =$	266764195656 ꝛc.
c		2255 ꝛc.
D	$-\frac{1}{4433840233362059} =$	2255 ꝛc.

Hier müſſen nemlich die Brüche B, C, D aus den Ueberreſten a, b, c gefunden werden, indem man 1 durch dieſelben dividirt. Man hat nicht nöthig hiezu die ganze Reihen a, b, c zu nehmen, ſondern es iſt genug, wenn man von den erſten Zahlen derſelben ſo viel nimmt als nöthig iſt, die Quotienten, ſoweit dieſe ganze Zahlen ſind, zu beſtimmen. Sind auf dieſe Art die Brüche A, B, C, D gefunden, ſo verwandelt man ſie in Decimalreihen, um ſie ſodann abzuziehen. Ich habe, um dieſe Brüche zu finden, von der Reyhe π in allem 30 Decimalſtellen zur Rechnung genommen, und fand demnach, daß die Formel

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{791} - \frac{1}{3748629} - \frac{1}{4433840233362059} \text{ ꝛc.}$$

die Ludolphiſche Zahlen bis auf die 28te Decimalſtelle richtig giebt. Die zwey erſten Glieder geben die Archimediſche Proportion $\frac{22}{7}$, die drey erſten aber

3 +

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{791}=3+\frac{113-1}{791}=3\frac{16}{113}=\frac{355}{113}$$

geben die Metianiſche $\frac{355}{113}$. Man ſieht alſo hieraus, daß unter den kleinern Verhåltniſſen dieſe beyden die genaueſten ſind, und daß von der Metianiſchen bis zur nåchſt grȯſſeren ein merklicher Sprung iſt.

§. 37.

Die Reihen von Brůchen, in welche man auf dieſe Art jede Decimalreihe verwandeln kann, ſind nun diejenigen, die unter allen am geſchwindeſten convergiren. Es haben aber dieſe Brůche in der Art, wie ſie auf einander folgen, kein Geſetz unter ſich. Die Nenner haben zuweilen Theiler, zuweilen ſind es Primzahlen, und jede Reihe hat, in Anſehung des Convergirens, etwas beſonders. Es kommt viel darauf an, daß ſchon der erſte Bruch dem wahren Werthe der Reihe ſehr nahe komme. Denn man ſieht leicht, daß wenn man in unſerm Beyſpiele anſtatt der Reihe A, welche $\frac{22}{7}$ iſt, gleich anfangs $\frac{355}{113}$ als die Summe beyder Reihen A, B genommen håtte, der folgende Bruch unmittelbar wůrde C geweſen ſeyn. Die Anzahl der Ziffern in dem Nenner eines jeden folgenden Bruches wird immer doppelt, und mehrentheils um eine Ziffer mehr als doppelt grȯſſer. Es kann auch in einigen Fållen

geſchehen, wo ein Nenner weit über doppelt mehr Ziffern bekömmt, als der nächſt vorhergehende. Dieſes geſchieht aber gleichſam nur zufälliger Weiſe, wenn man nemlich eine ſolche Reihe vor ſich hat, welche einem gewiſſen Bruche beynahe gleich iſt.

§. 38.

Wenn man nicht ſo genau darauf ſieht, daß ſolche Reihen unter allen am geſchwindeſten convergiren, ſo laſſen ſich ſolche finden, die nach gewiſſen Geſetzen fortgehen. So z. E. es ſey die Frage jede Decimalreihen in eine Reihe von Brüchen von folgender Form

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{a.\,b} + \frac{1}{a.\,b.\,c} + \frac{1}{a.\,b.\,c.\,d} + \text{rc.}$$

zu verwandeln, und zwar mit der gedoppelten Bedingung, daß a, b, c, d &c. ganze Zahlen ſeyn, und die Reihe unter allen von dieſer Art am geſchwindeſten convergire. Die Auflöſung dieſer Aufgabe hat nun ebenfalls gar keine Schwürigkeit, und wir können ſogleich anfangen, ſie in einem Beyſpiele zu zeigen, wozu wir ebenfalls wiederum die Ludolphiſchen Zahlen nehmen werden. Die Rechnung iſt demnach folgende

$\pi = 3,141592,653589,793238,462643,38$ ꝛc.
$3 + \frac{1}{7} = 3,142857,142857,142857,142857,14$ ꝛc.

$M = -\ 1264,489267,349618,680213,76$ ꝛc.
$A = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{113} = 1264,222503,151706,700379,27$ ꝛc.

$N = -\ 266764,197911,979834,49$ ꝛc.
$B = \frac{A}{4739} = 266769,867725,618632,49$ ꝛc.

$O = +\ 5,669813,638798,00$ ꝛc.
$C = \frac{B}{47051} = 5,669802,293800,74$ ꝛc.

$P = +\ 11,344997,26$ ꝛc.
$D = \frac{C}{499762} = 11,345004,81$ ꝛc.

$Q = -\ 7,55$ ꝛc.

ꝛc.

folglich

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \cdot 113} - \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739} + \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739 \cdot 47051} + \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739 \cdot 47051 \cdot 499762} - \text{ꝛc.}$$

Man dividirt nemlich $\frac{1}{7}$ durch den erſten Ueberreſt M, um den Nenner 113 zu finden. Sodann theilt man $\frac{1}{7}$ durch 113, um die Reihe A zu finden. Dieſe wird von M abgezogen, und ſo erhält man den zweyten Ueberreſt N. Sodann giebt die Theilung $\frac{A}{N}$ den Nenner 4739, und $\frac{A}{4739}$ die Reihe B, welche von N abgezogen, den 3ten Ueberreſt O giebt, mit welchem man auf eine ganz ähnliche Art verfährt ꝛc.

§. 39.

Die Reihen, die man nach dieſer Methode findet, haben den Vortheil, daß man ſogleich ſieht, wie vielmal jeder Bruch kleiner iſt, als der nächſt vorhergehende, und daß man bey ihrem Gebrauche nicht mit ſo groſſen Zahlen zu dividiren hat, weil jedes Glied durch das nächſt vorhergehende gefunden werden kann. Jeder neue Factor hat wenigſtens ſo viel, mehrentheils aber mehr Ziffern, als der nächſt vorhergehende. Lezters hängt von der beſondern Art der Reihe ab, die man in ſolche Brüche aufzulöſen vornimmt. Daher findet ſich in Anſehung des Convergirens ein merklicher Unterſchied. So z. E. findet man

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.22} + \frac{1}{3.22.118} - \frac{1}{3.22.118.384} - \text{2c.}$$

Dieſe Reihe convergirt demnach merklich langſamer als die, ſo wir erſt für π gefunden.

§. 40.

Will man Brüche in ſolche Reihen auflöſen, ſo kann es nach einer gewiſſen mechaniſchen Methode geſchehen, welche wir durch das Beyſpiel des Bruches $\frac{5341}{7837}$ erläutern wollen. Die Figur iſt folgende

5341

5341	7837	1										
	5341											
	— 2496	7837	3									
		7488										
		+ 349	7837	22								
			7678									
			— 159	7837	49							
				7791								
				+ 46	7837	170						
					7820							
					— 17	7837	461					
						7837						
						0						

Dieſes giebt nun

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.\,22} - \frac{1}{3.\,22.\,49} + \frac{1}{3.\,22.\,49.\,170} - \frac{1}{3.\,22.\,49.\,170.\,461}.$$

Man dividirt nemlich den Nenner durch den Zähler, und ſodann durch jeden Ueberreſt, um die Quotienten 1, 3, 22, 49, 170, 461 zu finden. Nun iſt

$$1 - \frac{2496}{7837} = \frac{5341}{7837}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{349}{3\cdot 7837} = \frac{2496}{7837}$$

$$\frac{1}{22} - \frac{159}{22.\,7837} = \frac{349}{7837}$$

$$\frac{1}{49} - \frac{46}{49\cdot 7837.} = \frac{159}{7837}$$

$$\frac{1}{170} - \frac{17}{170\cdot 7837} = \frac{46}{7837}$$

$$\frac{1}{461} - \frac{0}{461\cdot 7837} = \frac{17}{7837}$$

Denn

Denn es ſey der Nenner $= B$, ein jeder Ueberreſt $= Q$, B durch Q getheilt gehe m mal, und laſſe R übrig, ſo iſt

$$mQ = B - R$$

demnach

$$\frac{mQ}{B} = 1 - \frac{R}{B}$$

$$\frac{Q}{B} = \frac{1}{m} - \frac{R}{m.B}$$

Es iſt daher, wenn man nach und nach ſubſtituirt,

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{2496}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{349}{3.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{159}{3.22.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{46}{3.22.49.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{17}{3.22.49.170.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{1}{3.22.49.170.461}.$$

§. 34.

In dieſem Beyſpiele hat es ſich ſchicklich eräugnet, daß jeder Ueberreſt kleiner als die Hälfte desjenigen war, welcher zum Dividiren genommen worden, und dieſes machte, daß in der herausgebrachten Reihe die Zeichen — + einförmig abwechſelten. Es giebt aber ungleich mehr Brüche, wo die Ueberreſte bald

grôſ-

gröſſer, bald kleiner ſind, als die Hälfte der Theiler. Will man nun eine Reihe haben, die am geſchwindeſten convergirt; ſo muß man in allen den Fällen, wo ein Ueberreſt gröſſer ſeyn würde, als die Hälfte des Theilers, den Quotienten um 1 gröſſer nehmen. Dadurch wird der Ueberreſt negativ, und zugleich kleiner als die Hälfte des Theilers, und damit muß das Zeichen verwechſelt werden. Es ſey z. E. der Bruch $\frac{4142136}{10000000}$, ſo haben wir folgende Figur

```
4142136 | 10000000 | 2
        |  8284272 |
        ------------------------
         — 1715728 | 10000000 | 6
                   | 10294368 |
                   ------------------------
                      — 294368 | 10000000 | 34
                               | 10008512 |
                               ------------------------
                                    — 8512 | 10000000 | 1175
                                           | 10001600 |
                                           ------------
                                               — 1600

1600 | 10000000 | 6250
     | 10000000 |
     ------------
           0
```

folglich

$$\frac{4142136}{10000000} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{2.6.34} - \frac{1}{2.6.34.1175} - \frac{1}{2.6.34.1175.6250}$$

Es iſt demnach

$$\sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{2.6.34} - \frac{1}{2.6.34.1175} - \text{ꝛc.}$$

Da hier von den zweyten an, alle Quotienten um 1 grӧſſer genommen worden, ſo ſind auch alle Zeichen von dem zweyten an — geblieben.

§. 42.

Wiederum es ſey 0,8660254 der Tabellarſinus von 60 Gr. in ſolche Brüche zu verwandeln, ſo iſt

8660254	10000000	1
	8660254	
— 1339746	10000000	7
	9378222	
+ 621778	10000000	16
	9948608	
— 51392	10000000	195
	10021440	
	— 21440	

— 21440	10000000	466
	9991040	
+ 8960	10000000	1116
	9999360	
— 640	10000000	15625
	10000000	
	0	

Hier

Hier iſt der einige Quotient 195 um 1 gröſſer genommen worden, demnach iſt auch nur bey deſſen Ueberreſt keine Verwechſelung des Zeichens vorgegangen. Es iſt demnach

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 1 - \tfrac{1}{7} + \frac{1}{7.16} - \frac{1}{7.16.195} - \frac{1}{7.16.195.466}$$

$$+ \frac{1}{7.16.195.466.1116} - \frac{1}{7.16.195.466.1116.15625} - \text{———}$$

hiebey kann man die drey letzten Glieder, als welche kleiner als 0, 000000 1 ſind, weglaſſen, weil wir den Sinus von 60 Gr. ſelbſt nicht genauer genommen haben.

§. 43.

Auf dieſe Art verfährt man demnach, wenn Brüche oder Decimalreihen in ſolche Reihen

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \&c.$$

aufzulöſen ſind, die am geſchwindeſten convergiren. Will man aber von dieſer Bedingung abgehen, ſo kann jeder Bruch und jede Decimalreihe in unzählige Reihen verwandelt werden, die nach andern Abſichten eingerichtet werden können. Man ſetze z. E. jeder von den Factoren a, b, c, d &c. ſollen eine Zahl aus der Reihe

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 ꝛc.

ſeyn, ſo wird dieſe Abſicht auf eine ganz ähnliche Art erhalten werden können. Wir wollen

len in Anſehung des hyperboliſchen Logarithmus von 10, welcher = 2,30258509299404568 ꝛc. iſt, ein Beyſpiel geben. Es iſt demnach

log. 10 = 2, 302585092994 ꝛc.
— 2,000 000 000 000 ꝛc.

$A = +0,302585092994$ ꝛc.
$a = \frac{1}{3} = 0,333333333333$ ꝛc.

$B = -30748240339$ ꝛc.
$b = \frac{1}{10} a = 33333333333$ ꝛc.

$C = +2585092994$ ꝛc.
$c = \frac{1}{10} b = 3333333333$ ꝛc.

$D = -748240339$ ꝛc.
$d = \frac{1}{4} c = 833333333$ ꝛc.

$E = +85092994$ ꝛc.
$e = \frac{1}{10} d = 83333333$ ꝛc.

$F = +1759660$ ꝛc.
$f = \frac{1}{5} e = 1666666$ ꝛc.

$G = +92994$ ꝛc.
$g = \frac{1}{20} f = 83333$ ꝛc.

$H = +9660$ ꝛc.
$h = \frac{1}{9} g = 9259$ ꝛc.

$I = +401$ ꝛc.
$i = \frac{1}{20} h = 462$ ꝛc.

$K = -61$ ꝛc.

ꝛc.

folglich

folglich

$$\log. 10 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.10} + \frac{1}{3.10.10} - \frac{1}{3.10.10.4} + \frac{1}{3.10.10.4.10} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9.20} - \text{ꝛc.}$$

§. 44.

Man kann auf eine ähnliche Art die Auflöſung einer Decimalreihe ſo anſtellen, daß die Nenner oder Factores lauter Quadrat, Cubic ꝛc. Trigonal ꝛc. oder Zahlen aus einer fürgegebenen Reihe ſind. Man wird aber, ungeachtet es an ſich nicht unmöglich iſt, nicht leicht auf eine ſolche Auflöſung verfallen, da die Factores nach einem einförmigen Geſetze auf einander folgen, daferne man dieſes nicht voraus weiß. Denn ſo z. E. giebt es allerdings eine Reyhe, deren Factores der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. ſind; man muß aber voraus wiſſen, daß es die Zahl iſt, deren hyperboliſcher Logarithmus = 1 iſt. Denn ſo hat man

	2,718281828459
	2
	0,718281828459
$a = \frac{1}{2} =$	0,500000000000
	0,218281828459
$b = \frac{1}{3}a =$	0,166666666666
	0,051615151793
$c = \frac{1}{4}b =$	41666666666
	0,009948485126
$d = \frac{1}{5}c =$	0,008333333333
	0,001615151793
	ꝛc.

§. 45.

Bey dieſen ſo gar vielen Möglichkeiten die Decimalreihen und Brüche in Reihen zu verwandeln, welche entweder unter allen am geſchwindeſten, oder doch nach beliebigen Geſetzen, ſehr geſchwinde convergiren, wäre es ſehr zu wünſchen, daß die dabey gebrauchte Methode auch bey den algebraiſchen unendlichen Reihen mit eben ſo gutem Fortgange angebracht werden könnte. Man weiß, daß wenn man mit dem Integriren einer Differentialformel nicht fortkommen kann, das letzte Mittel dieſes iſt, daß man ſie in eine unendliche Reihe auflöſet, und ſodann jede Glieder derſelben beſonders integrirt. Es geſchieht aber ſelten, daß ſolche Reihen in allen Fällen ſehr convergent wären, und um deſtomehr wäre es gut, ſie in ſolche ver-

verwandeln zu können, die unter allen am geſchwindeſten convergirten. Will man aber mit ſolchen Reihen Diviſionen vornehmen, wie wir es vorhin (§. 40.) mit den Brüchen gethan haben, ſo kann man ſich dabey weder von dem gröſten Quotienten, noch von dem kleinſten Ueberreſte verſichern, weil ſich die Glieder, die verſchiedene Exponenten haben, nicht ſo unbedingt addiren und ſubtrahiren laſſen. Man kann dabey nur die Glieder, ſo gleiche Exponenten haben, mit einander vergleichen, und man hat bey dem Dividiren nur dieſe Wahl, ob die Quotienten aus 1, 2, 3 ꝛc. Gliedern beſtehen ſollen. Die Probe, ſo ich hierüber angeſtellt, hat mich gelehrt, daß, wenn man ſich mit eingliedrigen Quotienten begnügen will, man nichts ausrichtet, weil man ſtatt einer mehr convergirenden Reihe gerade diejenige wieder bekömmt, die man hatte verwandeln wollen. Es ſey z. E. die Reihe

$$y = \frac{ax + bx^2 + cx^3 + \&c.}{1}$$

in Form eines Bruches vorgeſtellt deſſen Nenner $= 1$ iſt. Dividirt man nun 1 durch $ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$ ſo iſt der Quotient $= \frac{1}{ax}$ der Ueberreſt $= -\left(\frac{bx}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{dx^3}{a} + \&c.\right)$ Wird durch dieſen Ueberreſt wiederum 1 dividirt, ſo iſt der Quotient $= -\frac{a}{bx}$, der Ueber-

reſt $= -\left(\frac{cx}{b} + \frac{dx^2}{b} + \&c.\right)$ Fährt man auf gleiche Art fort, ſo werden der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{ax}, -\frac{a}{bx}, -\frac{b}{cx}, -\frac{c}{dx}$ &c. erhalten. Und dieſe geben demnach die Reihe

$$y = ax + ax.\frac{bx}{a} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b}.\frac{dx}{c} + \text{rc.}$$

welcher ſich offenbar in die fürgegebene

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$$

verwandelt. Es ſind demnach die auf dieſe Art gefundene eingliedrige Quotienten nicht nur nicht die Gröſten, ſondern weder gröſſer noch kleiner als diejenigen, welche die Anfangs fürgegebene Reihe wieder herfür bringen.

§. 46.

Ich habe hierauf eine Probe mit Quotienten von zweyen Gliedern vorgenommen, weil es ſich voraus ſehen lieſſe, daß dieſe allerdings gröſſer als die eingliedrigen ſeyn, und ſich nicht gegen einander wieder aufheben würden. Ich nahm zu dieſem Ende die Leibnitziſche Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \text{rc.}$$

dieſe in 1 dividirt, gieng $\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right)$ mal, und der Ueberreſt wäre

$$-\frac{4}{45}x^4 + \frac{8}{105}x^6 - \frac{12}{189}x^8 + \frac{16}{297}x^{10} - \frac{20}{13.33}x^{12} + \text{rc.}$$

dieſer

dieſer wiederum in 1 dividirt gieng $\div\left(\frac{45}{4xxxx}+\frac{135}{14xx}\right)$ mal, und der Ueberreſt war

$$+\frac{1}{49}x^4-\frac{10}{33.49}x^6-\frac{5}{7.11.13}x^8+\frac{12}{7.11.13}x^{10}\ \&c.$$

dieſer nochmals in 1 dividirt, gabe $\left(\frac{49}{x^4}+\frac{49.10}{33x^2}\right)$, und der Ueberreſt war

$$+\frac{953.5}{11.13.99}x^4-\frac{173}{11.13.33}x^6\ \&c.$$

Dadurch erhielte ich nun nach gehöriger Reduction der Quotienten

$$y=\frac{3x}{3+xx}+\frac{3x}{3+xx}\cdot\frac{56x^4}{630+540x^2}-\frac{3x}{3+xx}\cdot\frac{56x^4}{630+540xx}\cdot\frac{33x^4}{1617+490xx}$$

oder nach geſchehener Verkleinerung der Brüche

$$y=\frac{3x}{3+xx}\cdot+\frac{1}{(3+xx)}\cdot\frac{28x^5}{(105+90xx)}-\frac{44x^9}{(3+xx)\cdot(35+30xx)\cdot(231+70xx)}\ \text{2c.}$$

Dieſe Reihe convergiret demnach ſchon merklicher, als die fürgegebene. Setzt man z. E. $x=1$, ſo erhält man

$$y=\tfrac{3}{3}+\tfrac{7}{195}-\tfrac{11}{10565}-\text{2c.}$$

Setzt man $x=\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, ſo findet ſichs

$$y=\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\tfrac{9}{10}+\tfrac{14}{2025}-\tfrac{22}{1545075}+\text{2c.}\right)$$

Setzt man $x=2$, ſo iſt

$$y=\tfrac{6}{7}+\tfrac{128}{465}-\tfrac{22528}{544435}+\text{2c.}$$

woraus man ſieht, daß dieſe Reihe auch in denen Fällen noch convergirend bleibt, in welchen die Leibnitziſche divergent wird.

§. 47.

Eben dieſe Probe mit Quotienten von drey Gliedern fiel ſo aus. Die Reihe $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7} + x^7 +$ ꝛc. in 1 dividirt, gieng $(1:x + \frac{1}{3}x - \frac{4}{45}x^3)$mal, und der Ueberreſt war

$$+\frac{44}{27\cdot 35}+x^6-\frac{8}{7\cdot 25}x^8+\frac{428}{9\cdot 33\cdot 35}x^{10} \text{ ꝛc.}$$

dieſer Ueberreſt wiederum in 1 getheilt, gieng

$$\frac{27\cdot 35}{44\,x^6}+\frac{27.27.7}{11.11.2.x^4}+\frac{241.3.7.9}{121.44.5\,x^2}$$

mal ꝛc. Demnach wenn man dieſe Brüche unter einen gemeinen Nenner bringt; ſo war der

erſte Quotient $= \frac{45+15x^2-4x^4}{45x}$

der zweyte $= \frac{571725+561330x^2+45549x^4}{26620x^6}$

ꝛc.

Demnach haben wir

$$y = \frac{45x}{45+15x^2-4x^4} - \frac{45x}{45+15x^2-4x^4.} \quad \frac{26620x^6}{571725+561330x^2+45549x^4.}$$

§. 48.

Um nun dieſe Reihe mit der vorhergehenden (§. 46.) zu vergleichen, ſo bemerke ich, daß mehr nicht als die ſechs erſten Glieder der Leibnitziſchen

nitziſchen Reihe

$$z - \tfrac{1}{3}z^2 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9}z^9 - \tfrac{1}{11}z^{11}$$

gebraucht worden, um bey der Reihe des §. 46. die drey erſten, bey der Reihe des §. 47. die zwey erſten Glieder heraus zu bringen. Denn weiter wolte ich die Rechnung ohnehin nicht verfolgen, weil dieſes ſchon genug war, um zu ſehen, wiefern die beyden heraus gebrachten Reihen convergiren würden. Jch ſetzte demnach $x = \frac{1}{2}$, und die drey erſten Glieder der Reihe des §. 46. gaben

$$\frac{6}{13} + \frac{7}{3315} + \frac{11}{4393480} = 0{,}4636475717\ldots$$

hingegen die zwey erſten Glieder der Reihe des §. 47. gaben

$$\frac{45}{97} - \frac{33275}{123281277} = 0{,}4636476I455\ldots$$

Nun aber iſt die Länge des Bogens, deſſen Tangente $= \frac{1}{2}$ iſt,

$$y = 0{,}4636476056\ldots$$

demnach iſt der erſte Ausdruck um 0,000 000 0339... zu klein, der andere aber um 0,000 000 0089 zu groß. Man ſieht hieraus, daß beyde Reihen beträchtlich convergiren; für $x = 1$, geben die drey erſten Glieder (§. 46)

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{195} - \tfrac{11}{10565} = 0{,}7853352$$

die zwey erſten Glieder (§. 47.)

$$\tfrac{45}{56} - \tfrac{33275}{1833364} = 0{,}7854217$$

Nun iſt der Bogen ſelbſt $y = 0{,}7853982 -$ demnach iſt der erſte Ausdruck um 0,0000629

zu klein, der andere aber um 0,0000235 zu groß. Man hätte von der Reihe

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9}\,\tfrac{1}{11} + \text{ꝛc.}$$

eine beträchtliche Anzahl von Gliedern addiren müſſen, um den Bogen ſo weit zu finden, daß der Fehler kleiner als 0,0001 geweſen wäre.

§. 49.

Da übrigens der Unterſchied zwiſchen beyden Methoden nicht ſehr groß iſt, ſo werden wir bey den zweygliedrigen Quotienten bleiben, und dafür eine allgemeine Formel ſuchen, woraus ſich ſodann die Bedingungen ergeben, unter welchen die dadurch herausgebrachte Reihe am meiſten convergirt. Es ſey demnach die Reihe

$$y = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + dx^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

Wird dieſe in 1 dividirt, ſo iſt der Quotient

$$= \frac{1}{ax^m} - \frac{bx^n}{aax^m} = \frac{a - bx^n}{aax^m}$$

und der Ueberreſt

$$= \frac{bb - ca}{aa}x^{2n} + \frac{bc - da}{aa}x^{3n} + \frac{bd - ea}{aa}x^{4n} + \frac{be - fa}{aa}x^{5n} + \&c.$$

für dieſen ſetze man Kürze halber

$$Ax^{2n} + Bx^{3n} + Cx^{4n} + Dx^{5n} + \&c.$$

Dividirt man nun wiederum 1 durch dieſen Ueberreſt, ſo iſt der zweyte Quotient

=

$$= \frac{1}{Ax^{2n}} - \frac{Bx^n}{AAx^{2n}} = \frac{A - Bx^n}{AAx^{2n}}$$

und der zweyte Ueberreſt

$$= \frac{BB - CA}{AA} x^{2n} + \frac{BC - DA}{AA} x^{3n} + \frac{BD - EA}{AA} x^{4n} + \&c.$$

Setzt man dieſen ebenfalls Kürze halber

$$= \alpha x^{2n} + \beta x^{3n} + \gamma x^{4n} + \delta x^{5n} + \&c.$$

und nimmt die dritte Diviſion vor, ſo wird wiederum der Quotient

$$= \frac{1}{\alpha x^{2n}} - \frac{\beta x^n}{AAx^{2n}} = \frac{\alpha - \beta x^n}{\alpha\alpha x^{2n}}$$

und der Ueberreſt

$$= \frac{\beta\beta - \gamma\alpha}{\alpha\alpha} x^{2n} + \frac{\beta\gamma - \delta\alpha}{\alpha\alpha} x^{3n} + \frac{\beta\delta - \varepsilon\alpha}{\alpha\alpha} x^{4n} + \text{rc.}$$

ſeyn rc. Da auf dieſe Art jede folgende Quotienten und Ueberreſte einerley Form haben, ſo ſieht man, wie ſie, ohne in jeden beſondern Fällen die Diviſion vorzunehmen, vermittelſt dieſer Formeln aus einander hergeleitet und berechnet werden können. Wir haben demnach ſtatt der fürgegebenen Reihe, folgende

$$y = \frac{aax^m}{a - bx^n} - \frac{aax^m}{a - bx^n} \cdot \frac{AAx^{2n}}{A - Bx^n} + \frac{aax^m}{a - bx^n} \cdot \frac{AAx^{2n}}{A - Bx^n} \cdot \frac{\alpha\alpha x^{2n}}{\alpha - \beta x^n} - \&c.$$

§. 50.

Dieſe Reihe wird nun offenbar abgebrochen, und in einem endlichen Ausdruck verwandelt, wenn einer von den Factoren A, α &c. = o wird. Man ſetze z. E. A = o. Da nun

$$A = \frac{bb - ca}{aa}$$

iſt, ſo iſt $bb - ca = o$,

folglich $a:b = b:c$.

Wenn demnach in der fürgegebenen Reihe

$$y = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + \&c.$$

die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder gleich ſind, oder überhaupt in einer geometriſchen Progreſſion fortgehen, ſo wird A = o &c. und man hat ſchlechthin

$$y = \frac{aax^m}{a - bx^n}$$

In der That giebt auch dieſer Ausdruck, wenn man ihn in eine Reihe auflöſt, eine geometriſche Progreſſion. Wir können hieraus die Folge ziehen, daß die herausgebrachte Reihe deſtomehr convergirt, jemehr die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder der Gleichheit, oder einer jeden geometriſchen Progreſſion nahe kommen.

§. 51.

Setzt man ferner $\alpha = o$, ſo erhellet auf eben dieſe Art, daß

$$A:B = B:C$$

ſey; folglich wird die Formel bey dem zweyten

Gliede

Gliede abgebrochen, wenn die Coefficienten des erſten Ueberreſtes entweder einander gleich ſind, oder in einer geometriſchen Progreſſion fortgehen. Ein gleiches hat auch für jeden folgenden Ueberreſt ſtatt.

§. 52.

Nun ſind die meiſten von denen Reihen, die langſamer convergiren, von der Art, daß die Coefficienten a, b, c, d &c. immer weniger von einander unterſchieden ſind. Wenn man daher die erſten Glieder ſolcher Reihen für ſich addirt, und die folgenden nach der erſt angegebenen Methode behandelt, ſo wird man ungleich geſchwinder dem wahren Werthe der Reihe näher kommen, als wenn man bey den erſten Gliedern angefangen hätte. Wir wollen dieſes ebenfalls durch das Beyſpiel der Leibnitziſchen Reihe

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \text{ꝛc.}$$

erläutern. Nimmt man von dieſer die fünf erſten Glieder beſonders, ſo ſind die folgenden

$$-\left(\frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{15}x^{15} - \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{19}x^{19} - \frac{1}{21}x^{21} + \text{ꝛc.}\right)$$

demnach

$$a = +\frac{1}{11} \qquad b = -\frac{1}{13} \qquad m = 11$$

$$c = +\frac{1}{15} \qquad d = -\frac{1}{17} \qquad n = 2$$

$$e = +\frac{1}{19} \qquad f = -\frac{1}{21}$$

&c.

Dieſe

Dieſe Werthe in den Formeln des §. 49. geſetzt, geben den erſten Quotienten

$$= + \frac{11(13 + 11x^2)}{13x^{11}}$$

und den erſten Ueberreſt

$$- \frac{11.4}{13.13.15}x^4 + \frac{11.8}{13.15.17}x^6 - \frac{11.12}{13.17.19}x^8 + \frac{11.16}{13.19.21}x^{10} - \text{rc.}$$

demnach

$$A = - \frac{11.4}{13.13.15} \quad B = + \frac{11.8}{13.15.17}$$

$$C = - \frac{11.12}{13.17.19} \quad D = + \frac{11.16}{13.19.21}.$$

rc.

Hieraus erhält man den zweyten Quotienten

$$= - \frac{15.13.13(17 + 2.13x^2)}{4.11.17.x^4}$$

und den zweyten Ueberreſt

$$+ \frac{13.223}{17.17.19}x^4 - \frac{13.15.482}{17.17.19.21}x^6 + \text{rc.}$$

demnach

$$\alpha = \frac{13.223}{17.17.19} \quad \beta = - \frac{13.15.482}{17.17.19.21}$$

rc.

welches den dritten Quotienten

$$= + \frac{17.17.19.(1561 + 2410x^2)}{7.13.223.223.}$$

giebt rc.

giebt ꝛc. Demnach haben wir

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{13\,x^{11}}{143 + 121\,xx}$$

$$- \frac{13.x^{11}}{(143+121\,x^2)} \cdot \frac{4.\,11.\,17.\,x^4}{15.\,13.\,13\,(17+26\,xx)}$$

$$+ \frac{13.x^{11}}{143 + 121\,xx} \cdot \frac{4.\,11.\,17.\,x^4}{15.\,13.\,13\,(17+26\,x^2)} \cdot$$

$$\frac{7.\,13.\,223.\,223.\,x^4}{17.\,17.\,19.\,(1561 + 2410\,xx)} - \text{ꝛc.}$$

Dieſe Glieder geben, wenn man $x = 1$ ſetzt, für den halben Quadranten 0, 78539982 ꝛc. welches von dem wahren Werthe nur um 0, 0000014 verſchieden iſt.

§. 53.

Bey der Reihe

$$\surd(1+x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$
$$+ \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \frac{33}{2048}x^7 - \text{ꝛc.}$$

kann man bey dem zweyten Gliede anfangen, weil von dieſem an die Zeichen ordentlich abwechſeln. Und ſo wird man

$$\surd(1+x) = 1 + \frac{2x}{4+x} + \mathfrak{A}.\frac{xx}{16+12x} - \mathfrak{B}.\frac{xxx}{64+96x}$$

$$+ \mathfrak{C}.\frac{81.xx}{16(9+13x)} - \mathfrak{D}.\frac{625.\,625.\,xx}{16.\,81(625+807x)}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

erhalten, wobey Kürze halber die Factores A, B, C, D ꝛc. die nächſt vorhergehenden Glieder bedeu-

bedeuten, und B deswegen mit xxx multipliciꝛt iſt, weil es ſich hier zuträgt, daß bey der zweyten Diviſion das erſte Glied des Ueberreſtes = 0 wird. Dieſe Reihe iſt zur Ausziehung der Quadratwurzel ſehr bequem. Es ſolle z. E. aus 2916 die Quadratwurzel ausgezogen werden, welche = 54 iſt. Wir wollen dafür 53 nehmen, und ſo läßt das Quadrat von 53 = 2809 von 2916 abgezogen, 107 übrig. Demnach haben wir

$$53\sqrt{(1 + \tfrac{107}{2890})} = 53\sqrt{(1+x)}$$

und damit die Reihe

$$\sqrt{(2916)} = 53\left(1 + \frac{214}{11343} + \frac{214}{11343}\cdot\frac{11449}{2809 \cdot 36228} \text{ ꝛc.}\right)$$

Da nun hier ſchon das dritte Glied kleiner als $\frac{1}{600000}$, das vierte aber noch

$$1 : \left(\frac{107}{2890}\right)^3 \cdot \frac{1}{64 + \frac{96 \cdot 107}{2890}}$$

mal, das iſt über 1500000 mal kleiner iſt, ſo ſieht man leicht, daß man es mehrentheils bey den zwey erſten Gliedern der Reihe

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{2x}{4+x}$$

kann bewenden laſſen.

§. 54.

Für die Cubicwurzel findet man auf eine ähnliche Art

$\sqrt[3]{(1}$

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{x}{3+x} + \mathfrak{A}.\frac{4xx}{9(6+5x)}$$
$$- \mathfrak{B}.\frac{xx}{4(9+4x)} + \text{ꝛc.}$$

und für jede Wurzel überhaupt

$$(1+x)^n = 1 + \frac{2nx}{2-(n-1)x} - \frac{(n-1)(n+1)x^2.\mathfrak{A}}{12-6(n-2)x}$$
$$+ \frac{(2n-1)^2.(n-2)x^2.\mathfrak{B}}{60(2n-1)-(n-3).(5n-2).10x} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man in dieſer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{2}$, welches für die Quadratwurzel iſt, ſo wird das dritte Glied $= 0$, und eben ſo auch die folgende Glieder. Wir haben aber ſchon in den vorhergehenden §. angezeigt, woher dieſes komme, und wie das dritte und die folgende Glieder für die Quadratwurzel müſſen gefunden werden.

§. 55.

Bey allen dieſen Reihen werden die Binomialfactoren, durch deren Multiplication die Glieder derſelben entſtehen, einander mehrentheils ungleich, und zuweilen, wie in dem Beyſpiele des §. 53. unähnlich. Ich habe daher eine andere Methode geſucht, bey welcher dieſe Ungleichheit wegbliebe, und die Reihe eben dadurch einförmiger würde. Dieſe werde ich ſo gleich herſetzen, und hier nur noch anmerken, daß, wenn bey der erſt angeführten die fürgegebene

gebene Reihe endlich iſt, auch diejenige endlich werde, in welche jene nach dieſer Methode verwandelt wird.

§. 56.

Es ſey nun die Reihe

$$y = x^m - a x^{m+n} + b x^{m+2n} - c x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

bey welcher wir ſetzen, daß die Coefficienten a, b, c &c. immer langſamer abnehmen. Man ſetze

$$1 + x^n = z$$

ſo iſt

$$\begin{aligned} yz = x^m &- a x^{m+n} + b x^{m+2n} - c x^{m+3n} + \text{ꝛc.} \\ &+ 1 \ldots \quad - a \ldots \quad + b \ldots \end{aligned}$$

demnach

$$yz - x^m = (1-a) x^{m+n} - (a-b) x^{m+2n} + (b-c) x^{m+3n} - \text{ꝛc.}$$

Da dieſe Reihe der fürgegebenen ähnlich iſt, ſo leidet ſie eben die Verwandlung, und damit iſt

$$yz^2 - x^m z - (1-a) x^{m+n} = (1-2a+b) x^{m+2n} - (a-2b+c) x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

Auf eben die Art wiederum

$$yz^3 - x^m z^2 - (1-a) x^{m+n} z - (1-2a+b) x^{m+2n} = (1-3a+3b-c) x^{m+3n} - \text{ꝛc.}$$

Fährt man auf dieſe Art immer fort, ſo erhält man nach λ Wiederholungen

$$yz^{\lambda} - x^{m} z^{\lambda-1} - (1-a)x^{m+n} z^{\lambda-2} - (1-2a+b)x^{m+2n} z^{\lambda-3} + \&c.$$

$$= (1 + \lambda a - \lambda . \frac{\lambda - 1}{2} . b + \lambda . \frac{\lambda - 1}{2} . \frac{\lambda - 2}{3} c - \&c.) x^{m+\lambda n} - \&c.$$

Und demnach, wenn man alles durch z^{λ} dividirt

$$y - \frac{x^m}{z} - \frac{(1-a)x^{m+n}}{zz} - \frac{(1-2a+b)x^{m+2n}}{z^3} + \&c. \ldots$$

$$= (1 + \lambda a - \lambda . \frac{\lambda - 1}{2} . b + \&c.) \frac{x^{m+\lambda n}}{z^{\lambda}} - \&c.$$

Iſt nun x poſitiv, ſo iſt

$$z = (1 + x^n) > x^n$$

demnach

$$z^{\lambda} > x^{n\lambda}$$

Daher wird der Bruch

$$\frac{x^m . x^{n\lambda}}{z^{\lambda}}$$

in geometriſcher Progreſſion kleiner, je gröſſer λ wird, und folglich $= 0$, wenn man $\lambda = \infty$ ſetzt. Wir ſetzen dieſes und haben demnach

$$0 = y - x^m : z - (1-a) x^{m+n} : z^2 - (1-2a+b) x^{m+2n} : z^3 - (1 - 3a + 3b - c) x^{m+3n} : z^4 - \&c.$$

eine unendliche Reihe, welche ſich, wenn man für z deſſen Werth $1+x^n$ ſetzt, in

$$y=\frac{x^m}{1+x^n}\left(1+(1-a)\frac{x^n}{1+x^n}+(1-2a+b).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2+(1-3a+3b-c).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3+\text{2c.}\right)$$

verwandelt. Und dieſes iſt die Reihe, welche wir ſuchen wolten. Man ſieht zugleich, daß ſie ſehr einförmig iſt, und daß die Coefficienten

$1-a$
$1-2a+b$
$1-3a+3b-c$
$1-4a+6b-4c+d$
2c.

die erſten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen der Coefficienten a, b, c, d &c. der fürgegebenen Reihe ſind.

§. 57.

Um ein ſehr allgemeines Beyſpiel hievon zu geben, ſo ſey die Reihe

$$y=\frac{c}{a}x^m-\frac{c+d}{a+b}x_{m+n}+\frac{c+2d}{a+2b}x^{m+2n}-\frac{c+3d}{a+3b}x^{n+3m}-\&c.$$

wobey ſowohl die Zähler als Nenner in arithmetiſcher Progreſſion fortgehen. Vergleicht man dieſe Reihe mit der Reihe (§. 56.)

$$y=ax^m-bx^{m+n}+cx^{m+2n}+\&c.$$

und

und nimmt die erſten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen, ſo erhält man die Reihe

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{c}{a} + \frac{cb-ad}{a(a+b)}.\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{(cb-ad).2b}{a.(a+b).(a+2b)}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{(cb-ad).2b.3b}{a.(a+b).(a+2b).(a+3b)}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \text{rc.}\right)$$

welche nach einem ſehr einfachen Geſetze fortgeht. Hier ſind nun einige beſondere Fälle.

§. 58.

Es ſey

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{2a}x^{m+n} + \frac{1}{3a}x^{m+2n} - \&c.$$

ſo iſt $c=1$, $d=0$, $a=b$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a}.\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1}{3a}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{1}{4a}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \&c.\right)$$

Setzt man hier $a=m=n=1$, ſo iſt

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{rc.} = \log.(1+x)$$

und

$$y = \frac{x}{1+x} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \&c. = \log.(1+x).$$

§. 59.

Es ſey

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{a+b}x^{m+n} + \frac{1}{a+2b}x^{m+2n} - \text{rc.}$$

ſo iſt $c = 1$, $d = 0$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+b)} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{b \cdot 2b}{a(a+b) \cdot (a+2b)} \cdot \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \text{rc.}\right)$$

Setzt man hier $n = 2$, $b = 2$, ſo iſt

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{a+2}x^{m+2} + \frac{1}{a+4}x^{m+4} - \text{rc.}$$

und

$$y = \frac{x^m}{1+xx}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a(a+2)}\left(\frac{xx}{1+xx}\right) + \frac{2 \cdot 4}{a(a+2) \cdot (a+4)}\left(\frac{xx}{1+xx}\right)^2 + \text{rc.}\right)$$

Von dieſen beyden Reihen iſt erſtere ein Stück der Leibnitziſchen, ſobald man für a und m eine gleiche ungerade Zahl ſetzt. Man mache z. E. $a = m = 21$, und $x = 1$, ſo erhält man

$$y = \tfrac{1}{21}x^{21} - \tfrac{1}{23}x^{23} + \tfrac{1}{25}x^{25} - \tfrac{1}{27}x^{27} + \text{rc.}$$

und

$$y = \tfrac{1}{42}\left(1 + \tfrac{1}{23} + \frac{1 \cdot 2}{23 \cdot 25} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{23 \cdot 25 \cdot 27} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{23 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29} + \text{rc.}\right)$$

IV.

Algebraiſche Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

§. 1.

In den Anfangsgründen der Trigonometrie wird die Verfertigung der trigonometriſchen Tafeln gewöhnlich ſo angegeben, wie ſie ſich aus der Elementargeometrie begreiflich machen läßt, und wie dieſe Tafeln in der That anfangs verfertigt worden. Man kann nemlich vermittelſt des Circuls und Lineales den Circul in 2, 3, 4, 5 gleiche Theile theilen, und jeden Bogen, ſo vielmal man will, halbiren. Daraus läßt ſich ſodann herleiten, wie ſich der Circul von 3 zu 3 Graden, oder von 45 zu 45 Min. oder von 675 zu 675 Secunden eintheilen, und die Sinus, Tangenten und Secanten von allen dieſen Bögen berechnen laſſen. Dieſe Berechnungsart iſt ungemein weitläuftig. Man hat daher ſeit der Erfindung der Infiniteſimalrechnung auf Mittel gedacht, ſie abzukürzen, und jede Sinus, Tangenten und Secanten für ſich zu finden, ohne daß ſie erſt aus einander hergeleitet werden müſten. Dazu müſten nun allerdings unendliche Reihen gebraucht

braucht werden, dafern man nicht bey den imaginairen Formeln, die Herr Joh. Bernoulli zuerſt gefunden, ſtehen bleiben wollte, als welche, wenn man ſie nicht in unendliche Reihen verwandelt, fürnemlich nur zu Erfindung von Lehrſätzen dienen.

§. 2.

Will man aber für die Sinus und Tangenten algebraiſche Formeln haben, die weder imaginair ſind, noch aus unendlich vielen Gliedern beſtehen, ſo bleibt man eben ſo zurücke, wie die erſten Berechner der trigonometriſchen Tafeln, weil man ſie ebenfalls nur von 3 zu 3 Graden berechnen kann, und die dazwiſchen fallenden, durch fortgeſetztes Halbiren, finden muß. Da mir ſolche Formeln noch nicht vorgekommen, ſo unterzog ich mich der Arbeit ſie zu finden, um ausführlich zu ſehen, auf welche Art die Sinus von 3 zu 3 Graden mehr oder minder irrational ſind. Folgende Tabelle ſtellt ſie mit einem Anblicke vor Augen.

Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

$$\sin. 3^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
$$- \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin. 6^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{5} - \tfrac{1}{8}$$

$$\sin. 9^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$\sin. 12^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3}$

$\sin. 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$

$\sin. 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$

$\sin. 21^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$\sin. 24^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

$\sin. 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin. 33^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\sin. 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

$\sin. 39^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 42^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

$\sin. 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 48^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{1}{8}\sqrt{3}$

$\sin. 51^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}$

$\sin. 57^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\sin. 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin. 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 66^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

$\sin. 69^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15 - 3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\quad + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$

$\sin. 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$

$\sin. 75^\circ = \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{1}{8}}$

$\sin. 78^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{1}{8}$

$\sin. 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$

$\sin. 84^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{8}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$

$\sin. 87^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}$
$\quad + \frac{1}{8}\sqrt{(15 + 3\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 90^\circ = 1.$

§. 3.

Bey der Berechnung dieſer Formeln legte ich die Sinus von 45, 30, 18 Graden zum Grunde, weil von dieſen, jeder für ſich, aus der Elementargeometrie gefunden werden muß. Die übrigen Formeln fanden ſich ſodann aus den bekannten zween Lehrſätzen

$\sin. (x + y) = \sin. x. \cos. y + \cos. x. \sin. y$

$\sin. (x - y) = \sin. x. \cos. y - \cos. x. \sin. y.$

Sie müßten aber nach einer gewiſſen Ordnung gefunden werden, damit man aller Reductionen überhoben ſeyn könne. Die Ordnung, ſo ich dabey beobachtet, iſt folgende:

I°. $\sin. 60^\circ = \cos. 30 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

II°. $\sin. 75^\circ = \sin. (45 + 30)$

$\sin. 15^\circ = \sin. (45 - 30)$

III°. $\sin. 72^\circ = \cos. 18^\circ$

IV°.

IV°. $\sin. 54^\circ = \sin.(72 - 18)$

$\sin. 36^\circ = \cos. 54^\circ = \sin.(2.18)$

V°. $\sin. 12^\circ = \sin.(30 - 18)$

$\sin. 48^\circ = \sin.(30 + 18)$

$\sin. 24^\circ = \sin.(54 - 30)$

$\sin. 84^\circ = \sin.(54 + 30)$

$\sin. 6^\circ = \sin.(36 - 30)$

$\sin. 66^\circ = \sin.(36 + 30)$

$\sin. 42^\circ = \sin.(72 - 30)$

$\sin. 78^\circ = \sin. 102^\circ = \sin.(72 + 30)$

VI°. $\sin. 81^\circ = \sin. 99^\circ = \sin.(54 + 45)$

$\sin. 9^\circ = \sin.(54 - 45)$

$\sin. 63^\circ = \sin. 117^\circ = \sin.(72 + 45)$
$= \sin.(45 + 18)$

$\sin. 27^\circ = \sin.(72 - 45) = \sin.(45 - 18)$

VII°. $\sin. 3^\circ = \sin.(48 - 45)$

$\sin. 87^\circ = \sin. 93^\circ = \sin.(48 + 45)$

$\sin. 21^\circ = \sin.(45 - 24)$

$\sin. 69^\circ = \sin.(45 + 24)$

$\sin. 33^\circ = \sin.(45 - 12)$

$\sin. 57^\circ = \sin.(45 + 12)$

$\sin. 39^\circ = \sin.(45 - 6)$

$\sin. 51^\circ = \sin.(45 + 6)$.

§. 4.

In eben dieſer Ordnung werden auch die Formeln ſelbſt zuſammengeſetzter. Vergleicht man ſie miteinander, in Abſicht auf die Irrationalität, ſo findet ſich, daß ſie aus 15 verſchiedenen Arten von Wurzelgröſſen zuſammengeſetzt ſind, und daß ſie ſich, wenn man einmal

dieſe gefunden, durch bloßes Addiren und Subtrahiren berechnen laſſen. Die Wurzelgröſſen ſind

	$\sqrt{(1:2)}$	$\sqrt{(5+\sqrt{5})}$	$\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{(3:2)}$	$\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$	$\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{(5:2)}$	$\sqrt{(15+3\sqrt{5})}$	$\sqrt{(15-3\sqrt{5})}$
$\sqrt{15}$	$\sqrt{(15:2)}$	$\sqrt{(30+6\sqrt{5})}$	$\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$

§. 5.

Weiter geht nun die Elementargeometrie nicht, als daß ſie noch Mittel giebt, durch fortgeſetztes Halbiren, die Sinus für kleinere Bögen zu finden. Die einfachſte Art, dieſes durch Rechnung zu verrichten, geben folgende beyden Formeln an

$$\sin.\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin.y)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin.y)}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin.y)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin.y)}$$

welche durch die Auflöſung der Gleichung

$$\sin.y = 2\sin.\tfrac{1}{2}y.\cos.\tfrac{1}{2}y$$

leicht gefunden werden. Werden dieſe beyde Formeln addirt und ſubtrahirt, ſo erhält man

$$\cos.\tfrac{1}{2}y + \sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1+\sin.y)}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}y + \sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1-\sin.y)}$$

Multiplicirt man dieſe mit

$$\sin.45° = \cos.45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ſo iſt

$$\sin.45°.\cos.\tfrac{1}{2}y + \cos.45°.\sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1+\sin.y}{2}\right)}$$

$$\sin.45°.\cos.\tfrac{1}{2}y - \cos.45°.\sin\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1-\sin.y}{2}\right)}$$

dem-

demnach $\sin.(45° + \frac{1}{2}y) = \sqrt{\left(\frac{1 + \sin. y}{2}\right)}$

$\sin.(45° - \frac{1}{2}y) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin. y}{2}\right)}$

§. 6.

Aus den vorhin angeführten Formeln laſſen ſich noch einige ſpeciale trigonometriſche Lehrſätze herleiten, wenn man ſie unter einander vergleicht. So z. E. iſt

$\sin. 75° - \sin. 15° = 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sin. 45°$

$\sin. 75° . \sin. 15° = \frac{1}{4}$

$\mathrm{tang}. 15° = 2 - \sqrt{3} = 2 - \mathrm{tang}. 60°$

$\mathrm{tang}. 75° = 2 + \sqrt{3} = 2 + \mathrm{tang}. 60°$

$\mathrm{tang}. 15° + \mathrm{tang}. 75° = 4.$

Eben ſo auch

$\sin. 54° - \sin. 18° = \frac{1}{2} = \sin. 30°$

$\sin. 54° . \sin. 18° = \frac{1}{4}$

$\mathrm{tang}. 18° . \mathrm{tang}. 54° = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$\sin. 36° . \sin. 72° = \frac{1}{4}\sqrt{5}$

$\mathrm{tang}. 18° + \sec. 18° = \mathrm{tang}. 54°$

$\sin. 18° + \sin. 54° = \frac{3}{4} = \sin. 60°$

$\cos. 18° + \cos. 54° = \frac{5}{4}$

ingleichen

$\sec. 30° = \frac{1}{2}(\mathrm{tang}. 30° + \mathrm{tang}. 60°)$

$= \frac{4}{3}\sin. 60°.$

V.

V.

Vorläufige Kenntniſſe für die, ſo die Quadratur und Rectification des Circuls ſuchen.

§. 1.

Ich kann mit einigem Grunde zweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde geleſen, oder auch verſtanden werden, die den meiſten Antheil daran nehmen ſollten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Circuls zu ſuchen. Es wird ſicher genug immer ſolche geben, und ſolte man die, ſo in den folgenden Zeiten ſich damit beſchäftigen, nach denen beurtheilen, die ſich bisher damit beſchäftigt haben, ſo werden es gröſtentheils ſolche ſeyn, die von der Geometrie wenig verſtehen, und ihre Kräfte zu ſchätzen nicht im Stande ſind. Was aber den meiſten an Erkenntniß und Verſtand abgeht, und wo ſie mit richtigen und zuſammenhängenden Schlüſſen nicht ausreichen, das erſetzt die Ruhm- und Geldbegierde durch Sophismata, die öfters auch weder ſehr fein, noch ſehr verſteckt ſind. Es hat auch Fälle gegeben, wo ſolche Leute feſte geglaubt

glaubt haben, man verſage ihren vermeyn-ten Beweiſen den Beyfall bloß aus Neid und Mißgunſt. Es geht auch unter ihnen eine Sage herum, als wenn in England und Holland eben ſo groſſe Preiße und Belohnungen wären auf die Quadratur des Circuls geſetzt worden, als auf die Erfindung der geographiſchen Länge zur See. Ich will zwar eben nicht gut dafür ſtehen, ob man nicht zu Anfange des vorigen Jahrhunderts, oder noch vorher, geglaubt hat, daß die Erfindung der Länge zur See mit der Quadratur des Circuls in einer ſolchen Verbindung ſtehe, daß, wer letztere gefunden, zugleich auch erſtere gefunden habe. So viel iſt gewiß, daß man damals Verhältniſſe zwiſchen Wahrheiten ſuchte und glaubte, die noch vielweniger zuſammen paßten. Solte aber in der That wegen der Länge zur See ein Preiß auf die Quadratur des Circuls geſetzt worden ſeyn, ſo glaube ich, daß das Parlement in England ein ſehr gutes Werk thun würde, wenn es, zumal da nun die Preiße für die Länge zur See ſchon ausgetheilt worden, in allen Zeitungen kund machen lieſſe, daß man ſich bey der Quadratur des Circuls auf keinen Preiß Rechnung zu machen habe. In der That hat man ſich auch keine Rechnung darauf zu machen, weil man heutiges Tages viel zu wohl weiß, wie ſehr die Länge zur See von der Quadratur des Circuls unabhängig iſt.

§. 2.

Die Erfindung von Sachen, die lange vergebens geſucht worden, iſt entweder an ſich unmöglich, oder ſie iſt einem künftigen glücklichen Zufall vorbehalten. Ein Beyſpiel mag dieſes erläutern. Es iſt nicht zu zweiffeln, daß die alten Phoeniciſchen, und nach ihnen die Griechiſchen und Römiſchen Schiffer ein Mittel gewünſcht haben, welches ihnen bey trübem Wetter eben ſo den Weg des Schiffes zeigte, als ihn bey hellem Wetter die Geſtirne zeigten. Wie hätte ihnen in Sinn kommen ſollen, daß ſie dieſes Mittel in dem Magnetſteine zu ſuchen hätten? Es iſt unſtreitig, daß dieſe Entdeckung auf einen ſchlechthin unvorgeſehenen Zuſammenlauf mehrerer Umſtände ankäme, den man, ohne ihn vorher zu wiſſen, nicht veranſtalten konnte, und der folglich ſich von ſelbſt darbieten muſte. Auf eine ähnliche Art iſt es zu vermuthen, daß, wenn je die Quadratur des Circuls möglich ſeyn ſolte, ſie vielleicht einem Meßkünſtler aufſtößt, der an nichts wenigers als an die Erfindung derſelben gedenkt. Es iſt aber auch möglich, daß man auf eine eben ſo zufällige Weiſe auf irrige Quadraturen verfalle. Hievon geben die Zahlen 1225 und 961 ein artiges Beyſpiel. Sie haben eine gedoppelte Eigenſchaft. Denn einmal ſind es die Quadratzahlen von 35 und 31. Sodann verhalten ſie ſich beynahe wie das Quadrat

des

des Diameters zum Inhalt des Circuls. Dadurch erhält man auch, daß der Diameter des Circuls zu der Seite eines mit dem Circul gleichräumigen Quadrates beynahe wie 35 zu 31 iſt. Sodann, wenn man 961 vierfach nimt, ſo erhält man 3844 ebenfalls eine Quadratzahl, und der Diameter wird ſich zum Umkreiſe beynahe wie 1225 zu 3844 verhalten. Nur muß man dieſes beynahe nicht ſehr ſtrenge nehmen. Denn theilt man 3844 durch 1225, ſo kömmt 3,138... Und da ſieht man leicht, daß dieſe Verhältniß ſchon in der 3ten Decimalſtelle von 3,1415926... abweicht, und daher lange nicht ſo genau iſt, als die Archimediſchen 22:7, welche die Reihe 3,1428571...giebt, die nur um 0,0012645... zu groß, und damit faſt dreymal genauer iſt.

§. 3.

Indeſſen behalten die Zahlen 1225 und 961, oder 1225 und 3844 dennoch dadurch einen gewiſſen Werth, daß es Quadratzahlen ſind. In dieſem Jahrhundert ſind, ſo viel ich weiß, ihrer drey darauf verfallen. Dieſer Umſtand ſcheint mir der merkwürdigſte. Denn da es noch mehrere ſolcher Quadratzahlen giebt, ſo ſolte man ehender denken, daß jeder von dieſen drey Erfindern auf andere Zahlen würde verfallen ſeyn. Der erſte war Herr von Leiſtner, Kayſerl. Rittmeiſter. Er fand die Zahlen 1225 und 3844, und dieſe wurden von einer Kayſerl. Hofcommiſſion als unrichtig erkannt, wowider

aber

aber in einer Anno 1740 herausgekommenen Schrift, Nodus gordius &c. proteſtirt wurde. Der andere war Herr Merkel, Prediger zu Rakensburg in Schwaben. Seine Schrift kam erſt Anno 1751 heraus. Er ſagt aber, daß er lange vor dem Herrn v. Leiſtner ſeine Zahlen 1225 und 961 zufälliger Weiſe gefunden habe, er ſey aber erſt durch den Nodum gordium bewogen worden, ſie auf alle Proben zu ſetzen; was ihn aber fürnemlich aufgebracht habe, ſie durch den Druck bekannt zu machen, ſey ein Articul in der Utrechter Zeitung geweſen, wo eine Quadratur angekündet, und der vermeyntlich darauf geſetzte Preiß angefordert wurde; dieſe Nachricht habe ihm um ſo geſchwinder die Feder in die Hand gegeben, weil er den vorhergehenden Winter ſeine Zahlen einen Franzoſen, der wirklich nachher in die Niederlande verreiſete, vorgerechnet, und auf das Papier nicht weiter Achtung gegeben, und ſo habe er ſtarke Gründe zu vermuthen, dieſer Geometra möchte mit ſeinem Kalbe gepflügt haben ꝛc. Was damit nun weiter vorgegangen, iſt mir nicht bekannt. Es wurde aber die Merkelſche Schrift Anno 1765 von Herrn Prof. Biſchoff zu Alten-Stettin mit Anmerkungen und noch mehrerern Prüfungen wiederum aufgelegt, und die Zahlen 1225 und 961 als richtig erklärt. Bald darauf kamen ſie im Anfange des 1766ſten Jahres in den Zeitungen wiederum zum Vorſchein, mit der

ſolen-

ſolennen Ankündigung, daß man fernerhin die Quadratur des Circuls nicht mehr zu ſuchen nöthig habe, weil ſie bereits, und zwar zum drittenmale gefunden worden ꝛc. Es wäre eben nicht übel gethan, wenn viele, die noch künftighin ſich an die Sache machen werden, dieſes ganz feſte glaubten, weil ſie dadurch überhoben wären, Mühe, Zeit und Kräfte zu verliehren, die man als ſehr vergebens angewandt anſehen kann, weil die meiſten von denſelben kaum eine leichte geometriſche Aufgabe zu erfinden und aufzulöſen im Stande ſind. Es iſt auch kaum zu zweifeln, daß nicht auch künftig noch die Merkelſche und Leiſtnerſche Zahlen wieder aufgewärmt zum Vorſchein kommen ſolten. Die Hauptprobe von ihrer Unrichtigkeit iſt, daß 3844 durch 1225 getheilt, die Ludolphiſche Zahlen geben ſolte. Herr Prof. Biſchoff nimmt auch dieſe Ludolphiſche, und ſogar die über doppelt weiter reichende Sherwinſche Zahlen vor, er ſieht ſie aber nicht als Probierſteine an, ſondern ſagt, daß ſie zwar gar ſehr nahe zutreffen, dabey aber den Inhalt des Circuls nicht völlig genau geben, demnach müſte man auf andere Proben bedacht ſeyn. Von ſolchen Proben führt Herr Biſchoff 8 an, und macht auf dieſe Art die Sache ſcheinbar. Es iſt unſtreitig, daß wenn 3844 durch 1225 getheilt, die bis auf 32 Decimalſtellen reichende Ludolphiſche Zahlen genau geben würde, man

damit eines Theils ſehr wohl zufrieden ſeyn könnte, andern Theils aber ſehen müſte, ob man durch dieſe Diviſion auch die bis auf 72 Decimalſtellen reichende Sherwinſche Zahlen, und ſodann die bis auf 100 Decimalſtellen reichende Machinſche, oder endlich die bis auf 127 Decimalſtellen reichende Lamyſche Zahlen heraus bringen würde. Man könnte ſodann um ſo mehr noch mit der Proportion 3844 : 1225 zufrieden ſeyn. Allein nimmt man bemeldte Diviſion vor, ſo fängt der Quotient 3, 138.... ſchon in der zweyten Decimalſtelle an, von den Ludolphiſchen Zahlen abzuweichen. Und überdies ſind alle die 8 Proben von der Art, daß jede beliebige zwo Quadratzahlen dieſelbe aushalten. Ich werde mich aber nicht verweilen, dieſes hier zu zeigen, ſondern vielmehr angeben, wie ſich nach einer allgemeinen Regel ſolche Quadratzahlen finden laſſen, welche die Verhältniß des Quadrats des Diameters zum Inhalte des Circuls deſto genauer angeben, je gröſſer ſie ſind. Dieſes mag unter andern auch dahin dienen, daß man künftig nicht nöthig habe, erſt zufälliger Weiſe auf ſolche Quadratzahlen zu verfallen, und ſie als ganz richtige Quadraturen des Circuls anzugeben.

§. 4.

Man nehme zwo Quadratzahlen aa, bb, ſo, daß wenn a der Diameter des Circuls,

dem-

demnach aa deſſen Quadrat iſt, ſodann bb den Inhalt eines mit dem Circul gleichräumigten Quadrates, und daher b die Seite deſſelben vorſtelle. Auf dieſe Art wird ſich aa zu 4bb wie der Diameter zum Umkreiſe, oder wie 1 zu 3, 141592, 653589, 793238, 462643, 383279, 502884, 197169, 399375, 105820, 974944, 592307, 816406, 286208, 998628, 034825, 342117, 067982, 148086, 513272, 306647, 093844, 6 + ... = 1 : π verhalten. Demnach iſt $aa : 4bb = 1 : \pi$
und hieraus folgt

$$a : b = 2 : \sqrt{\pi}.$$

Es iſt aber $\sqrt{\pi} = 1, 77245385075 \ldots.$
Und hieraus findet ſich

$$a:b = \frac{2,00000000000}{1,77245385075} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{26 + \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

Dieſes giebt der Ordnung nach

$b:a =$	$7 : 8 + \ldots$	und $bb : aa =$	$49 : 64 +$
$=$	$8 : 9 - \ldots$	$=$	$64 : 81 -$
$=$	$31 : 35 + \ldots$	$=$	$961 : 1225 +$
$=$	$39 : 44 - \ldots$	$=$	$1521 : 1936 -$
$=$	$109 : 123 + \ldots$	$=$	$11881\ 15129 +$
$=$	$148 : 167 - \ldots$	$=$	$21904 : 27889 -$
$=$	$3848 : 4342 + \ldots$ ꝛc.	$=$	$14807104 : 18852964 +$ ꝛc.

 Dieſe

Dieſe Brüche ſind nun der Ordnung nach genauer. Man ſieht auch hieraus, daß die Herren von Leiſtner, Merkel, Biſchoff ꝛc. nur zufälliger Weiſe auf ihre Zahlen 961, 1225 verfallen ſind. Denn die Rechnung mit 49:64 oder 64:81 wäre immer viel leichter und kürzer geweſen, und mit 1521:1936, oder 11881:15129 ꝛc. würde ſie zwar weitläuftiger, dabey aber genauer geweſen ſeyn.

§. 5.

Es iſt aber überhaupt mehr anzurathen, ſchlechthin nur die erſten von dieſen Verhältniſſen nemlich b:a zu gebrauchen. Denn für bb:aa hat man andere Brüche, die, ohne eben Quadratzahlen zu ſeyn, viel kleiner und viel genauer ſind, indem man nach eben dieſer Art zu verfahren

$$\begin{aligned} bb:aa = \pi:4 &= 11:14 \\ &= 172:219 \\ &= 355:452 \text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

findet. Es drücken aber die Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{39}{44}$, $\frac{109}{123}$, $\frac{148}{167}$, $\frac{3848}{4342}$ ꝛc. die Seite eines Quadrates aus, welches ſo groß als die Fläche eines Circuls iſt, deſſen Diameter = 1 angenommen wird. Und hinwiederum ſtellen eben dieſe Brüche umgekehrt, oder $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{35}{31}$,

$\frac{44}{39}, \frac{123}{109}, \frac{167}{148}, \frac{4342}{3848}$ ꝛc. den Diameter eines Cir-
culs vor, deſſen Inhalt = 1 iſt. Und in dieſer Abſicht laſſen ſie ſich bey Ausmeſſung von Cylindern, und bey Verfertigung der cylindriſchen Viſirſtäbe gebrauchen. Beſonders iſt hiezu der Bruch $\frac{167}{148}$ dienlich, weil derſelbe unter den kleinern der genaueſte iſt, und erſt in der ſiebenden Decimalſtelle anfängt von dem wahren abzuweichen. Denn rechnet man nach, ſo findet ſich der Diameter des Circuls, deſſen Inhalt = 1 iſt, vermittelſt der Ludolphiſchen Zahlen = 1,1283790...

Es iſt aber $\frac{167}{148}$ = 1,1283784...

demnach der Unterſchied = 0,000 000 6...
Es geſchieht ſelten, daß man dieſen Diameter in practiſchen Fällen genauer zu wiſſen verlangt.

§. 6.

Da es, wenn man den Diameter einer Kugel mit der Seite eines gleichräumigten Würfels vergleicht, ebenfalls möglich iſt, auf ſolche Cubiczahlen zu verfallen, woraus man die Quadratur des Cirkels, oder die Cubatur der Sphären erträumen könnte; ſo wird es eben nicht undienlich ſeyn, ſolchen künftigen Vorfällen vorzubeugen, und ſolche Cubiczahlen nach eben der Methode voraus zu beſtimmen, zumal da ſie bey Berechnung des räumlichen Inhalts der Kugeln, und bey Verfertigung der

Caliberſtäben mit Vortheil gebraucht werden können. Es ſey demnach der Diameter der Kugel = a, die Seite des gleichräumigten Würfels = b, die Ludolphiſche Zahlen 3,1415926... = π, ſo iſt nach der bekannten Archimediſchen Regel

$$b^3 : a^3 = \pi : 6$$

demnach $$b : a = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Nun iſt

$$\pi = 3,141592,653589,793238,462\ldots$$
$$\tfrac{1}{6}\pi = 0,523598,775598,298873,077\ldots$$

Und hieraus die Cubicwurzel

$$b:a = 0,805995,977008,234820\ldots$$

welche in einen immer fortgehenden Bruch aufgelöſt

$$b:a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\text{ꝛc.}}}}}}}}$$

giebt. Hieraus erhält man nun

$$\begin{aligned} b:a &= 4:5 + \\ &= 25:31 - \\ &= 54:67 + \\ &= 457:567 - \\ &= 2796:3469 + \\ &= 17233:21381 - \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Dem-

Demnach, wenn der Diameter einer Kugel $= 1$ iſt, ſo wird die Seite eines gleichräumigten Würfels durch jeden der Brüche $\frac{4}{5}, \frac{25}{31}, \frac{54}{67}, \frac{457}{567}, \frac{2796}{3469}, \frac{17233}{21381}$ ꝛc. deſto genauer ausgedrückt, je gröſſer derſelbe iſt. Cubirt man dieſe Brüche, ſo geben ſie den Inhalt der Kugel. Setzt man aber den körperlichen Inhalt der Kugel $= 1$, ſo ſtellen eben dieſe Brüche umgekehrt $\frac{5}{4}, \frac{31}{25}, \frac{67}{54}, \frac{567}{457}, \frac{3469}{2796}, \frac{21381}{17233}$ ꝛc. den Diameter der Kugel vor. Man kann ſich mehrentheils mit dem Bruche $\frac{567}{457}$ begnügen, weil derſelbe, wenn man nachrechnet, den Diameter der Kugel eben ſo genau giebt, als man denſelben vermittelſt der logarithmiſchen Tabellen findet.

§. 7.

Ich habe bey dieſer Rechnung die Cubicwurzel von $\frac{1}{6}\pi$ bis auf die 18te Decimalſtelle geliefert. Da es nun eine verdrüßige und ungemein langwierige Arbeit wäre, wenn man ſie nach den gemeinen Regeln bis ſo weit ſuchen wolte, ſo wird es nicht undienlich ſeyn, wenn ich noch beyfüge, wie ich dieſe Wurzel vermittelſt einer einigen Regel de tri gefunden, und zugleich, wie ich mich verſichert habe, daß ſie bis auf die 18te Decimalſtelle richtig iſt.

§. 8.

Nach der Newtonſchen Binnomialformel iſt überhaupt

$$x = (a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + n.\frac{n-1}{2}.a^{n-2} b^2 + \&c.$$

Man multiplicire nun dieſe Reihe mit $1 + zb:a$, und in dem Producte

$$x\left(1 + \frac{zb}{a}\right) = a^n + n a^{n-1} b + n.\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \text{etc.}$$

$$+ z a^{n-1} b + n.z.a^{n-2} b^2 + n.\frac{n-1}{2}.z a^{n-3} b^3 + \text{etc.}$$

ſetze man, um z zu beſtimmen, das dritte Glied

$$n.\frac{n-1}{2}.a^{n-2} b^2 + n.z.a^{n-2} b^2 = 0$$

ſo iſt $z = -\frac{n-1}{2}$

Wird nun dieſer Werth von z in dem Producte geſetzt, ſo erhält man

$$x\left(1 - \frac{n-1}{2}.\frac{b}{a}\right) = a^n + \frac{n+1}{2} a^{n-1} b + * - n.\frac{n-1}{2}.\frac{n+1}{6} a^{n-3} b^3 - \&c.$$

und hieraus

x =

$$x = (a+b)^n = \left(\frac{2a+(n+1)b}{2a-(n-1)b}\right)a^n + * - \frac{n.(n-1).(n+1)a^{n-2}b^3}{6(2a-(n-1)b)} - \&c.$$

Von dieſer Reihe wird das erſte Glied zur Beſtimmung der Wurzel gebraucht, das zweyte aber dient, um zu finden, wie weit man mit dem erſten ausreicht.

§. 8.

Nun iſt für die Cubicwurzel $n = \frac{1}{3}$. Setzt man dieſen Werth, ſo erhält man nach den behörigen Reductionen die Formel

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \frac{3a+2b}{3a+1b}.\sqrt[3]{a} + * + \frac{2b^3.\sqrt[3]{a}}{81a^3+27aab} + \&c.$$

Dieſe habe ich nun, um aus

$a+b = \frac{1}{6}\pi = 0{,}523598{,}775598{,}298873{,}077\ldots$

die Cubicwurzel zu ziehen, folgendermaſſen angewandt. Erſtlich fand ich, vermittelſt der Logarithmen die ſechs erſten Decimalſtellen dieſer Wurzel. Dieſe ſind

$$0{,}805995 = \sqrt[3]{a}$$

Und da

$$805995 = 806000 - 5$$

iſt, ſo lieſſe ſich hievon der Cubus leicht finden. Ich ſetzte demnach denſelben

$$0,52359687152044987 5 = a$$

und dadurch erhielt ich

$$b = 0,0000019040777848998077107\ldots$$

Da nun, wenn man das erſte Glied der Reihe

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \frac{3a+2b}{3a+b}.\sqrt[3]{a}$$

allein beybehält, dieſes die Regel de tri giebt

$$(3a+b):(3a+2b) = \sqrt[3]{a}:x$$

oder $(a+\frac{1}{3}b):(a+\frac{2}{3}b) = \sqrt[3]{a}:x$,

ſo durfte ich nur die Werthe von a und b ſetzen, um den Werth

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0,805995977008234820\ldots$$

zu erhalten. Daß nun aber dieſer Werth bis auf die 18te Decimalſtelle richtig ſeye, fand ich vermittelſt des zweyten Gliedes der Reihe

$$\frac{2b^3.\sqrt[3]{a}}{81a^3+27a^2b}$$

durch einen leichten Ueberſchlag. Denn da b um 275000 mal kleiner iſt als a, ſo konnte ich dieſes Glied

$$\frac{2b^3}{81a^3}.\sqrt[3]{a}$$

ſetzen. Nun iſt

$$3\log.b:a = 0,6820508 - 17$$

$$\log.\frac{2}{81} = 1,6074550$$

demnach $\log.\frac{2b^3}{81a^3} = 0,9145458 - 19.$

Da

Da nun hier die Characteriſtica $= - 19$, und $a < 1$ iſt, ſo iſt klar, daß

$$\frac{2b^3}{81a^3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

einen Decimalbruch vorſtellt, der erſt auf der 19ten Decimalſtelle anfängt. Und ſo iſt die durch

$$x = \frac{3a+2b}{3a+b} \cdot \sqrt[3]{a}$$

gefundene Decimalreihe bis auf die achtzehnte Stelle genau.

§. 9.

Ob die Verhältniß des Diameters zum Umkreiſe durch einen rationalen Bruch ausgedrückt werden könne, iſt, meines Wiſſens, noch nicht erörtert. Sturm hat zwar dieſe Frage zu verneinen geſucht: allein ſein Beweis iſt mangelhaft, weil es allerdings unendliche Reihen giebt, deren Summa rational iſt, ungeachtet alle Glieder irrational ſind. Da demnach die Sache noch zu erörtern bleibt, ſo kann es immer noch Leute geben, die mit Aufſuchung ſolcher rationalen Brüche ihre Zeit verlieren, oder durch irrige Schlüſſe dergleichen auf die Bahn bringen. Nun iſt zwar bey jedem, vermittelſt der Ludolphiſchen Zahlen, die Probe bald gemacht. Allein, wenn auch der fürgegebene Bruch dadurch verworffen wird, ſo kann noch immer die Luſt bleiben, andere zu ſuchen. Nun läßt ſich dieſe Luſt ſo

geringe

geringe machen, daß man das Aufſuchen ſolcher Brüche leicht wird bleiben laſſen. Denn wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreiſe ſich genau durch einen rationalen Bruch ausdrücken lieſſe, ſo kann man aus den oben (§. 4.) angeführten **Lamyſchen** Zahlen, oder auch aus den **Ludolphſchen** Zahlen erweiſen, daß es ein ſehr groſſer Bruch ſeyn müſſe. Dieſe Zahlen laſſen ſich nemlich in Brüche verwandeln, welche der Ordnung nach gröſſer und zugleich auch genauer werden. Die Methode und die dabey zu gebrauchende Vorſichtigkeit, habe ich in der Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** §. 17. angezeigt und durch Beyſpiele erläutert. Nach dieſer Methode fand ich für das Verhältniß des Diameters zum Umkreis folgende rationale Brüche oder Verhältniſſe

1	:	3
7	:	22
106	:	333
113	:	355
33102	:	103993
33215	:	104348
66317	:	208341
99532	:	312689
265381	:	833719
364913	:	1146408
1360120	:	4272943
1725033	:	5419351
25510582	:	80143857

52746197 : 165707065
78256779 : 245850922
131002976 : 411557987
340262731 : 1068966896
811528438 : 2549491779
1963319607 : 6167950454
4738167652 : 14885392687
6701487259 : 21053343141
567663097408 : 1783366216531
1142027682075 : 3587785776203
1709690779483 : 5371151992734
2851718461558 : 8958937768937
10722327385 7129 : 33685184943403
3245215400 32945 : 10195144860991 46 ꝛc.

Von dieſen Verhältniſſen iſt nun jede folgende genauer als die vorhergehende, und zwiſchen dieſelben fällt keine rationale Verhältniß, die genauer wäre, als die nächſt gröſſere unter den hier angegebenen. Demnach wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreiſe durch ganze Zahlen genau ſollte ausgedrückt werden können, ſo müſten dieſe Zahlen nothwendig gröſſer als die letzten

3245215400 32945 : 10195144860991 46

von den hier angegebenen ſeyn. Dieſe zwo Zahlen geben die Ludolphiſche bis auf die 25te Decimalſtelle. Wenn ſie aber auch ganz genau wären, ſo ſieht man leicht, daß es weitläuftig und beſchwerlich wäre damit zu rechnen. Uebrigens entſtehen alle dieſe Verhältniſſe aus der Fractio continua

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{2+a}}}}}}}}}}}}}}$$

wobey $a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{3+\text{ꝛc.}}}}}}}}}}}}}$

iſt.

iſt. Weiter habe ich die Berechnung von dieſer Fractio continua aus den **Ludolphiſchen** Zahlen nicht verfolgt. Und ſo werde ich auch nicht ſagen, ob ſie, wenn weiter fortgerechnet wird, irgend abgebrochen werde. Wäre dieſes, ſo lieſſe ſich die Verhältniß des Diameters zum Umkreiſe, durch ganze, wiewohl ungeheuer groſſe Zahlen ausdrücken. Ich habe aber in vorbemeldter Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** (§. 23) eine andere Fractio continua angegeben, welche nach einem gewiſſen Geſetze ins Unendliche fortgeht, und die Hofnung, die Verhältniß des Diameters zum Umkreiſe durch ganze Zahlen zu beſtimmen, ganz benimmt.

§. 10.

Es giebt in der Mathematik noch andere Gröſſen, von denen es ſich eben ſo viel der Mühe lohnte, zu ſuchen, ob ſie durch rationale Brüche, oder auf eine geſchmeidigere Art ausgedrückt werden können, als es noch dermalen durch Decimalzahlen geſchieht. Dahin kann beſonders die Zahl 2,718281,828459,045235, 36028... gerechnet werden, deren hyperboliſcher Logarithmus = 1 iſt. Dieſe Zahl iſt in Abſicht auf die Logarithmen eben das, was die **Ludolphiſchen** Zahlen in Abſicht auf den Circul ſind, und daher in Abſicht auf trigonometriſche und andere Rechnungen von gleicher **Erheblichkeit**. Fragt man demnach, warum denn

denn nur die Ludolphiſche Zahlen ſo viel Weſens machen? ſo wird dieſe Frage theils nur aus der Geſchichte der Mathematik, und theils auch dadurch beantwortet werden können, daß die Begriffe Circul, Vierecke, Gröſſe, gleich jedermann bekannt ſind, welches ſich von dem Begrif hyperboliſche Logarithmen nicht ſagen läßt, weil dieſer Begrif erſt durch den Infiniteſimalcalcul bekannt worden, und ohne die Erlernung dieſes Calculs nicht wohl deulich gemacht werden kann. Wäre den meiſten unter denen, ſo die Quadratur des Circuls ſuchen, nicht dieſer Riegel geſchoben, ſo würden, allem Anſehen nach, eben ſo viel vergebliche Bemühungen und fehlgeſchlagene Verſuche, in Anſehung der Zahl 2,718281,828459,045235,36028... zum Vorſchein kommen, als in Anſehung der Ludolphiſchen Zahlen zum Vorſchein gekommen ſind. Es läßt ſich aber auch dieſe Zahl nicht durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken. Denn ſetzt man dieſelbe Kürze halber $= e$, ſo iſt

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{etc.}}}}}}}}$$

oder

oder $$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\text{ꝛc.}}}}}}$$

oder

$$\frac{ee-1}{ee+1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\text{ꝛc.}}}}}}}$$

und überhaupt

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{2:x+\cfrac{1}{6:x+\cfrac{1}{10:x+\cfrac{1}{14:x+\text{ꝛc.}}}}}$$

Da dieſe Brüche immer fortgehen, ſo läßt ſich auch weder e noch e^x durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken, wenn nemlich x eine rationale Zahl oder Bruch iſt. Ich habe übrigens dieſe Formeln nach der Methode gefunden, die ich in vorbemeldter Abhandlung von Verwandlung der Brüche (§. 19. ſeqq.) angegeben habe.

habe. Die Veranlaſſung aber, dieſe Formeln zu ſuchen, gab mir des Herrn Eulers Analyſis infinitorum, wo der Ausdruck

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\text{etc.}}}}}}$$

in Zahlen berechnet, in Form eines Beyſpieles vorkömmt.

§. 11.

Auf eben dieſe Veranlaſſung gienge ich weiter, und fande in Abſicht auf die Circulbögen den Ausdruck

$$\text{tang. } v=\cfrac{1}{1:v-\cfrac{1}{3:v-\cfrac{1}{5:v-\cfrac{1}{7:v-\cfrac{1}{9:v-\text{etc.}}}}}}$$

Aus dieſem immer fortgehenden Bruche laſſen ſich, in Abſicht auf die unbeſtimmte Quadratur des Circuls, verſchiedene Folgen ziehen. Man ſetze n eine ganze Zahl, und mache $v=1:n$, ſo iſt

$$\text{tang. } v = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \cfrac{1}{9n - \cfrac{1}{11n - \text{&c.}}}}}}}$$

Da dieſer Bruch immer fortgeht, ſo folgt daraus, daß, ſo oft ein Circulbogen eine Pars aliquota des Halbmeſſers iſt, die Tangente deſſelben nothwendig irrational ſey. Denn wäre die Tangente rational, ſo könnte dieſer Bruch nicht in einem fortgehen, ſondern er müſte irgend aufhören. Um dieſes mehr zu erläutern, wollen wir zum Beyſpiele v = 1 ſetzen. Da nun auch n = 1 wird, ſo iſt

$$\text{tang. arc. } 1 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{9 - \text{&c.}}}}}}$$

demnach zufolge der vorhin (§. 9.) angeführten Abhandlung

	+ 1	+ 0
+ 1	+ 0	+ 1
− 3	+ 1	+ 1
+ 5	− 3	− 2
− 7	− 14	− 9
+ 9	+ 95	+ 61
− 11	+ 841	+ 540
+ 13 &c.	− 9156 &c.	+ 5879 &c.

Und ſo wird die Tangente des dem Halbmeſſer gleichen Bogens, der Ordnung nach, durch die Brüche

$$\frac{3}{2},\ \frac{14}{9},\ \frac{95}{61},\ \frac{841}{540},\ \frac{9156}{5879}\ \text{ꝛc.}$$

und zwar durch jeden folgenden dergeſtalt genauer ausgedrückt, daß jeder kleinere Bruch minder genau iſt. Da nun dieſe Reihe von Brüchen nirgends abgebrochen wird, ſondern dergeſtalt fortgeht, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinſame Theiler zu haben, gröſſer werden, als jede fürgegebene Zahl, ſo läßt ſich die Tangente des dem Halbmeſſer gleichen Bogens durch keinen endlichen oder rationalen Bruch ausdrücken. Eben dieſes gilt auch für die Tangenten jeder Bögen die $\frac{1}{n}$ Theil des Halbmeſſers ſind.

§. 12.

Werden die erſtgefundene Brüche von einander abgezogen, ſo findet ſichs dadurch, wie geſchwinde ſie dem wahren Werthe näher kommen. Denn ſo iſt

$$\frac{14}{9} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9}$$

$$\frac{95}{61} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61}$$

$$\frac{841}{540} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540}$$

$$\frac{9156}{5879} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879}$$

ꝛc.

Fährt

Fährt man auf dieſe Art fort, ſo wird die Tangente des dem Halbmeſſer gleichen Bogens durch eine unendliche Reihe

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879} + \frac{1}{5879.76887} + \text{ꝛc.}$$

ausgedrückt, welche ſtärker convergirt als jede geometriſche Reihe, und man weiß, daß die Summe derſelben irrational iſt.

§. 13.

Daß aber nicht nur die Tangenten der Bögen $\frac{1}{n}$, ſondern überhaupt jeder Bögen $\frac{m}{n}$, die zum Halbmeſſer ein rationales Verhältniß haben, irrational ſeyn, erhellet auf eben dieſe Art. Es ſey z. E. $v = \frac{2}{3}$, ſo iſt die Tangente dieſes Bogens

$$= \cfrac{1}{3:2 - \cfrac{1}{9:2 - \cfrac{1}{15:2 - \cfrac{1}{21:2 - \text{ꝛc.}}}}}$$

demnach	1	0
+ 3:2	· 0	1 = 0 1
− 9:2	+ 1	+ 3 : 2 = 2 : 3
+ 15:2	− 9:2	− 23 : 4 = 18 : 23
− 21:2	− 131 : 4	− 333 : 8 = 262 : 333
+ 27:2	+ 2715 : 8	+ 6901 : 16 = 5430 : 6901
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Und ſo wird die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, durch jeden der Brüche $\frac{2}{3}, \frac{18}{23}, \frac{262}{333}, \frac{5430}{6901}$ ꝛc. und zwar durch jeden folgenden dergeſtallt genauer ausgedrückt, daß jeder kleinere Bruch minder genau iſt. Da nun dieſe Reihe von Brüchen nirgend aufhört, ſondern ſo anwächſt, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinſame Theiler zu haben, gröſſer werden als jede fürgegebene Zahl, ſo folgt, daß die Tangente des Bogens $v = \frac{3}{2}$ irrational ſey. Eben dieſes gilt auch für die Tangenten jeder Bögen, die $= \frac{m}{n}$ ſind, oder zum Halbmeſſer ein rationales Verhältniß haben. Zieht man die erſtgefundene Brüche von einander ab, ſo erhält man für die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, die Reihe

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3 \cdot 23} + \frac{32}{23 \cdot 333} + \frac{128}{333 \cdot 6901} + \text{ꝛc.}$$

welche ebenfalls ſtärker als jede geometriſche Reihe convergirt und eine irrationale Summe hat.

§. 14.

Da demnach die Tangente eines jeden rationalen Bogens irrational iſt, ſo iſt hinwiederum auch der Bogen einer jeden rationalen Tangente irrational. Denn man ſetze, der Bogen wäre rational, ſo würde der Vorausſetzung zuwider die Tangente, vermöge des erſt erwieſenen, irrational ſeyn.

§. 15

§. 15.

Wir haben in den trigonometriſchen Tabellen eine einige rationale Tangente, nemlich die von 45 Gr. welche den Halbmeſſer gleich, und demnach = 1 iſt. Damit iſt alſo der Bogen von 45 Gr. und folglich auch der Bogen von 90, 180, 360 Gr. irrational, oder dieſe Bögen haben zu dem Halbmeſſer des Circuls kein rationales Verhältniß.

§. 16.

Aus dem bisher geſagten erhellet demnach ſo viel, daß kein Bogen nebſt ſeiner Tangente zugleich ein rationales Verhältniß zum Halbmeſſer haben könne. Es iſt aber auf unzählige Arten möglich, daß ein Bogen zu ſeiner Tangente ein rationales Verhältniß habe. Allein es läßt ſich auch beweiſen, daß in allen dieſen Fällen, ſowohl der Bogen als die Tangente deſſelben, mit dem Halbmeſſer incommenſurabel ſind. Denn erſtlich können, vermöge des bereits erwieſenen, nicht beyde zugleich zu dem Halbmeſſer ein rationales Verhältniß haben. Man ſetze demnach, es ſey nur die Tangente oder nur der Bogen allein. Im erſten Fall müſte die Tangente ſowohl mit dem Halbmeſſer als mit dem Bogen commenſurabel ſeyn. Und ſo wäre eben dadurch auch der Bogen mit dem Halbmeſſer commenſurabel, weil die Summe oder die Differenz zweyer rationalen

Verhältniſſe ebenfalls rational iſt. Im andern Fall wäre der Bogen zugleich mit der Tangente als mit dem Halbmeſſer commenſurabel, und ſo würde ebenfalls die Tangente zu dem Halbmeſſer ein rationales Verhältniß haben. Da nun vermöge des vorhin erwieſenen, Halbmeſſer, Bogen und Tangente nicht zugleich commenſurabel ſind, ſo werden die beyden angeführten Fälle umgeſtoſſen; demnach wenn Bogen und Tangente unter ſich ein rationales Verhältniß haben, ſo ſind beyde mit dem Halbmeſſer incommenſurabel.

§. 17.

Noch werde ich kurz zween Umſtände berühren, die in Abſicht auf die Quadratur des Circuls etwas ſcheinbares haben. Der erſte iſt folgender Satz: Wenn man um einen Circul ein beliebiges regulaires oder irregulaires Vieleck beſchreibt, ſo, daß jede Seite den Circul berühre, ſo verhält ſich der Umkreis des Vielecks zu ſeinem Inhalte, wie ſich der Umkreis des Circuls zu ſeinem Inhalte verhält. Den Beweis übergehe ich, weil er ſehr leicht iſt. Der andere Umſtand iſt ein Phaenomenon, welches ſich folgendermaßen eräugnet: Wenn man 1 durch 0,7853981634... als den vierten Theil der Ludolphiſchen Zahlen dividirt, ſo geht es 1 mal, und es bleibt 0,2146018366... Dividirt man ferners

dieſen

dieſen Ueberreſt in die 0,7853981634... durch die man vorhin getheilt hatte, ſo geht es 3 mal und es bleibt 0,1415926536.... Setzt man dieſem Ueberreſt die Zahl 3 vor, ſo erhält man 3,1415926536÷.. welches gerade die Ludolphiſche Zahlen ſind. Hiezu ſage ich weiter nichts, als daß es ein bloſſes Phaenomenon iſt, woraus ſich auf die Quadratur des Circuls ſchlechthin nicht ſchlieſſen läßt. Es iſt auch nicht ſchwer die Urſache davon zu finden.

VI.
Einige Anmerkungen von Ausmeſſung der Winkel und Linien auf dem Papier.

§. 1.

Tab. I. Unter denen Inſtrumenten, ſo man zur Zeichnung der Figuren auf dem Papier gebraucht, findet ſich gewöhnlich ein Transporteur zu Abnehmung und Auftragung der Winkel, ein Winkelhacken zur Zeichnung von ſenkrechten Linien, und ein Triangel oder zwey zuſammengerichtete Lineale zur Zeichnung der Parallellinien. Alle dieſe Inſtrumente laſſen ſich in eines zuſammenziehen, welches ihre Vortheile vereinigt, und in Abſicht auf die Zeichnung jeder Winkel noch bequemer iſt. Da ich es nirgends ſchon beſchrieben gefunden, ſo werde ich die Verfertigung und den Gebrauch deſſelben, da beydes ſehr leicht iſt, mit wenigen Worten hier anzeigen.

§. 2.

Fig. I. Aus einer hölzernen, helfenbeinernen, hornenen oder metallenen Platte wird ein rechtwinklichter und gleichſchenklichter Triangel ABC von beliebiger Gröſſe ausgeſchnitten, und indem man jeden Cathetum als einen Halbmeſſer

meſſer anſieht, ſo werden aus C gegen A und B die Tangenten jeder Grade von 0 bis 45 Grad aufgetragen, und die Grade ſo hingezeichnet, wie ſie in der Figur zu ſehen. Der mittlere Raum abc kann ausgeſchnitten oder gelaſſen, und wenn man will, ſo können auf A B Maaßſtäbe gezeichnet werden. Der Gebrauch iſt nun folgender.

§. 3.

Daß man mit dieſem Inſtrumente Perpendiculären ziehen könne, iſt dadurch, daß A C B ein rechter Winkel iſt, für ſich klar; und eben ſo bedarf die Möglichkeit, Parallelinien zu ziehen, keiner weitern Erläuterung. So iſt auch CAB = CBA an ſich ſchon immer ein Winkel von 45 Grad. Ich habe demnach nur noch zu zeigen, wie jede andere Winkel können gezogen werden, je nachdem ſie über oder unter 45 Gr. ſind.

§. 4.

Es ſey demnach auf der Linie DB in B ein Winkel z. E. von 25 Gr. zu ziehen, welcher gegen D offen ſey. Hier wird das Inſtrument dergeſtalt auf die Linie D B gelegt, daß dieſe zugleich durch die Ecke B und durch den gegen über ſtehenden 25 Gr. gehe, und die Ecke B auf den fürgegebenen Punct B falle. Iſt dieſes geſchehen, ſo wird längs B C eine Linie gezogen, und ſo wird CBD der verlangte Winkel ſeyn. Hätte der Winkel gegen E offen ſeyn ſollen, Fig. II.

ſollen; ſo ſieht man leicht, daß man die Ecke A und den gegenüber ſtehenden 25ten Gr. hätte gebrauchen müſſen. So darf man auch nur die Figur umwenden, um ſich der Lage des Inſtrumentes für die Fälle vorzuſtellen, wo die Linie abwerts zu ziehen iſt.

§. 5.

Da hiebey der Winkel CDB = ADF = 65 Gr. iſt, ſo wird man ſich ohne Mühe vorſtellen können, wie ein Winkel müſſe gezogen werden, der über 45 Gr. iſt. Denn iſt z. E. auf DB ein Winkel CDB, oder FDA von 65 Gr. zu ziehen, ſo wird der 65te Gr. an D und die Ecke B auf die Linie DB angelegt, und längs CA eine Linie gezogen, welche den verlangten Winkel CDB oder FDA = 65 Gr. geben wird. Solte der Winkel nicht gegen E, ſondern gegen F offen ſeyn, ſo wird wiederum die Ecke A und der gegenüber ſtehende 65te Gr. gebraucht. Daß man endlich, auf eben die Art, wie die Winkel gezeichnet werden könne, bereits gezeichnete meſſen kann, verſteht ſich für ſich.

§. 6.

Es iſt auch für ſich klar, daß dieſes Inſtrument fürnehmlich nur dient, um ſolche Winkel zu zeichnen und zu meſſen, deren Schenkel auf der Figur, ſo man zeichnen will, kleiner, oder wenigſtens nicht viel gröſſer ſind, als AC oder AB auf dem Inſtrumente iſt. Bey gröſ-

ſern

ſern Figuren bedient man ſich ſicherer der trigonometriſchen Tafeln. Denn ungeachtet in denſelben heut zu Tage die Chorden nicht mehr vorkommen, ſo werden die Sinus leicht in Chorden verwandelt, weil der Sinus des halben Winkels doppelt genommen, der Chorde des ganzen Winkels gleich iſt. Um aber dieſes Verdoppelns überhoben zu ſeyn, darf man nur den Halbmeſſer von 50, 500, 5000 ꝛc. Theilen annehmen, welches, wenn man mit Maaßſtäben von verſchiedener Gröſſe verſehen iſt, immer ſo geſchehen kann, daß der Halbmeſſer die verlangte Gröſſe habe, und wenigſtens in Abſicht auf die Gröſſe der Figur, die man zeichnen will, nicht zu klein ſey. Nimmt man auf einem ſolchen Maaßſtabe den Sinus des halben Bogens, ſo wird derſelbe an ſich ſchon die Chorde des ganzen Bogens ſeyn. Denn da der Halbmeſſer anſtatt von 100, 1000, 10000 ꝛc. Theilen genommen zu werden, von 50, 500, 5000 ꝛc. genommen wird, ſo iſt dadurch an ſich ſchon jeder Theil doppelt gröſſer, und damit iſt man der Verdoppelung des Sinus des halben Bogens überhoben. Uebrigens iſt für ſich klar, daß, ſobald der fürgegebene Winkel über 90 Gr. iſt, man beſſer thut, ſeinen Zuſatz zu 180 Gr. zu beſtimmen.

§. 7.

Was aber die Maaßſtäbe von verſchiedener Gröſſe betrift, ſo habe ich mir derſelben zehen ver-

verfertigt, deren jeder beynahe einen vierten Theil gröſſer iſt als der andere, und damit erhielte ich, daß mir der erſte ſtatt des 11ten, der 2te ſtatt des 12ten 2c. dienen konnte, weil der 11te würde zehnfach gröſſer als der erſte, und ſo auch der 12te zehnfach gröſſer als der 2te 2c. geweſen ſeyn. Dieſe Maaßſtäbe habe ich numerottirt, um allenfalls der Figur beyzuſchreiben, nach welchem ſie iſt gezeichnet worden, und ſo weiß ich mich immer wieder darein zu finden. Bey Zeichnung von krummen Linien geſchieht es zuweilen, daß ich die Ordinaten nach einem andern Maaßſtabe auftrage als die Abſciſſen, ſofern es nur auf die Verhältniſſe ankömmt. Und dieſes geſchieht, theils um der Gröſſe des Papieres Rechnung zu tragen, theils auch, um die Krümmung und Wendung der Linie augenſcheinlicher, oder überhaupt um die Figur und die Lage ihrer Theile zu andern Abſichten bequemer zu machen. Es wäre nicht unmöglich und vielleicht auch nicht undienlich, die Sprache von ſolchen Maaßſtäben allgemein zu machen. Man dürfte nur bey dem einen derſelben den Pariſiſchen, Rheinländiſchen oder Londonſchen Zoll zum Grunde legen, weil doch dieſe Maaſſe die bekannteſten ſind.

VII.

VII.
Anlage zur Tetragonometrie.

§. 1.

Die allgemeine Möglichkeit jedes Viereck durch Ziehung einer Diagonale in zween Triangel zu zerfällen, mag zu den Gedanken Anlaß gegeben haben, daß, wer in Berechnung und Auflöſung der Triangel wohl bewandert iſt, in der Berechnung und Auflöſung viereckigter Figuren ohne Mühe fortkommen werde. Solte dieſer Ausſpruch mehr als eine bloße Möglichkeit angeben, ſo wird gegenwärtige Abhandlung nur für Anfänger beſtimmt ſeyn, die ſich in trigonometriſchen Aufgaben, und beſonders in dem algebraiſchen Theile der Trigonometrie entweder für ſich, oder unter Anführung ihres Lehrers, üben, oder von daher Stof zu einer academiſchen Inauguraldiſputation nehmen wollen. Denn ich werde mich hier begnügen, die möglichen Fälle der Tetragonometrie vorzuzählen, und die Anzahl der dabey vorkommenden Aufgaben zu beſtimmen. Tab. I.

§. 2.

Wenn man ein Viereck, ohne es durch Ziehung einer Diagonale in zween Triangel zu thei-

theilen für ſich betrachtet, ſo beut es weiter nichts als 4 Seiten und 4 Winkel, demnach in allem 8 Stücke an. Und da iſt die Frage, wie fern einige dieſer 8 Stücke durch die übrigen beſtimmt werden, und wie vielerley Abwechſelungen dabey möglich ſind? Da man in der Algebra, ſofern es nur die Frage iſt, zu einer Gleichung zu gelangen, auf den Unterſchied der gegebenen und geſuchten Stücke nicht ſieht, ſo werde ich, um die vorzunehmende Abzählung einfacher zu machen, dieſen Unterſchied ebenfalls weglaſſen, weil derſelbe vielmehr die Auflöſung als die Erfindung der Gleichungen betrift.

§. 3.

Da in jedem Vierecke die Summe der vier Winkel 360 Gr. beträgt, ſo kann aus dreyen Winkeln der vierte für ſich gefunden werden. Es müſſen aber die Data von einander unabhängig ſeyn, demnach läßt ſich in Abſicht auf die Seiten des Viereckes aus allen vier Winkeln nicht mehr finden, als ſich aus dreyen finden läßt. Das will nun ſagen, daß in den Gleichungen, die wir zu ſuchen haben, höchſtens nur drey Winkel vorkommen können, weil der vierte immer der Zuſatz der drey übrigen zu 360 Gr. iſt.

§. 4.

Indeſſen ſind drey Winkel in ſo weit hinreichend, daß, wenn man noch zwo Seiten mit nimmt

nimmt, das ganze Viereck dadurch beſtimmt wird. Demnach kann von den zwoen andern Seiten noch eine mit in die Gleichung genommen werden. Und ſo haben wir den Satz, daß drey Winkel und drey Seiten einander beſtimmen. Da nun in dieſem Fall eine Seite und ein Winkel aus der Gleichung wegbleibt, ſo entſtehen, in Abſicht auf die Lage derſelben, zween beſondere Fälle. Denn es kann der wegbleibende Winkel entweder an der wegbleibenden Seite liegen, oder aber er liegt nicht an derſelben und demnach zwiſchen zwoen von den in der Gleichung vorkommenden Seiten. Da es nun hiebey, in Abſicht auf die Gleichung, nichts zu ſagen hat, zwiſchen welchen von den drey Seiten der wegbleibende Winkel fällt; ſo iſt es überflüßig, dieſen zweyten Fall noch ferner einzutheilen. Demnach haben wir für drey Seiten und drey Winkel nur zween Fälle.

§. 5.

Wird ein Winkel weggelaſſen, ſo muß der Abgang durch eine Seite erſetzt werden, und da haben wir vier Seiten und zween Winkel, die ebenfalls einander beſtimmen. Auch hier giebt es, in Abſicht auf die Lage der Winkel, noch zween beſondere Fälle, die ſich leicht gedenken laſſen. Denn die zween Winkel liegen entweder einander gegenüber, oder ſie liegen an einer Seite.

§. 6.

Weiter läßt ſich nun nicht gehen, weil ein Viereck nicht mehr als vier Seiten hat. Denn wolte man noch einen Winkel weglaſſen, ſo müßte noch eine Seite mit in die Gleichung genommen werden, und dieſes würde alſo die fünfte Seite des Viereckes ſeyn. Wir haben demnach in allem nur vier allgemeine Fälle, und mit dieſen vier Gleichungen. In jeder Gleichung kommen ſechs Stücke vor, und jedes kann als ein Quæſitum betrachtet werden. Dieſes giebt demnach für alle vier Gleichungen 24 Auflöſungen, und damit eben ſo viele einzelne Fälle.

§. 7.

Dieſe 24 Fälle werden in den vier erſten Figuren vorgeſtellt. Es enthält nemlich die

Ite Figur: Vier Seiten und zween entgegenſtehende Winkel. Und die dazu gehörende Gleichung iſt

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos.\omega - 2cd\cos.\psi.$$

IIte Figur: Vier Seiten und zween nicht entgegenſtehende Winkel. Und die Gleichung dazu iſt

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2a(b\cos.\omega + c\cos.\varphi) - 2bc\cos.(\omega + \varphi).$$

IIIte Figur: Drey Seiten, zween auſſen an- und ein zwiſchenliegender Winkel. Die Gleichung dazu iſt

$$a\sin.\omega = c\sin.(\omega + \varphi) + d\sin.\lambda.$$

IVte Figur: Sechs auf einander folgende Stücke. Und die Gleichung dazu iſt

$$c \sin.\psi = a \sin.(\varphi+\psi) - b \sin.(\varphi+\psi+\omega).$$

In dieſen vier Gleichungen werden alle Winkel ſpitz genommen. Wenn ſie demnach bey vorkommenden Fällen ſtumpf ſind, oder wenn die Summen $\omega+\varphi$, $\varphi+\psi$, $\varphi+\psi+\omega$ ſtumpf oder vollends größer als 180 Grade ſind, ſo müſſen die Zeichen behörig verändert werden. Doch iſt dieſes erſt dann vorzunehmen, wenn die Gleichung aufgelöſt worden, weil bey den meiſten Auflöſungen die Functionen der Winkel noch ihre Geſtalt ändern. Man ſieht übrigens, daß nicht jede Auflöſung gleich einfach und geſchmeidig iſt, und daß beſonders alle ſechſerley Auflöſungen der zweyten Gleichung irrationale und doppelte Werthe geben.

§. 8.

Alle die 24 Fälle, welche in dieſen vier Gleichungen enthalten ſind, können in der practiſchen Feldmeßkunſt wirklich vorkommen, wo man ein viereckigtes Feld, wegen darauf und dazwiſchen liegenden Moräſten, Sümpfen und Waldungen, dem Umkreiſe nach, auszumeſſen genöthigt iſt, und wo ſich weder alle Seiten noch alle Winkel gleich leicht oder bequem wirklich meſſen laſſen.

§. 9.

Es ſind aber dieſe 24 Fälle noch lange nicht alle, ſondern nur diejenigen, wo man mit den Seiten und Winkeln am Umkreiſe ausreicht. Zerlegt man aber ein Viereck in zween Triangel, indem man eine Diagonale zieht, ſo iſt es auf ſehr vielerley Arten möglich, die gegebenen und geſuchten Stücke ſo zu vertheilen, daß nicht jeder der beyden Triangel für ſich beſtimmt, ſondern beyde zuſammengenommen werden müſſen, wenn man zur Gleichung gelangen will. Dieſe Bedingung macht, daß die darunter begriffene Fälle nicht zur eigentlich ſogenannten Trigonometrie, ſondern zur Tetragonometrie gehören, und ihre eigene Verwickelungen, Schwürigkeiten und Auflöſungen haben.

§. 10.

Dieſe Fälle habe ich von der 5ten Figur an bis zur 42ten vorgeſtellt, wie ich ſie nach einer etwas mühſamen Abzählung habe finden und in Ordnung bringen können. Jede dieſer Figuren hat eine ihr eigene Gleichung, und da in jeder ſechſerley Gröſſen vorkommen, deren jede als ein Quæſitum betrachtet werden kann, ſo giebt dieſes für die 38 Figuren 6 mal 38, oder 228 verſchiedene Fälle. Ich werde nun darüber folgende Anmerkung herſetzen.

§. 11.

In jeder dieſer Figuren ſind ſechs Stücke gezeichnet, welche in die Rechnung gezogen wer-

werden müſſen; und zwar die meiſten nur mit einem —. Wo aber einer der Winkel, durch welche die Diagonale geht, ganz vorkommt, da iſt in der Figur ein Bogen dadurch gezogen. In jeder Figur kömmt wenigſtens einer von dieſen Winkeln ganz oder ungetheilt vor, weil dadurch die beyden Triangel von einander abhängig gemacht werden. Aus eben dem Grunde kömmt entweder noch die Diagonal, oder einer von denen an derſelben liegenden Winkeln, oder auch beyde vor, jedoch dergeſtalt, daß in keinem Triangel mehr als drey ganz beſtimmte Stücke vorkommen, weil ſonſt in demſelben überflüßige Data und in dem andern Triangel zu wenig ſeyn würden.

§. 12.

Ich habe die Figuren in der Ordnung gezeichnet, wie ſie bey dem Abzählen muß vorgenommen werden. Und dieſes mag die Beſchreibung davon abkürzen. Der untere Diagonalwinkel kömmt in allen vor. Demnach blieben noch 5 Stücke zu zeichnen. Und da da bey vielerley Abwechſelungen möglich ſind, ſo habe ich, um ſie zu claßificiren, bey der Diagonale angefangen. Dieſe kömmt in den Figuren 5, 6, 7 .... 25 vor, in den folgenden kömmt ſie nicht vor. Beyde dieſer Hauptclaſſen enthalten gleich viel Fälle, wenn man die 1, 2, 3, 4te Figur mit zu der letztern rechnet.

§. 13.

Die erſte Hauptclaſſe, wobey nemlich die Diagonal vorkömmt, theilt ſich in vier andere ein:

I°. Fig. 5, 6, 7 haben den obern Diagonalwinkel ganz.

II°. Fig. 8, 9, 10 haben deſſen beyde Theile.

III°. Fig. 11, 12 .... 19 haben nur einen Theil deſſelben.

IV°. Fig. 20.... 25 haben keinen Theil deſſelben, und zwar

Fig. 20 vier Seiten.

Fig. 21, 22 drey Seiten und einen Winkel.

Fig. 23, 24, 25 zwo Seiten und zween Winkel.

§. 14.

Die zweyte Hauptclaſſe, wobey die Diagonale wegbleibt, iſt wiederum in Anſehung des obern Diagonalwinkels in zwo Claſſen Fig. 26....31 und Fig. 32....42, oder wenn man ſpecialer gehen will, in 6 Claſſen getheilt, nemlich

I. Fig. 26, 27, 28,	IV. Fig. 35, 36, 37,
II. Fig. 29, 30, 31,	V. Fig. 38, 39, 40,
III. Fig. 32, 33, 34,	VI. Fig. 41, 42.

§. 15.

Die Auflöſung aller dieſer Fälle werde ich, wie Anfangs geſagt worden, denen überlaſſen,

die

die ſich in dem algebraiſchen Theil der Trigonometrie üben wollen. Die Erfindung der Gleichung für jede Figur kömmt immer auf den untern ungetheilten Diagonalwinkel an. In allen Figuren der zweyten Hauptclaſſe ſcheint es, als wenn in dem einen Triangel nicht genug Stücke wären; allein da muß man vermittelſt der in den anliegenden Triangel vorkommenden Stücke die Diagonale beſtimmen. Dadurch erhält man für den erſtern Triangel das noch mangelnde Stück, und kann ſodann vermittelſt des untern Diagonalwinkels zur Gleichung gelangen. In der erſten Hauptclaſſe wird die Diagonal immer am mühſamſten gefunden, und bey verſchiedenen geht es auch nicht einmal durch Conſtruction leicht an. Ob übrigens alle die 228 Fälle in der Ausübung wirklich vorkommen und brauchbar ſind, werde ich eben nicht ſtückweiſe unterſuchen. Wenn man aber in der

8ten Figur die Diagonale,
29ten Figur den hintern Winkel,
30ten Figur die obere Seite

als ein Quæſitum anſieht, ſo enthalten dieſe Figuren eine Aufgabe, die eine von den ſchönſten und brauchbarſten in der practiſchen Geometrie iſt, und wovon ich in den Anmerkungen und Zuſätzen zur practiſchen Geometrie vier verſchiedene Auflöſungen gegeben habe.

VIII.
Anmerkungen über die Verwandlung und Auflöſung der Gleichungen.

§. 1.

Tab. II. Es iſt aus den Anfangsgründen der Algebra bekannt, daß die Auflöſung einer Gleichung vom vierten Grade von der Auflöſung einer cubiſchen Gleichung abhängt, auf welche ſich jene reduciren läßt, und daß, wenn bey jener alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real ſind, die drey Wurzeln der letztern real ſind. Da nun dieſer letztere Fall immer auf die Triſection eines Circulbogens reducirt werden kann, ſo ſieht man überhaupt leicht ein, daß ſich auch jede Biquadratgleichungen, deren Wurzeln ſämtlich entweder unmöglich oder real ſind, auf die Triſection eines Circulbogens ſolle können reduciren laſſen. Die Frage iſt nun, die Methode dazu zu finden und brauchbar zu machen.

§. 2.

Um in der Auflöſung dieſer Frage nicht ohne Noth Weitläuftigkeiten einzumengen, ſo werden wir ſetzen, daß in der fürgegebenen Biquadratgleichung das zweyte Glied weggeſchaft ſey, weil

weil dieſes in jedem Falle, ohne Mühe voraus geſchehen kann. Es ſey demnach

$$o = x^4 + Ax^2 + Bx + C.$$

Man ſehe dieſe Gleichung als das Product zwoer Quadratgleichungen

$$o = xx + ax + b$$
$$o = xx - ax + c$$

an, welches

$$o = x^4 + bx^2 + acx + bc$$
$$\quad\quad + c \quad - ab$$
$$\quad\quad - aa$$

iſt, ſo laſſen ſich durch die Vergleichung der Glieder die Coefficienten a, b, c durch A, B, C beſtimmen, und die geſuchten vier Wurzeln werden ſodann

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \surd(\tfrac{1}{4}aa - b)$$
$$x = +\tfrac{1}{2}a \pm \surd(\tfrac{1}{4}aa - c)$$

ſeyn. Wird nun die Vergleichung der Glieder angeſtellt, ſo iſt

$$A = b + c - aa$$
$$B = ac - ab$$
$$C = bc$$

demnach

$$c + b = A + aa \qquad 2c = A + aa + B : a.$$
$$c - b = B : a \qquad 2b = A + aa - B : a.$$
$$(c+b)^2 - (c-b)^2 = 4bc = 4C = (A+a^2)^2 - B^2 : a^2$$
$$4C = A^2 + 2a^2A + a^4 - B^2 : a^2$$

folglich

$$o = a^6 + 2a^4A + A^2a^2 - B^2$$
$$\quad - 4Ca^2$$

Man ſetze

$$a^2 = z - \frac{2}{3}A$$

ſo iſt, wenn man dieſen Werth ſubſtituirt und die Reduction vornimmt,

$$0 = z^3 - \frac{1}{3}A^2 z - \frac{2}{27}A^3$$
$$- 4Cz + \frac{8}{3}CA$$
$$\pm B^2$$

Man ſetze nun

$$z = r \text{ coſin. } v$$
$$r \text{ coſ. } 3v = D$$

ſo giebt die Trigonometrie folgende Gleichung

$$0 = z^3 - \frac{3}{4}rrz - \frac{1}{4}rrD.$$

Wird dieſe mit der erſt gefundenen verglichen, ſo iſt

$$\frac{3}{4}rr = \frac{1}{3}A^2 + 4C$$
$$\frac{1}{4}rrD = \frac{2}{27}A^3 - \frac{8}{3}CA + B^2$$

folglich

$$r = \frac{2}{3}\sqrt{(12C + A^2)}$$
$$D = (2A^3 - 72CA + 27B^2) : (36C + 3A^2)$$

Endlich, wenn man in den für x gefundenen zwo Gleichungen die für c, b gefundene Werthe ſetzt, ſo ſind alle vier Wurzeln

$$x = \pm \frac{1}{2}a + \sqrt{(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}a^2 \mp B : 2a)}.$$

§. 3.

Wir haben nun nur den Rückweg zu nehmen, um die Operationen anzuzeigen, durch welche man die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

findet. Dieſes geſchiehet demnach folgendermaßen:

1°.

1°. Man macht

$$r = \frac{2}{3}\sqrt{(12C + AA)}$$

$$D = (2A^3 - 72CA + 27BB) : (36C + 3AA)$$

2°. Sodann ſetzt man

$$D : r = \text{coſin. } 3v,$$

und nachdem man den Bogen 3 v gefunden, ſo ſucht man den Coſinus von v, und macht

$$r.\ \text{coſ. } v = z$$

$$\sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)} = a.$$

3°. Hat man nun a gefunden, ſo ſind

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

die geſuchte vier Wurzeln.

§. 4.

Es ſey z. E. die Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$$

ſo iſt

$$A = -15$$
$$B = +10$$
$$C = +24$$

demnach

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12.24 + 15.15)} = \tfrac{2}{3}\sqrt{513} = \sqrt{228}$$

$$D = \frac{-2.15^3 - 72.24.15 + 27.10.10}{36.24 - 3.15.15} = \frac{270}{19}$$

$$\text{coſin. } 3v = D : r = 270 : 19\sqrt{228} =$$
$$135 : \sqrt{(3.19^3)}$$

$$\tfrac{1}{2}\log. 228 = \log. r = 1,1789674$$

$$\log. 270 = 2,4313638$$
$$\log. 19 = 1,2787536$$

$$\log. 270 : 19 = 1,1526102$$

$$\log. \cos. 3v = 0,9736428 - 1$$

demnach $3v = 19^\circ . 45' . 37\tfrac{1}{7}''$

$$v = 6 . 35 . 12\tfrac{1}{3}$$

$$\log. \cos. v = 0,9971238 - 1$$
$$\log. r = 1,1789674$$

$$\log. z \ldots\ldots = 1,1760912$$

$$z = 15$$

Ferner $a^2 = z - \tfrac{2}{3}A = 15 + 10 = 25$

$$a = 5$$

und

$$x = \tfrac{5}{2} \pm \surd(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} - \tfrac{10}{10}) = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$
$$x = -\tfrac{5}{2} \pm \surd(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} + \tfrac{10}{10}) = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$

demnach ſind die Wurzeln $+3, +2, -4, -1$.

§. 5.

Da ſich auf dieſe Art nur diejenigen Biquadratgleichungen aufloͤſen laſſen, welche alle Wurzeln entweder unmoͤglich oder real haben, ſo koͤmmt es darauf an, die Grenzen zu beſtimmen, in welchen ſolches moͤglich iſt. Man ſieht aus dieſer Aufloͤſung, daß es erſtlich auf den Ausdruck

$$D : r = \cos. 3v$$

ankoͤmmt.

ankömmt. Denn ein Coſinus kann nicht gröſſer als 1 ſeyn. Werden demnach für D, r die gefundenen Werthe geſetzt, ſo muß

$$(2A^3 - 72CA + 27B^2) : 2(12C + AA)^{3:2} < 1$$

folglich

$$2A^3 - 72CA + 27B^2 < 2(12C + AA)^{3:2}$$

ſeyn, und unter dieſer Bedingung ſind demnach alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real. Man ſieht zugleich, daß eben dieſe Bedingung vorausſetzt, es müſſe ſich aus

$$12C + AA$$

die Quadratwurzel können ausziehen laſſen, und folglich wenn C negativ iſt, 12 C kleiner als AA ſeyn. Beydes geht nun allemal an, wenn die vier Wurzeln ſämtlich entweder real oder unmöglich ſind, weil in dieſen Fällen die cubiſche Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^3 - \tfrac{1}{3}A^2 z &- \tfrac{2}{27}A^3 \\ - 4Cz &+ \tfrac{8}{3}CA \\ &- BB \end{aligned}$$

drey reale Wurzeln hat. Es kömmt demnach ferners auf den Ausdruck

$$a = \sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)}$$

an, welcher ebenfalls real ſeyn muß, dafern in den Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$

$$x = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

keine andere Unmöglichkeit ſeyn ſolle, als die,

welche

welche aus den Wurzelzeichen, womit ſie an ſich ſchon behaftet ſind, herrühren kann.

§. 6.

Da demnach hiebey ſo viele Bedingungen vorkommen, ſo iſt leicht zu erachten, daß die Möglichkeit aller vier Wurzeln in ſehr engen Schranken eingeſchloſſen ſeyn müſſen. Die allgemeine Methode, dadurch man ſonſt dieſe Frage entſcheidet, giebt an, man ſolle in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

das letzte Glied C als veränderlich anſehen, und beſtimmen, wenn es ein maximum oder ein minimum wird. Denn iſt es ſodann in der fürgegebenen Gleichung gröſſer als das maximum, oder kleiner als das minimum, ſo läßt ſich daraus ſchlieſſen, ob die Gleichung reale Wurzeln hat oder nicht. Wenn man dieſem zufolge die Gleichung differentirt und $dC = 0$ ſetzt, ſo erhält man

$$0 = 4x^3 + 2Ax + B$$

eine cubiſche Gleichung, welche man aufzulöſen hat, um diejenigen x zu beſtimmen, unter welchen C ein maximum oder ein minimum wird. Sind in dieſer Gleichung zwo Wurzeln unmöglich, ſo fallen dadurch ſchon zwo Wurzeln aus der fürgegebenen Biquadratgleichung ins Unmögliche, und C hat nur ein maximum zur Grenze der Möglichkeit der zwo übrigen Wurzeln.

§. 7.

§. 7.

Da hiebey eine Cubicgleichung aufzulöſen, bey der vorhergehenden Probe aber eine Triſection eines Circulbogens vorzunehmen iſt, welche ungefehr eben ſo viel als eine Cubicgleichung ſagen will; ſo habe ich auf Mittel gedacht, beydes zu vermeiden, und die Grenzen der Möglichkeit der Wurzeln auf eine deutlichere und mehr in die Augen fallende Art kenntlich zu machen. Zu dieſem Ende merke ich an, daß, wenn man in der Gleichung

$$0 = x^4 + A x^2 + B x + C$$

das Zeichen des dritten Gliedes $+ B$ in $- B$ verwandelt, man dadurch an der Gleichung weiter nichts ändert, als daß die poſitive Wurzeln negativ, und hinwiederum die negativen poſitiv werden. Da dieſes auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln keinen Einfluß hat, ſo werde ich das Zeichen des dritten Gliedes, in dieſer Abſicht, als Gleichgültig anſehen.

§. 8.

Hingegen hat es mit dem Zeichen des zweyten und vierten Gliedes eine ganz andere Bewandniß. Ihre Verwechſelung hat in die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln, einen ſehr beträchtlichen Einfluß. Und beſonders muß der Fall, wo A poſitiv iſt, anders behandelt werden, als wo A negativ iſt, weil dieſer letztere Fall mehrere Umſtände darbeut.

Um demnach bey dem erſteren anzufangen, ſo ſetze ich

$$x^4 + Ax^2 = Bx - C = z$$

Hier iſt nun offenbar z poſitiv, es mag nun x

Fig. I. poſitiv oder negativ ſeyn. Nimmt man auf AP die Abſciſſen x, und richtet die Ordinaten

$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

auf, ſo läßt ſich die Linie NAM conſtruiren, welches ebenfalls der andern Gleichung

$$z = Bx - C$$

genügen leiſten wird. Man ſieht zu dieſem Ende B als eine Tangente eines Winkels φ an, und indem man RAP $= \varphi$ macht, und die Linie AR zieht, ſo macht man AQ $= -C$, und zieht durch Q die Linie QM mit AR parallel. Denn ſo hat man, wenn AP $= x$ iſt,

$$PR = AP. \text{tang.} \varphi = Bx$$
$$RM = AQ = C$$

folglich $PM = Bx - C = z.$

§. 9.

Nun ſolte, wenn die Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 B \pm x + C$$

reale Wurzeln hat, die Linie QM allemal die krumme Linie NAM entweder berühren oder ſchneiden. Denn man muß für z einerley Werth finden, es ſey daß man $x^4 + Ax$ aus P in M trage, oder PM durch $Bx - C$ beſtimme. In der Figur iſt QM ſo gezogen, daß ſie die Linie NAM berühre. Und dieſes

macht,

macht, daß, ſo lange der Winkel RAP $= \varphi$ beybehalten wird, Q der tiefſte Punct iſt, der einen Durchſchnitt zulaſſe. Man ſieht daraus, daß wenn in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

C poſitiv iſt, dieſes Glied eine gewiſſe Gröſſe nicht überſchreiten darf, wofern die Gleichung mögliche Wurzeln haben ſolle. Iſt aber C negativ, ſo fällt Q über A, und da ſind zween Durchſchnittspuncten ſchlechthin nothwendig. Wenn demnach A poſitiv, C aber negativ iſt, ſo hat die Gleichung nothwendig zwo mögliche und zwo unmögliche Wurzeln.

§. 10.

Iſt aber C poſitiv, ſo fällt Q unter A, und da ſind zuweilen zween Durchſchnitte möglich. Man ſieht leicht, daß dieſes theils von dem Winkel RAP, theils auch von der Gröſſe der Linie AQ $=$ C abhängt. Wir werden um beydes zu beſtimmen, den Winkel RAP aufſuchen, unter welchem, wenn AQ angenommen wird, QM die Linie NAM berührt. Denn man ſieht leicht, daß dieſes der kleinſte iſt, unter welchem Durchſchnitte möglich ſind. Es ſey demnach

$$AP = x,$$
$$PM = z$$
$$x^4 + Ax^2 = z,$$

ſo iſt $\text{tang.}\,\varphi = B = \frac{dz}{dx} = 4x^3 + 2Ax.$

$$PR = x\,\text{tang.}\,\varphi = 4x^4 + 2Ax^2$$
$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

demnach

$$PR - PM = 3x^4 + Ax^2 = C$$
$$x = \surd(-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + C))$$

folglich

$$B = 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)\right]^{3:2} +$$
$$2A\left[-\tfrac{1}{6}A + \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)\right]^{1:2}$$

Dieſes iſt demnach die kleinſte Tangente, unter welcher zween Durchſchnitte, und daher auch zwo Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

möglich ſind. Wenn nemlich, wie wir es hier nehmen, A und C poſitiv ſind, ſo muß

$$B > 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)\right]^{3:2} +$$
$$2A[-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

ſeyn.

§. 11.

Dieſe Formel würde gar keinen Werth geben, wenn man darin C negativ ſetzen wolte, es ſey denn, daß man auch A negativ machte. Dieſes will nun ſagen, daß nur in dem Fall, wo A negativ iſt, der Punct Q über der Linie AP, oder innert der Linie NAM ſey, und dadurch eine Tangente gezogen werden kann.

Wie

Wie dieſes moͤglich wird, werden wir nun noch unterſuchen, indem wir uns zu der Betrachtung des zweyten allgemeinen Falles wenden, in welchem nemlich A negativ iſt.

§. 12.

Es ſey demnach

$$x^4 - Ax^2 = + Bx - C = + z.$$

Man ſetze Fig. II.

$$AP = x$$

$$PM = z$$

ſo wird ſich vermittelſt der Gleichung

$$x^4 - Ax^2 = - z$$

die Linie NEBAMFL conſtruiren laſſen, welche allemal eine in A eingebogene Geſtalt hat, weil die kleinern Ordinaten anfangs negativ und erſt nachgehends poſitiv werden, nachdem $x^2 > A$ wird. Dieſe Linie hat ferner immer in A ein maximum, in E, F zwey minima, und zwiſchen E, A, F zween Wendungspuncten. Dieſes macht, daß ſich, jedoch unter gewiſſen Bedingungen, drey parallele Tangente ziehen laſſen, ſo ofte nemlich eine an dem eingebogenen Theile gezogen wird.

§. 13.

Hiebey giebt es nun, in Anſehung der Durchſchnitte, drey verſchiedene Faͤlle. Einmal, ſo oft eine Linie den eingebogenen Theil EAF durchſchneidet, ſo durchſchneidet ſie auch die auswertigen EN, FL. Man ſieht leicht, daß

die Linien EF, BD, deren erſtere die beyden minima berührt, die andere aber die Tangente bey dem Wendungspunct B iſt, die äuſſerſten von denen ſind, welche vier Durchſchnitte machen können, und daß eben ſo der Winkel BDC unter allen der kleinſte iſt, imgleichen daß jede Linie, welche vier Durchſchnitte machen ſolle, zwiſchen C und D durchgehen müſſe, folglich in der Gleichung das vierte Glied, wenn es poſitiv iſt, nicht gröſſer als AD, und wenn es negativ iſt, nicht gröſſer als AC ſeyn könne, dafern alle vier Wurzeln ſollen können real ſeyn. Dieſe zween Grenzpuncten laſſen ſich nun leicht beſtimmen. Denn für C wird z ein minimum, demnach

$$dz = (4x^3 - 2Ax)\,dx = 0$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}A}$$

$$AC = x^4 - Ax^2 = \tfrac{1}{4}A^2 - \tfrac{1}{2}A^2 = -\tfrac{1}{4}A^2$$

Sodann wird D durch die Tangente des Wendungspunct beſtimmt. Für dieſen iſt

$$ddz = (12x^2 - 2A)\,dx^2 = 0$$

$$AG = x = \sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$

$$GB = x^4 - Ax^2 = \tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{6}A^2 = -\tfrac{5}{36}A^2$$

Es iſt aber

$$(GB + AD) : AG = dz : dx = 4x^3 - 2Ax = -\tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A},$$

folglich

$$(\tfrac{5}{36}A^2 + AD) : \sqrt{\tfrac{1}{6}A} = \tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$

$$AD = \tfrac{4}{18}A^2 - \tfrac{5}{36}A^2 = \tfrac{1}{12}A^2.$$

§. 14.

§. 14.

Fällt demnach das vierte Glied zwiſchen CD, ſo ſind zwo Wurzeln nothwendig real, und die zwo andern können es ſeyn, wenn B nicht zu groß iſt. Es ſey z. E. das vierte Glied C = AQ. Man ziehe aus Q die Tangente QM, und durch M die Ordinate MP; ſo iſt

$$AP = x$$
$$PM = +z$$

Nun iſt $x^4 - Ax^2 = +z$

$$\frac{dz}{dx} = \text{tang. } MTP = 4x^3 - 2Ax = +B$$

$$Qm = -Bx = 4x^4 - 2Ax^2$$
$$PM \qquad = x^4 - Ax^2$$
$$Qm - PM = 3x^4 - Ax^2 = +C.$$

Dieſes giebt nun eben ſo wie vorhin (§. 10.)

$$B = 4\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)\right]^{1:2}$$

welches demnach die Lage der aus dem Punct Q gezogenen Tangente angiebt, welche zugleich die Grenzlinie der realen Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 - Ax^2 \pm Bx \pm C$$

iſt. Wir werden nun ſehen, wie ſich dieſe Grenzen nach den verſchiedenen Werthen des letzten Gliedes C richten. Und da haben wir folgende Fälle:

I°. Wenn C poſitiv iſt, ſo fällt Q unterhalb A. Iſt nun in dieſem Fall C gröſſer als $\frac{1}{4}A^2$, ſo fällt Q unter die Linie EF, zwo Wurzeln ſind unmöglich, und ſollen die übrigen beyden möglich ſeyn, ſo muß

$$B > 4[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

ſeyn, widrigenfalls ſind alle vier unmöglich.

II. Iſt aber C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$, ſo fällt Q zwiſchen A C, und da ſind zwo Wurzeln nothwendig real. Sollen es die beyden andern auch ſeyn, ſo muß

$$B < 4[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

ſeyn. Denn in dieſem Fall hat die Tangente QM eine umgekehrte Lage, weil ſie in EF durch den 90ten Grad geht.

III. Iſt hingegen C negativ und kleiner als AD, ſo fällt Q nicht nur über A, ſondern die Formel giebt, in dieſem Fall, für B zween reale Werthe. Dieſes will nun ſagen, daß wenn z. E. C = Aq iſt, durch den Punct q zwo Tangenten qk, qn können gezogen werden. Demnach muß in dieſem Falle

$$B < 4[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C)]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

und

$$B > 4[+\tfrac{1}{6}A - \surd(\tfrac{1}{36}A - \tfrac{1}{3}C)]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A - \surd(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

ſeyn.

ſeyn. Wiedrigenfalls ſind nur zwo Wurzeln real.

IV. Iſt endlich C negativ und gröſſer als AD, ſo giebt die Formel für B gar keinen realen Werth. Das will nun ſagen, man könne durch den Punct Q, wenn derſelbe über D hinauf fällt, keine Tangente ziehen. Es ſind auch in dieſem Fall nothwendig zwo Wurzeln real, und zwo unmöglich.

§. 15.

Wenn in der Gleichung das Glied $B = 0$ iſt, ſo laſſen ſich alle dieſe Formeln ſehr abkürzen. Denn ſo ſind

I°. in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + C$$

alle vier Wurzeln unmöglich.

II. In der Gleichung

$$0 = x^4 \pm Ax^2 - C$$

ſind immer zwo Wurzeln real und zwo unmöglich.

III. In der Gleichung

$$0 = x^4 - Ax^2 + C$$

ſind alle vier Wurzeln real, wenn C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$ iſt. Iſt aber C gröſſer als $\frac{1}{4}A^2$ ſo ſind alle vier Wurzeln unmöglich. Alles dieſes erhellet auch daraus, daß die Gleichnng

$$0 = x^4 - ax^2 + b^2$$

aufgelöſt, die Wurzeln

$$2x = \pm\sqrt{(a + 2b)} \pm \sqrt{(a - 2b)} \text{ giebt.}$$

§. 16.

Iſt hingegen der zweyte Coefficient $A = 0$, ſo haben wir die erſte Figur, und da ſind immer zwo Wurzeln unmöglich. Die übrigen zwo ſind real, wenn C negativ iſt. (§. 9.) Iſt aber C poſitiv, ſo ſind dieſe zwo Wurzeln nur alsdann real, wenn

$$B > 4\left(\frac{C}{3}\right)^{3:4}$$

oder $$27 B^4 > 256 C^3$$ iſt.

§. 17.

Man wird übrigens aus dem §. 10. und §. 14. erſehen, daß die hier gebrauchte Methode deswegen angieng, weil ſich aus der Gleichung

$$3x^4 \pm Ax^2 = C$$

die Wurzel ſehr leicht ausziehen lieſſe. Ungeachtet aber dieſes Verfahren bey höhern Gleichungen ſo unbedingt nicht angeht, ſo finden ſich doch ganze Claſſen derſelben, bey denen es angebracht werden kann. So z. E. laſſen ſich auf dieſe Art bey jeder Gleichung von drey Gliedern

$$x^m + Ax + B = 0$$

und ſo auch bey jeder Gleichung von folgender Form

$$x^{2m} + Ax^m + Bx + C = 0$$

die Anzahl der realen Wurzeln und die Schranken ihrer Möglichkeit beſtimmen. Ich werde mich aber hier dabey nicht lange aufhalten, ſondern zu andern Betrachtung fortſchreiten, die ſich über die Gleichungen machen laſſen.

§. 18.

§. 18.

Seit dem man gefunden, daß jede Gleichung als ein Product von einer gewiſſen Anzahl Gleichungen vom erſten Grade angeſehen werden kann, und daß ſich mit den Wurzeln verſchiedene Veränderungen vornehmen laſſen, ſo hat man mit ſolchen Veränderungen verſchiedene Proben gemacht, und zu dem Ende für die Wurzel x, bald $y \pm a$, bald y a, bald y : a, bald auch y^n geſetzt, und dadurch die Gleichung in eine andere verwandelt, die man zu verſchiedenen Abſichten beſſer gebrauchen konnte. Beſonders wird, wenn man $x = y^n$ ſetzt, und n eine ganze Zahl iſt, die Gleichung in eine andere verwandelt, welche von n mal höherm Grade iſt, und daher n mal mehr Wurzeln hat. Sind hiebey alle Wurzeln x negativ, ſo werden alle Wurzeln y unmöglich, ſo oft n eine gerade Zahl iſt. Und ſo viele Wurzeln x negativ ſind, wird man n mal ſo viel unmögliche Wurzeln y haben. Sind hingegen alle Wurzeln x poſitiv, und n iſt eine gerade Zahl, ſo wird man für jede Wurzel x zwo mögliche, und $n - 2$ unmögliche Wurzeln y haben. Iſt aber n eine ungerade Zahl, ſo erhält man für jede Wurzel x eine mögliche, und $n - 1$ unmögliche Wurzeln. Sind endlich einige Wurzeln x unmöglich, ſo erhält man für jede derſelben n unmögliche Wurzeln y. Alles dieſes folgt ohne Mühe aus der Gleichung

$$y^n - x = 0.$$

§. 19.

Will man hiebey für n eine gebrochene Zahl ſetzen, z. E. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ꝛc. ſo wird man mehrentheils eine Gleichung erhalten, worin die Exponenten von y gebrochne Zahlen ſind, und damit läßt ſich nicht viel ausrichten. Ich ſage mehrentheils: denn hat x an ſich ſchon ſolche Dignitäten, die ſich durch einen Bruch n aufheben, oder auf ganze Zahlen bringen laſſen, ſo iſt dieſes ein Fall, bey welchem man ſchon oft mit Vortheil $y^n = x$ geſetzt hat. So z. E. hatten wir oben (§. 2.) die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = a^6 + 2a^4A + A^2a^2 - B^2. \\ -4Ca^2 \quad\quad \end{aligned}$$

Da ſich hier alle Exponenten von a durch 2 dividiren laſſen, ſo kann man

$$a = y^{1:2}$$

ſetzen, und dadurch die Gleichung in

$$\begin{aligned} 0 = y^3 + 2Ay^2 + A^2y - B^2 \\ -4Cy \quad\quad \end{aligned}$$

verwandeln, welche nun nur vom dritten Grade iſt. Dieſes wäre nun nicht angegangen, wenn in der erſten Gleichung ungerade Exponenten von a vorgekommen wären.

§. 20.

Man hätte ſich aber nach der Betrachtung der bisher erwähnten Verwandlungen zu folgenden Aufgaben wenden können, die wir hier auflöſen werden: **Eine Gleichung von jedem**

dem Grade in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln Quadrate, Cubi oder jede Dignitäten von den Wurzeln der erſtern ſind? Ungeachtet die Methode zur Auflöſung dieſer Aufgabe allgemein iſt, ſo werden wir doch bey den Quadraten anfangen, weil dieſer eine beſondere Auflöſung der Aufgabe zulaſſen.

§. 21.

Es ſey demnach eine jede Wurzel der fürgegebenen Gleichung

$$x + a = o.$$

Man nehme ganz willkührlich noch eine andere

$$x - a = o$$

und multiplicire dieſe beyde Gleichungen mit einander, ſo hat man

$$x^2 - a^2 = o.$$

Man ſetze nun

$$x^2 = y$$

ſo iſt

$$y - a^2 = o$$

demnach y das Quadrat der Wurzel x. Hiebey haben wir nun weiter nichts gethan, als daß wir zu der Wurzel — a noch eine andere + a genommen haben. Es mag nun a poſitiv oder negativ ſeyn, ſo erhält man immer

$$y - a^2 = o$$

eine poſitive Wurzel der neuen Gleichung. Da man aber die Gleichung vorerſt auflöſen müſte, wenn man dieſes mit jeder Wurzel x beſonders

vor-

vornehmen wolte, ſo haben wir nur noch zu ſehen, wie es ohne die Aufloͤſung der Gleichung geſchehen kann.

§. 22.

Nun weiß man, daß bey jeder Gleichung die poſitiven Wurzeln in negative, und die negativen in poſitive verwandelt werden, wenn man bey dem zweyten, vierten, ſechſten ꝛc. Gliede das Zeichen verwechſelt. Man darf daher nur die Gleichung, ſo durch dieſe Verwechslung der Zeichen entſteht, mit der fuͤrgegebenen multipliciren, ſo werden in dem Product alle ungerade Dignitaͤten von $x = 0$, und damit kann man $x^2 = y$ ſetzen, um die Gleichung zu erhalten, deren Wurzeln Quadrate von den Wurzeln der fuͤrgegebenen Gleichung ſind.

§. 23.

Es ſey demnach uͤberhaupt

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

ſo macht man

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

Werden nun dieſe Gleichungen mit einander multiplicirt, ſo iſt

$$\begin{array}{llll} 0 = x^{2m} & + 2bx^{2m-2} & + 2dx^{2m-4} & + 2fx^{2m-6} + \text{ꝛc.} \\ & - aa\,.. & - 2ac\,.. & - 2ae\,.. \\ & & + bb\,.. & + 2bd\,.. \\ & & & - cc\,.. \end{array}$$

Setzt

Setzt man demnach

$$xx = y$$

ſo erhält man

$$\begin{array}{l} o = y^m + 2b\,y^{m-1} + 2d\,y^{m-2} + 2f\,y^{m-3} + \text{etc.} \\ \qquad\; - aa\,.. \quad - 2ac\,.. \quad - 2ae\,.. \\ \qquad\qquad\qquad + bb\,.. \quad + 2bd\,.. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - cc\,.. \end{array}$$

eine Gleichung deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der Gleichung

$$o = x^m + a\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + e\,x^{m-3} + \text{etc.}$$

ſind. Wir werden nun hievon ein und andern Gebrauch machen.

§. 24.

Es ſey z. E. die cubiſche Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

wird dieſe mit

$$o = x^3 - ax^2 + bx - c$$

multiplicirt, und in dem Producte $x^2 = y$ geſetzt, ſo erhält man

$$\begin{array}{l} o = y^3 + 2by^2 - 2acy - cc \\ \qquad\quad - aay^2 + \; bby \end{array}$$

Es iſt unnöthig zu erinnern, daß man jede der Coefficienten a, b, c negativ nehmen könne, wenn in einem fürgegebenen Fall nicht alle Glieder poſitiv ſind.

§. 25.

Man ſetze nun die letzte Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC,$$

ſo kann man den Rückweg nehmen, und die erſtere wiederum daraus herleiten, indem man die Coefficienten a, b, c durch A, B, C beſtimmt. Dieſes will ſodann ſagen: Wenn eine cubiſche Gleichung gegeben, eine andere zu finden, deren Wurzeln Quadratwurzeln der erſten ſind. Dieſe Aufgabe iſt nun nicht mehr ſo einfach, wie die vorhergehende, weil man an ſtatt einer Gleichung mehrere findet, die der Bedingung genügen leiſtet. Denn jede Quadratzahl hat ſowohl eine poſitive als negative Wurzel, und beyde thun der Bedingung ein Genügen. Man ſetze die Wurzeln der Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

ſeyn p^2, q^2, r^2, ſo ſind die Quadratwurzeln davon

$$\begin{matrix} +p, & +q, & +r \\ -p & -q & -r \end{matrix}$$

aus dieſen laſſen ſich nun 8 cubiſche Gleichungen machen, deren Wurzeln

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$+p$	$+p$	$+p$	$+p$	$-p$	$-p$	$-p$	$-p$
$+q$	$+q$	$-q$	$-q$	$+q$	$+q$	$-q$	$-q$
$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$

ſind. Man würde daher auf eine Gleichung vom 8ten Grade verfallen, wenn der letzte Coefficient $CC = cc$ nicht an ſich ſchon zwo allgemeine Claſſen angäbe, wodurch die Gleichung auf den vierten Grad herunter geſetzt wird.

§. 26.

§. 26.

Um aber die Auflöſung vorzunehmen, ſo haben wir

$$cc = CC \text{ und daher } c = C$$
$$2b - aa = A$$
$$bb - 2ac = B = bb - 2aC$$

Hieraus findet man

$$0 = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + \begin{array}{l} A^2 \\ -4B \end{array}$$

§. 27.

Dieſe Gleichung werde ich eben hier nicht auflöſen, ſondern noch einen andern Rückweg nehmen, und zeigen, wie wenn man jede Glei- vom vierten Grade, deren zweytes Glied = o chung iſt, mit der gegenwärtigen vergleicht, man auf die cubiſche Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

kommen, und nachdem man ihre Wurzeln p^2, q^2, r^2 gefunden, ſodann auch die Wurzeln der Gleichung vom vierten Grade haben könne, welche man mit

$$0 = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + \begin{array}{l} A^2 \\ -4B \end{array}$$

verglichen hatte. Denn da a der Coefficient des zweyten Gliedes der Gleichung

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und folglich die Summe ihrer Wurzeln iſt, ſo iſt

$$a = p + q + r.$$

§. 28.

§. 28.

Da es genug iſt, dieſes Verfahren in einem Beyſpiele zu zeigen, ſo werde ich die oben (§. 4.) ſchon gebrauchte Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$

oder, wenn wir a für x ſetzen

$$0 = a^4 - 15a^2 + 10a + 24$$

dazu gebrauchen. Dieſe mit

$$0 = a^4 + 2Aa^2 - 8C + A^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 4B$$

verglichen, giebt

$$A = -\tfrac{15}{2},$$
$$C = -\tfrac{5}{4}$$
$$B = +\tfrac{129}{16}$$

demnach, wenn dieſe Werthe in der Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

geſetzt werden,

$$0 = y^3 - \tfrac{15}{2}y^2 + \tfrac{129}{16}y - \tfrac{25}{16}$$

eine cubiſche Gleichung, von deren Auflöſung die Auflöſung der fürgegebenen Gleichung vom 4ten Grade abhängt.

§. 29.

Man ſetze, nm erſtlich die Brüche aufzuheben,

$$y = \tfrac{1}{4}v$$

ſo iſt

$$0 = v^3 - 30v^2 + 129v - 100$$

Ferner

Ferner ſetze man, um das zweyte Glied wegzuſchaffen,

$$v = z + 10,$$

ſo iſt

$$0 = z^3 - 171z - 810.$$

Vergleicht man dieſe Gleichung eben ſo wie oben (§. 2.) mit

$$0 = z^3 - \tfrac{3}{4}rrz - \tfrac{1}{4}rrD,$$

ſo findet man

$$\tfrac{3}{4}rr = 171$$

$$\tfrac{1}{4}rrD = 810$$

folglich

$$r = \surd 228$$

$$D = \frac{270}{19}$$

welches eben die Werthe ſind, die wir oben (§. 4.) gefunden haben. Wir haben demnach auf eben die Art die Wurzel $z = 15$, und damit die beyden übrigen $z = -6$ und $z = -9$. Da nun $v = z + 10$ iſt, ſo ſind 25, 4, 1 die drey Werthe von v, und eben ſo $\frac{25}{4}$, 1, $\frac{1}{4}$ die drey Werthe von y. Da nun $y = x^2$ iſt, ſo ſind $\pm\frac{5}{2}$, ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ die drey Werthe von x. Nun iſt a deren Summe, demnach iſt

$$a = \pm\tfrac{5}{2} \pm 1 \pm \tfrac{1}{2}$$

dieſes giebt achterley Werthe, von denen wir aber nur

$$a = +\tfrac{5}{2} + 1 - \tfrac{1}{2} = +3$$

$$a = +\tfrac{5}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} = +2$$

$$a = -\tfrac{5}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} = -4$$

$$a = -\tfrac{5}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = -1$$

 gebrau-

gebrauchen, welche der fürgegebenen Gleichung Genügen thun.

§. 30.

So ofte in der Gleichung (§. 23.)

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$

alle Wurzeln real ſind, ſie mögen nun poſitiv oder negativ ſeyn, ſo ofte ſind auch in der andern Gleichung

$$\begin{array}{llll} 0 = y^m + 2by^{m-1} & + 2dy^{m-2} & + 2fy^{m-3} & + \text{etc.} \\ \quad\; - aa & - 2ac.. & - 2ae.. & \\ & + bb.. & + 2bd.. & \\ & & - cc.. & \end{array}$$

die Wurzeln nicht nur real, ſondern ſämtlich poſitiv, weil ſie Quadrate von den Wurzeln x ſind. Wird demnach dieſe zweyte Gleichung in Zahlen gerechnet, ſo wird ſich jedesmal finden, daß die Zeichen + — der Ordnung nach abwechſeln.

§. 31.

Findet ſich aber dieſe einförmige Abwechſelung nicht, ſo iſt es nothwendig ein Zeichen, daß in der erſten Gleichung einige Wurzeln unmöglich ſeyn müſſen. Es ſey z. E. die Gleichung

$$0 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

wird dieſe mit

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

multiplicirt, ſo iſt das Product, wenn man $x^2 = y$ ſetzt,

$$0 = y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 4y + 1.$$

Da

Da nun hier gar keine Abwechſelung der Zeichen iſt, ſo hat die Gleichung

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

nothwendig unmögliche Wurzeln.

§. 32.

Es läßt ſich aber dieſe Anmerkung nicht umkehren, weil der unmöglichen Wurzeln ungeachtet, die Zeichen zuweilen dennoch einförmig abwechſeln können. Um dieſes auf eine allgemeinere Art aufzuklären, und zugleich die Umſtände zu beſtimmen, wo die Abwechſelung der Zeichen auch bey den unmöglichen Wurzeln ſtatt hat, ſo ſey eine derſelben

$$0 = x + a + b\sqrt{-1}.$$

Sind nun alle Coefficienten der Gleichung rational, ſo hat die Gleichung nothwendig noch eine andere Wurzel von der Form

$$0 = x + a - b\sqrt{-1}.$$

Werden dieſe beyden Wurzeln mit einander multiplicirt, ſo iſt das Product

$$0 = x^2 + 2ax + aa \atop \qquad\qquad + bb$$

ein Factor der Gleichung. Man nehme nun den Factor

$$0 = x^2 - 2ax + aa \atop \qquad\qquad + bb$$

und multiplicire damit den erſtern, ſo iſt, wenn man $x^2 = y$ ſetzt, das Product

$$0 = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

der correſpondirende Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln y, Quadrate der Wurzeln x werden ſollen. Iſt nun hiebey a > b, ſo wird in dieſem Factor das zweyte Glied negativ, und damit hat, der unmöglichen Wurzel unerachtet, die Abwechſelung der Zeichen ſtatt. Man ſieht leicht, daß eine Gleichung von lauter unmöglichen Wurzeln aus lauter ſolchen Wurzeln

$$0 = x \pm a \pm b\sqrt{-1}$$

wo a > b iſt beſtehen, und damit in der zweyten Gleichung (§. 30.) eine einförmige Abwechſelung der Zeichen ſtatt finden kann. Man ſieht aber auch, daß, wenn in allen Wurzeln a < b iſt, alsdann in dieſer zweyten Gleichung nothwendig alle Zeichen + ſind. Miſchen ſich aber beyde Fälle durcheinander, oder kommen zu den unmöglichen Wurzeln noch reale hinzu, ſo kann man für die Folge und Abwechſelung der Zeichen keinen ſo unbedingten Schluß machen, ungeachtet man, wenn die Abwechſelung der Zeichen nicht durchgängig iſt, ſicher ſchlieſſen kann, daß in der erſten Gleichung unmögliche Wurzeln ſeyn müſſen.

§. 33.

Wenn man zu dem Factor

$$0 = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

den Factor

$$0 = y^2 - 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

nimmt, und indem man beyde mit einander

multi-

multiplicirt, in dem Producte $y^2 = z$ ſetzt, ſo erhält man

$$0 = z^2 - 2(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)y^2 + (aa + bb)^4$$

einen Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln Biquadrate von x ſind. In dieſem Factor iſt nun das zweyte Glied alsdenn negativ, wenn

$$a^4 + b^4 > 6a^2b^2$$

oder $$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > 8a^2b^2$$

oder $$a^2 + b^2 > 2ab\sqrt{2}$$

iſt, welches ſich zuträgt, ſo ofte entweder

$$a > b(1 + \sqrt{2})$$

oder $$b > a(1 + \sqrt{2})$$

iſt. Da demnach hier nur erfordert wird, daß a, b in gröſſerer Verhältniß ungleich ſeyn, als 1 zu $1 + \sqrt{2}$ iſt; ſo trägt ſich dieſes öfters zu, als die Bedingung bey den Quadraten, welche fordert, daß $a > b$ ſeyn müſſe. Es kann daher auch leichter geſchehen, daß eine Abwechſelung der Zeichen ſtatt findet, wenn man eine Gleichung in eine ſolche verwandelt, deren Wurzeln Biquadrate der Wurzeln der erſtern ſind. Indeſſen kann allerdings auch das Gegentheil zutreffen.

§. 34.

So z. E. haben wir vorhin (§. 31.) geſehen, daß die Gleichung

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

mit

$$0 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

 mul-

multiplicirt, und in dem Producte $x^2 = y$ geſetzt, ſich in

$$0 = y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 4y + 1$$

verwandelt. Wird nun ferner auch dieſe mit

$$0 = y^4 - 4y^3 + 10y^2 - 4y + 1$$

multiplicirt, und in dem Producte $y^2 = z$ geſetzt, ſo erhält man

$$0 = z^4 + 6z^3 + 70z^2 + 6z + 1$$

eine Gleichung, deren Wurzeln Biquadrate von x ſind. Und hier findet ſich gar keine Abwechſelung der Zeichen ein.

§. 35.

Nach der bisher angeführten Methode, kann nun ſtuffenweiſe eine jede Gleichung in eine ſolche verwandelt werden, deren Wurzeln die 2^{nte} Dignität von den Wurzeln der erſten ſind. Wir haben demnach noch zu ſehen, wie man in Anſehung der übrigen Dignitäten, die in der Reihe 2, 4, 8, 16, 32, ꝛc. nicht begriffen ſind, zu verfahren habe. Wir werden die Methode nur in einem Beyſpiele vortragen, woraus ſich aber leicht wird abnehmen laſſen, daß ſie allgemein iſt.

§. 36.

Es ſey z. E. die Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

in eine ſolche

$$0 = z^2 + \alpha x + \beta$$

zu

zu verwandeln, ſo, daß die Wurzeln der letztern Cubi der Wurzeln der erſtern ſeyn. Da demnach die letztere Gleichung wegen $z = x^3$, ſich in

$$0 = x^6 + \alpha x^3 + \beta$$

verwandelt, ſo ſieht man leicht, daß die erſtere

$$0 = x^2 + ax + b$$

mit

$$0 = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

multiplicirt, und in dem Producte

$$\begin{array}{llllll} 0 = x^6 & + Ax^5 & + Bx^4 & + Cx^3 & + Dx^2 & \\ & + a\,.. & + aA\,.. & + aB\,.. & + aC\,.. & + aDx \\ & & + b\,.. & + bA\,.. & + bB\,.. & + bC\,.. + bD \end{array}$$

das zweyte, dritte, fünfte und ſechſte Glied $= 0$ geſetzt werden müſſe, theils um die vier Coefficienten A, B, C, D zu beſtimmen, theils auch, um die übrigen Glieder

$$\begin{array}{ll} 0 = x^6 + Cx^3 & + bD \\ & + aB\,.. \\ & + bA\,.. \end{array}$$

mit der geſuchten Gleichung

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

oder $$0 = z^6 + \alpha x^3 + \beta$$

zu vergleichen. Wir haben demnach, um der erſten Abſicht Genügen zu thun,

$$0 = A + a$$
$$0 = B + aA + b$$
$$0 = D + aC + bB$$
$$0 = aD + bC$$

vier Gleichungen vom erſten Grade, aus denen man

$$A = -a$$
$$B = +aa - b$$
$$C = ab$$
$$D = bb$$

erhält. Da nun nach der zweyten Abſicht

$$\alpha = C + aB + bA$$
$$\beta = bD$$

iſt, ſo erhält man hiedurch die geſuchte Gleichung

$$o = z^2 - 3abz + b^3$$
$$+ a^3 ..$$

deren Wurzeln die Cubi der Wurzeln von

$$o = x^2 + ax + b$$

ſind.

§. 37.

Es ſey z. E.

$$o = x^2 - 10x + 9$$

eine Gleichung, deren Wurzeln offenbar 1 und 9 ſind; ſo iſt

$$a = -10$$
$$b = +9$$

demnach

$$a^3 - 3ab = -1000 + 270 = -730$$
$$b^3 = 729$$

und

$$o = z^2 - 730z + 729$$

eine Gleichung deren Wurzeln wiederum offenbar 1 und 729, folglich die Cubi von 1 und 9 ſind.

§. 38.

§. 38.

Um noch ein Beyſpiel anzubringen, ſo ſey die cubiſche Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und dieſe ſolle in eine andere

$$o = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

verwandelt werden, ſo, daß die Wurzeln der letztern die Cubi der Wurzeln der erſtern ſeyn. Da nun hier $z = x^3$ iſt, ſo verwandelt ſich die letztere Gleichung in

$$o = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma.$$

Da dieſe vom neunten Grade iſt, ſo muß die fürgegebene

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

mit einem Factor oder Gleichung vom ſechſten Grade

$$\begin{array}{l} o = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 \\ \qquad + Ex + F \end{array}$$

multiplicirt, und in dem Producte

$$\begin{array}{llllllll} o = x^9 & + Ax^8 & + Bx^7 & + Cx^6 & + Dx^5 & + Ex^4 & + Fx^3 & \\ & + a.. & + aA.. & + aB.. & + aC.. & + aD.. & + aE.. & + aFx^2 \\ & & + b.. & + bA.. & + bB.. & + bC.. & + bD.. & + bE.. \; + bFx \\ & & & + c.. & + cA.. & + cB.. & + cC.. & + cD.. \; + cE.. \; + cF \end{array}$$

das 2, 3, 5, 6, 8, 9te Glied $= o$ geſetzt werden, um die Coefficienten A, B, C, D, E, F zu beſtimmen, und ſodann die übrigen Glieder

$$\begin{array}{llll} o = x^9 + & Cx^6 & + Fx^3 & + cF \\ & + aB.. & + aE.. & \\ & + bA.. & + bD.. & \\ & + \; C.. & + cC.. & \end{array}$$

mit

$$o = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma$$

zu vergleichen. Wir haben demnach

$$o = A + a$$
$$o = B + aA + b$$
$$o = D + aC + bB + cA$$
$$o = E + aD + bC + cB$$
$$o = aF + bE + cD$$
$$o = bF + cE$$

ſechs Gleichungen vom erſten Grade, durch deren Auflöſung man

$$A = -a$$
$$B = +aa - b$$
$$C = +2c - ab$$
$$D = +bb - ac$$
$$E = -cb$$
$$F = +cc$$

findet. Da nun ferner

$$\alpha = C + aB + bA + c$$
$$\beta = F + aE + bD + cC$$
$$\gamma = cF$$

iſt, ſo haben wir nur noch die gefundenen Werthe von A, B, C, D, E, F in dieſen drey Gleichungen zu ſetzen, um die Coefficienten α, β, γ der geſuchten Gleichung

$$o = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

zu beſtimmen, welche demnach folgende

$$\begin{array}{llll} o = z^3 & + 3cz^2 & + 3ccz & + c^3 \\ & - 3ab \,.. & - 3abc \,.. & \\ & + a^3 \,.. & + b^3 \,.. & \end{array}$$

ſeyn

ſeyn wird. Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind demnach die Cubi der Wurzeln von der fürgegebenen

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

§. 39.

Es ſey z. E. die Gleichung

$$o = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

deren Wurzeln 1, 2, 4 ſind, ſo iſt

$$a = -\ 7$$
$$b = +\ 14$$
$$c = -\ 8$$

demnach

$$3c - 3ab + a^3 = -\ 73$$
$$3cc - 3abc + b^3 = +\ 584$$
$$c^3 = -\ 512$$

folglich die geſuchte Gleichung

$$o = z^3 - 73z^2 + 584z - 512$$

deren Wurzeln 1, 8, 64, oder die Cubi von den Wurzeln 1, 2, 4 ſind.

§. 40.

Wenn in der fürgegebenen Gleichung das zweyte Glied $= o$, oder die Gleichung

$$o = x^3 + bx + c$$

iſt, ſo iſt auch in der gefundenen Gleichung $a = o$, und dieſes macht dieſelbe um ein merkliches einfacher, weil ſie ſodann ſchlechthin nur

$$o = z^3 + 3cz^2 + 3ccz + c^3$$
$$\qquad\qquad\qquad + b^3z$$

iſt,

iſt, und ſich daher in

$$0=(z+c)^3+b^3z$$

verwandelt, welches, weil $z=x^3$ iſt,

$$0=z+c+bx$$

und daher die Gleichung

$$0=x^3+c+bx,$$

oder $$0=x^3+bx+c$$

wieder herfürbringt.

§. 41.

Da wir hier

$$z=x^3$$

haben, ſo iſt

$$0=x^3-z.$$

Dieſe Gleichung hat auſſer der Wurzel

$$0=x-\sqrt[3]{z}$$

noch zwo andere

$$0=x+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.(1\pm\sqrt{-3})$$

welche folglich ebenfalls Wurzeln der Gleichung

$$0=x^9+\alpha x^6+\beta x^3+\gamma$$

ſind. Da nun dieſe Gleichung durch die Multiplication der beyden Gleichungen

$$0=x^3+ax^2+bx+c$$

$$0=x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$

heraus gebracht worden, und die Wurzeln der erſtern dieſer Gleichungen

$$0=x-\sqrt[3]{z}$$

ſind, ſo ſind die Wurzeln der leztern Gleichung nothwendig

$$o = x + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.(1 \pm \sqrt{-3}).$$

Wenn demnach entweder die Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

oder die Gleichung

$$o = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

aufgelöſt worden, ſo iſt ebenfalls die Gleichung

$$o = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

oder, wenn wir für die Coefficienten ihre Werthe ſetzen,

$$o = x^6 - ax^5 + aax^4 + 2cx^3 + bbx^4 - cbx + cc$$
$$- bx^4 - abx^3 - acx^4$$

ſo gut als aufgelöſt. Man hat ſich aber darüber nicht zu verwundern: denn die Coefficienten dieſer Gleichung werden ſämtlich durch a, b, c beſtimmt. Daher kann man nur drey, oder wenn man auch $x = v + k$, oder $x = x : k$ ſetzt, nur vier derſelben willkührlich beſtimmen. Die übrigen ſind ſodann durch dieſe zugleich mit beſtimmt.

§. 42.

Wir können hier, ehe wir uns zu der Umkehrung dieſer Aufgabe wenden, theils noch einer andern Methode Erwähnung thun, theils noch folgenden Lehrſatz anführen, welcher aus der bisher gebrauchten Methode fließt, und überhaupt ſo viel ſagen will: wenn eine Gleichung

$$o = x^{mn} + \alpha x^{(m-1)n} + \beta x^{(m-2)n} + \gamma x^{(m-3)n}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

durch

durch die Gleichung

$$o = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

getheilt werden kann, und in erſterer $x^n = z$ geſetzt wird, ſo ſind die Wurzeln der Gleichung

$$o = z^m + \alpha z^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma z^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

die n^{te} Dignität der Gleichung

$$o = x^m \mp ax^{m-1} \pm bx^{m-2} \mp cx^{m-3} \pm \text{ꝛc.}$$

§. 43.

Die andere Methode, deren wir hier nur Erwähnung thun werden, gründet ſich auf den Newtonſchen Satz, welcher angiebt, wie man, vermittelſt der Coefficienten einer Gleichung, nicht nur die Summe der Wurzeln, ſondern auch die Summe von jeden Dignitäten derſelben finden könne. Dieſe Summen werden durch $\int x$, $\int x^2$, $\int x^3$, $\int x^4$ ꝛc. angezeigt, ſo, daß $\int x^n$ die Summe der n^{ten} Dignität aller Wurzeln der Gleichung anzèige. Die Gleichung ſey

$$o = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

ſo iſt

$$\int x = a$$
$$\int x^2 = a\int x - 2b$$
$$\int x^3 = a\int x^2 - b\int x + 3c$$
$$\int x^4 = a\int x^3 - b\int x^2 + c\int x - 4d$$
&c.

Ferners, indem man $z = x^n$ ſetzt, ſey wiederum die Gleichung

$$o = z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \gamma z^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

ſo

ſo iſt ebenfalls

$$\int z = \alpha$$
$$\int z^2 = \alpha \int z - 2\beta$$
$$\int z^3 = \alpha \int z^2 - \beta \int z + 3\gamma$$
$$\int z^4 = \alpha \int z^3 - \beta \int z^2 + \gamma \int z - 4\delta$$
&c.

Da nun vermöge der Vorausſetzung $z = x^n$ iſt, ſo iſt

$$\int z = \int x^n$$
$$\int z^2 = \int x^{2n}$$
$$\int z^3 = \int z^{3n}$$
&c.

Nun ſind vermöge der erſtern Gleichungen $\int x^n$, $\int x^{2n}$, $\int x^{3n}$ &c. durch a, b, c, d &c. gegeben, demnach hat man $\int z$, $\int z^2$, $\int z^3$ &c. und folglich laſſen ſich durch die letztern Gleichungen die Coefficienten α, β, γ, δ &c. und damit die Gleichung

$$0 = z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \&c.$$

finden, deren Wurzeln die n^{te} Dignität von den Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - \&c.$$

ſeyn werden. Man ſieht, ohne mein Erinnern, daß man dieſes Verfahren weiter ausdehnen, und z. E.

$$\int z = \int x^n + A \int x^p + B \int x^q + \&c.$$
$$\int z^2 = \int x^{2n} + A^2 \int x^{2p} + B^2 \int x^{2q} + \&c.$$
&c.

ſetzen kann.

§. 44.

§. 44.

Um nun auf die Umkehrung dieſer Aufgaben zu kommen, ſo werden wir zu dem Beyſpiele des §. 36. zurücke kehren. Wir haben daſelbſt geſehen, daß wenn die Quadratgleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

in

$$0 = z^2 - 3abz + b^3$$
$$+ a^3 z$$

verwandelt wird, ſodann die Wurzeln dieſer letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erſtern ſind. Es ſey nun eine Quadratgleichung

$$0 = z^2 + Az + B$$

gegeben, und dieſe ſolle in eine andere dergeſtalt verwandelt werden, daß dieſer letztern Wurzeln Cubicwurzeln von denen der fürgegebenen Gleichung ſind. Um dieſes zu erhalten, ſo wird die Gleichung

$$0 = z^2 + Az + B$$

mit

$$0 = z^2 - 3abz + b^3$$
$$+ a^3 z$$

verglichen, um die Coefficienten a, b durch A und B zu beſtinimen. Wir haben demnach

$$A = a^3 - 3ab$$
$$B = b^3$$

dieſes giebt

$$b = \sqrt[3]{B}$$

und $0 = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A.$

welches

welches eine cubiſche Gleichung iſt, durch deren Auflöſung man a findet. Die geſuchte Gleichung iſt ſodann

$$0 = x^2 + ax + b.$$

Man ſieht leicht, daß ſowohl b als a drey Werthe hat, und daß man daher anſtatt einer Gleichung neune findet, die der Aufgabe Genügen leiſten.

§. 45.

Wir werden uns aber damit nicht aufhalten, ſondern dieſe an ſich ſchon umgekehrte Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Es kann nemlich die letzte Gleichung

$$0 = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A$$

mit jeder Cubicgleichung

$$0 = a^3 + pa + q$$

deren zweytes Glied mangelt, verglichen werden. Thut man dieſes, ſo erhält man

$$A = -q$$
$$B = -\tfrac{1}{27}p^3$$

Da nun

$$0 = z^2 + Az + B$$

iſt, ſo darf man nur die gefundenen Werthe von A, B in dieſer Gleichung ſetzen, um

$$0 = z^2 - qz - \tfrac{1}{27}p^3$$

zu erhalten. Dieſe Gleichung aufgelöſt, giebt die zwo Wurzeln

$$z = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}.$$

Nun iſt $z = x^3$

demnach haben wir die zwo Wurzeln

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)})}$$

Nun iſt vermöge der Gleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

— a die Summe der beyden Wurzeln x, demnach haben wir

$$-a = \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$

welches die bekannte Cardaniſche Formel iſt, die man nach den bisherigen Methoden, die Gleichung

$$o = a^3 + pa + q$$

aufzulöſen, findet. Man ſieht zugleich, daß die beyden Glieder, aus denen ſie beſteht, Cubicwurzeln von den Wurzeln der Gleichung $o = z^2 - qz - \tfrac{1}{27}p^3$ ſind.

§. 46.

Um das Beyſpiel des §. 38. ebenfalls noch umzukehren; ſo haben wir daſelbſt geſehen, daß wenn man jede cubiſche Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

in

$$\begin{aligned} o = z^3 &+ 3cz^2 + 3ccz + c^3 \\ &- 3ab\ldots - 3abc\ldots \\ &+ a^3\ldots + b^3\ldots \end{aligned}$$

verwandelt, ſodann die Wurzeln dieſer letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erſtern ſind. Iſt nun von dieſen Gleichungen die letztere

tere gegeben, ſo, daß man

$$o = z^3 + Az^2 + Bz + C^3$$

hat, ſo läßt ſich die erſtere finden, und derſelben Wurzeln werden ſodann Cubicwurzeln der Wurzeln der fürgegebenen Gleichung ſeyn. Zu dieſem Ende haben wir

$$A = 3c - 3ab + a^3$$
$$B = 3cc - 3abc + b^3$$
$$C^3 = c^3$$

und hieraus findet ſich für a folgende Gleichung

$$o = a^9 + 3(3C - A)a^6 + 3(3C - A)^2 . a^3 + (3C - A)^3 - 27 C . a^6 - (B - AC) . a^3$$

eine Gleichung vom neunten Grade, welche aber in eine cubiſche verwandelt wird, wenn man $a^3 = v$ ſetzt. Iſt a durch die Auflöſung dieſer Gleichung gefunden, ſo hat man

$$b = \frac{3C - A + a^3}{3a}$$

und damit die Gleichung, die zu ſuchen war,

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

welche aber, weil A 9 Werthe, C aber 3 hat, auf 27 Arten verändert werden kann. Man ſieht überhaupt aus dieſen Beyſpielen, daß man auf deſto weitläuftigere Formeln verfällt, je höher die Dignitäten und Gleichungen ſind, die man in einander zu verwandeln vornimmt.

§. 47.

Indeſſen wird es nicht undienlich ſeyn, hier noch anzuzeigen, daß ſich die bisher gebrauchte

Methode ebenfalls auf andere Functionen der Wurzeln ausdehnen läßt. Man habe z. E. die Gleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

und dieſe ſolle in eine andere

$$o = z^2 + \alpha z + \beta$$

verwandelt werden, ſo, daß jede Wurzel der letztern eine Function der Wurzeln der erſtern ſey, die wir durch

$$z = x^2 + mx + n$$

ausdrücken wollen. Um dieſes zu erhalten, ſo ſetze man erſtlich dieſen Werth von z in der zweyten Gleichung. Nun iſt

$$\begin{aligned} z^2 &= x^4 + 2mx^3 + 2nx^2 \\ &\qquad + m^2x^2 + 2mnx + n^2 \\ + \alpha z &= \qquad + \alpha x^2 + m\alpha x + n\alpha \\ + \beta &= \qquad\qquad + \beta \end{aligned}$$

Da dieſe Gleichung vom vierten Grade iſt, ſo muß die erſtere

$$o = x^2 + ax + b$$

mit

$$o = x^2 + Ax + B$$

multipliciret werden, um ebenfalls ein Product vom vierten Grade

$$\begin{aligned} o = x^4 + ax^3 &+ bx^2 \\ + Ax^3 &+ Aax^2 + Abx \\ &+ Bx^2 + Bax + Bb \end{aligned}$$

zu haben. Vergleicht man nun die Coefficienten, ſo haben wir

am

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$n^2 + n\alpha + \beta = Bb$$

vier Gleichungen, durch welche ſich α, β, A, B beſtimmen laſſen. Werden demnach dieſe aufgelöſt, ſo findet ſich

$$A = 2m - a$$
$$B = m^2 + b - ma$$
$$\alpha = ma - aa + 2b - 2n$$
$$\beta = bm^2 + bb - mba + n^2 - nma + na^2 - 2nb$$

und dadurch iſt die Gleichung

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

welche zu ſuchen war, beſtimmt.

§. 48.

Es ſey z. E. die Gleichung

$$0 = x^2 - 10x + 16$$

in eine ſolche

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

zu verwandeln, ſo, daß die Wurzeln der letztern eine Function

$$z = x^2 + 3x + 2$$

der Wurzeln der erſtern ſeyn. Hier haben wir demnach

$$a = -10 \qquad m = +3$$
$$b = +16 \qquad n = +2$$

und hieraus finden ſich die Werthe

$$A = +16 \qquad \alpha = -102$$
$$B = +55 \qquad \beta = +1080$$

 den-

demnach die geſuchte Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

Die Probe iſt leicht gemacht. Denn die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^2 - 10x + 16$$

ſind + 2 und + 8. Wird jede derſelben in der Function

$$z = x^2 + 3x + 2$$

geſetzt, ſo erhält man die beyden Werthe $z = 12$ und $z = 90$. Und eben dieſes ſind auch die Wurzeln der für z gefundenen Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

§. 49.

Will man dieſe Aufgabe umkehren, und aus der Gleichung

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

die Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

finden, ſo müſſen a, b durch α, β vermittelſt der Gleichungen

$$\alpha = ma - aa + 2b - 2n$$
$$\beta = bm^2 + bb - mba + n^2 - nma + na^2 - 2nb$$

beſtimmt werden. Man verfällt dadurch auf eine Gleichung vom vierten Grade, welche etwas weitläuftig iſt. Ich werde ſie nicht herſetzen, weil es hier bey der angezeigten Möglichkeit der Aufgabe ſein bewenden haben kann.

§. 50.

§. 50.

Es laͤßt ſich aber die Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Man kann nehmlich die Function

$$z = x^2 + mx + n$$

und in derſelben beſonders die beyden Coefficienten m, n zum Quæſito machen, und da wird der hiebey vorkommende Fall am ſchicklichſten in Form eines Satzes und einer Aufgabe zugleich vorgetragen. Der Satz iſt folgender: Wenn zwo Quadratgleichungen

$$0 = x^2 + ax + b$$
$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

gegeben, ſo laͤßt ſich, und zwar ohne die Gleichungen vorerſt aufzuloͤſen, die Wurzel der einen z als eine Function der Wurzel der andern anſehen, welche die rationale Form

$$z = x^2 + mx + n$$

hat. Die Aufgabe iſt nun: die Coefficienten m, n zu beſtimmen. Der Beweis und zugleich die Aufloͤſung koͤmmt auf die (§. 47.) gefundene vier Gleichungen

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$nn + n\alpha + \beta = Bb$$

an. Werden aus dieſen die beyden Groͤſſen A, B, die wir nur, um die Aufgabe moͤglich zu machen, gebraucht haben, weggeſchaft, ſo

bleiben noch zwo Gleichungen für m und n, durch deren Auflöſung

$$m = a \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}$$

$$n = b - \tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}$$

gefunden, und damit die geſuchte Function

$$z = x^2 + mx + n$$

zugleich beſtimmt wird.

§. 51.

Man ſetze z. E. wie vorhin die zwo Gleichungen

$$0 = x^2 - 10x + 16.$$
$$0 = z^2 - 102x + 1080.$$

ſo iſt

$$a = -10 \qquad \alpha = -102$$
$$b = +16 \qquad \beta = +1080$$

Hieraus erhält man

$$\sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)} = \sqrt{6084} = 78$$
$$\sqrt{(aa - 4b)} = \sqrt{36} = 6$$

demnach $m = -10 \pm 13$

$$n = 16 + 51 \mp 65$$

dieſes giebt

den einen Werth von $m = +3$.
den correſpondirenden von $n = +2$.
den andern Werth von $m = -23$.
den correſpondirenden von $n = +132$.

demnach die beyden Functionen

$z =$

$$z = xx + 3x + 2.$$
$$z = xx - 23x + 132.$$

Setzt man in jeder dieſer Functionen die Werthe von x, welche 2 und 8 ſind, ſo giebt jede die zween Werthe von z, nemlich 12 und 90. Demnach hat man die Wahl, welche von dieſen Functionen man gebrauchen will. Solte man aber nur eine Wurzel von x wiſſen oder haben, oder dieſelbe lieber gebrauchen wollen, ſo muß man ſie in jeder von dieſen zwo Functionen ſetzen, um die beyden Werthe von z zu erhalten.

§. 52.

Endlich kann die Aufgabe, wiewohl auf eine unbeſtimmtere Art, noch dergeſtalt umgekehrt werden, daß, wenn nur die Function

$$z = xx + mx + n$$

gegeben, zwo Gleichungen

$$0 = xx + ax + b$$
$$0 = zz + \alpha z + \beta$$

zu finden ſeyn, deren die erſte x, die andere z beſonders enthalte. Dieſe Aufgabe iſt an ſich unbeſtimmt, und dient daher fürnemlich nur, wenn in der fürgegebenen Function z und x als veränderlich angeſehen werden. Denn hier ſind die vier Coefficienten a, b, α, β vermittelſt der vier Gleichungen

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$n^2 + n\alpha + \beta = Bb$$

zu ſuchen; demnach müſſen A, B, als willkührliche Gröſſen beybehalten werden, und man findet

$a = 2m - A$

$b = B - mA + mm$

$\alpha = AA + mA + 2B - 2n$

$\beta = BB - mAB + m^2B + n^2 - mnA - 2nB + nAA.$

Da nun nur m und n gegeben ſind, ſo können A, B willkührlich angenommen werden, und die Gleichungen

$$0 = xx + ax + b$$
$$0 = zz + \alpha z + \beta$$

werden immer der Function

$$z = xx + mx + n$$

ein Genügen thun; das will ſagen, man wird aus der erſten dieſer Gleichungen zwo Wurzeln x finden, welche den aus der zweyten gefundenen Wurzeln z entſprechen, und dieſes geht nicht nur durch alle mögliche, ſondern auch durch alle unmögliche Werthe von x und z.

§. 53.

Was bisher (§. 47. ſeqq.) von den Verhältniſſen der beyden Quadratgleichungen

$$0 = x^2 + ax + b$$
$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

und der Function

$$z = x^2 + mx + n$$

geſagt worden, iſt in Abſicht auf die dabey gebrauchte

gebrauchte Methode viel allgemeiner, weil es ſich auf jede Gleichungen und rationale Functionen erſtreckt. Alles dabey zielet überhaupt dahin, daß man mit den Wurzeln der Gleichungen, ohne dieſe vorerſt aufzulöſen, jede Veränderungen vornehmen könne. Und in dieſem Stücke iſt man in der Algebra noch zurücke geblieben, wie man es ſchon aus den bisher angeführten Beyſpielen erſehen kann, welche ungleich weiter gehen, als wenn man nur $x+a$, $x-a$, ax, $x:a$ anſtatt der Wurzel x ſetzt. Indeſſen hat man beſonders mit den trigonometriſchen Formeln Verwandlungen vorgenommen, welche denen, die wir hier für jede Gleichungen vorſchlagen, ſehr ähnlich ſind, und an ſich betrachtet, ſchwerer zu ſeyn ſcheinen, weil die Circulbögen, in Abſicht auf die Sinus und Tangenten, transcendente Gröſſen ſind.

§. 54.

Um aber dennoch auch, in Abſicht auf jede Gleichungen, hierin den Weg gebähnt zu machen, ſo werden wir bey folgender Aufgabe anfangen. Es ſeyn zwo Gleichungen

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$

$$0 = y^n - \alpha x^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{etc.}$$

gegeben, und es ſolle, ohne dieſe vorerſt aufzulöſen, eine dritte Gleichung

$$0 = z^\lambda - Az^{\lambda-1} + Bz^{\lambda-2} - Cz^{\lambda-3} + \text{etc.}$$

daraus hergeleitet werden, ſo, daß jede

Wur-

Wurzel z die Summe zwoer Wurzeln $x+y$ ſey.

§. 55.

Ehe wir die Auflöſung dieſer Aufgabe herſetzen, werden wir einige Anmerkungen darüber voraus ſchicken. Einmal ſieht man leicht, daß, wenn auch die Analyſis ſo weit gebracht wäre, daß man die beyden erſten Gleichungen auflöſen könnte, die dritte dennoch nicht wohl anders als durch eine weitläuftige Rechnung daraus würde hergeleitet werden, beſonders in allen den Fällen, wo die Wurzeln irrational wären. Denn da würden nachgehends, wie wir bald ſehen werden, dieſe irrationalen Gröſſen ſämtlich wieder aus der Rechnung wegfallen, weil, wenn die Coefficienten a, b, c, d ꝛc. α, β, γ, δ ꝛc. rational ſind, die Coefficienten A, B, C, D ꝛc. es nothwendig auch ſind.

§. 56.

Sodann tragen wir hier die Aufgabe aufs allgemeinſte vor. Wir nehmen in der dritten Gleichung ſo viele Wurzeln z an, als heraus kommen müſſen, wenn jede Wurzel x zu jeder Wurzel y beſonders addirt wird. Wenn demnach die Anzahl der Wurzeln der erſten Gleichung $= m$, der andern $= n$ iſt, ſo iſt die Anzahl der Wurzeln, ſo die dritte Gleichung haben wird $= mn$, und dieſes beſtimmt den Exponenten $\lambda = mn$. Dieſe Anzahl kann

kann alsdann vermindert werden, wenn in der erſten oder andern Gleichung, oder auch in beyden, etliche Wurzeln gleich ſind. Man muß dieſes aber voraus wiſſen, oder aus den Umſtänden ſchlieſſen können. Wir ſetzen hier alle Wurzeln ungleich, und um eine Einförmigkeit in der Rechnung beyzubehalten, alle poſitiv, weil, wenn in beſondern Fällen einige, oder alle negativ ſind, die Aenderung der Zeichen ſich darnach einrichten läßt.

§. 57.

Dieſe ſo abſolute Allgemeinheit trägt viel dazu bey, daß wir die Auflöſung der Aufgabe einfacher machen, und auf ihre allgemeinſte Geſetze bringen können. Und dazu werden uns die oben (§. 43.) angeführten Formeln von der Summe der Dignitäten der Wurzeln jeder Gleichung dienen können. Denn da hier die Coefficienten der beyden erſten Gleichungen gegeben ſind, ſo ſind, vermittelſt dieſer Formeln, auch die Summen von jeden Dignitäten ihrer Wurzeln gegeben. Es iſt demnach nur die Frage, wie aus dieſen Summen die Summen jeder Dignitäten der Wurzeln der dritten Gleichung gefunden werden können; das will ſagen, wie ſich aus $\int x^n$ und $\int y^n$ die Summe $\int (x+y)^n = \int z^n$ herleiten laſſe. Denn ſind dieſe gefunden, ſo dienen die vorbemeldeten Formeln (§. 43.) ebenfalls wiederum, um die geſuchten Coefficienten A, B, C &c. daraus zu beſtimmen.

§. 58.

Man ſetze zu dieſem Ende, P, Q, R &c. ſeyn die Wurzeln der erſten Gleichung; p, q, r &c. die Wurzeln der zweyten; ſo werden

$$\begin{array}{lll} P+p & Q+p & R+p \text{ \&c.} \\ P+q & Q+q & R+q \\ P+r & Q+r & R+r \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}$$

die Wurzeln der dritten ſeyn. Nun findet ſich jede Dignität k dieſer Wurzeln, vermittelſt des Newtonſchen Binomialſatzes. Es iſt nemlich

$$(P+p)^k = P^k + k.P^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.P^{k-2}p^2 + \text{\&c.} \ldots + p^k$$

$$(Q+p)^k = Q^k + k.Q^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.Q^{k-2}p^2 + \text{\&c.} \ldots + p^k$$

$$(R+p)^k = R^k + k.R^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.R^{k-2}p^2 + \text{\&c.} \ldots + p^k$$

&c.

Da man eben ſo viele Reihen für q, r, s &c. findet, als für p; ſo erhellt überhaupt hieraus folgendes:

1°. Wenn alle dieſe Dignitäten zuſammen addirt werden, ſo erhält man ſo viele

$$P^k, Q^k, R^k \text{ \&c.}$$

als Wurzeln p, q, r &c. ſind. Da nun die Anzahl dieſer Wurzeln $= n$ iſt, ſo iſt die Summe von allen

$= n$

$= n(P^k + Q^k + R^k + \&c.) = n\int x^k$.

2°. Auf gleiche Art erhält man ſo viele p^k, q^k, r^k &c. als Wurzeln P, Q, R &c. ſind. Demnach iſt die Summe von allen
$= m(p^k + q^k + r^k + \&c.) = m\int y^k$.

3°. Dieſes ſind demnach die Summen der erſten und letzten Glieder aller Reihen. Die Summen der darauf folgenden erſten, zweyten, dritten ... w^{ten} Glieder, laſſen ſich auf eine allgemeine Formel bringen. Denn da ſie einerley Coefficienten haben, ſo ſind die w^{ten} Glieder, mit Weglaſſung des Coefficienten,

$P^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$
$Q^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$
$R^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$
&c.

daher ihre Summe
$= \int x^{k-w} . \int y^w$.

4°. Wird demnach in dieſer Formel, der Ordnung nach, für w, 1, 2, 3, 4 ꝛc. geſetzt, ſo erhält man

$$\int(x+y)^k = \int z^k = n\int x^k + k\int x^{k-1} . \int y + \frac{k . k-1}{2} . \int x^{k-2} \int y^2 + k . \frac{k-1}{2} . \frac{k-2}{3} . \int x^{k-3} . \int y^3 + \&c.$$

welches die geſuchte Formel iſt.

§. 59.

§. 59.

Dieſe Formel ſcheint in dem erſten und letzten Gliede einen beſondern Coefficienten zu haben. Es läßt ſich aber derſelbe auch dadurch herleiten, daß $n = \int y^0$
$m = \int x^0$
iſt. Denn $\int y^0$ will ſagen, ſo viele Einheiten als die zweyte Gleichung Wurzeln hat, und $\int x^0$ ſo viele Einheiten, als Wurzeln der erſten Gleichung ſind. Und damit bringen dieſe beyde Coefficienten keine Anomalie in die Formel. Dieſe Formel iſt übrigens der Newtonſchen in allem ähnlich, und unterſcheidet ſich nur darin, daß, anſtatt daß in der Newtonſchen, um eine Dignität heraus zu bringen, nur Dignitäten mit einander multiplicirt werden, in dieſer ganzen Summen von Dignitäten mit einander multiplicirt werden muſſen, und dadurch aber auch eine Summe von Dignitäten heraus gebracht wird, deren jede ein Binomium iſt.

§. 60.

Setzen wir nun in dieſer Formel für k der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. und bemerken dabey, daß wo ein Exponent von x, $= 0$ wird, man $\int x^0 = m$ ſetzen müſſe, ſo haben wir

$$\int z = n\int x + m\int y$$
$$\int z^2 = n\int x^2 + 2\int x . \int y + m\int y^2$$
$$\int z^3 = n\int x^3 + 3\int x^2 . \int y + 3\int x . \int y^2 + m\int y^3$$
$$\int z^4 = n\int x^4 + 4\int x^3 . \int y + 6\int x^2 . \int y^2 + 4\int x . \int y^3 + m\int y^4 \text{ \&c.}$$

§. 61.

§. 61.

Um nun dieſes Verfahren durch das einfachſte Beyſpiel zu erläutern, ſo ſeyn zwo Quadratgleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und es ſolle eine Gleichung gefunden werden, deren Wurzeln $z = x + y$ ſind. Dieſe Gleichung iſt nun (§ 56.)

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

weil die Summe der Exponenten $n + m = 2 + 2 = 4 = \lambda$ iſt. Nun iſt vermöge der Formel des §. 43.

$$\int x = a \qquad \int y = \alpha$$
$$\int x^2 = a^2 - 2b \qquad \int y^2 = \alpha^2 - 2\beta$$
$$\int x^3 = a^3 - 3ab \qquad \int y^3 = \alpha^3 - 3\beta\alpha$$
$$\int x^4 = a^4 - 4a^2b + 2bb \qquad \int y^4 = \alpha^4 - 4\beta\alpha^2 + 2\beta\beta$$

folglich

$$\int z = 2(a + \alpha)$$
$$\int z^2 = 2a^2 - 4b + 2\alpha^2 - 4\beta + 2a\alpha$$
$$\int z^3 = 2a^3 - 6ab + 2\alpha^3 - 6\alpha\beta$$
$$+ 3\alpha a^2 - 6\alpha b + 3a\alpha^2 - 6a\beta$$
$$\int z^4 = 2a^4 - 8ab + 4bb + 2\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 4\beta\beta$$
$$+ 4a^3\alpha - 12ab\alpha + 4\alpha^3 a - 12\alpha\beta a$$
$$+ 6a^2\alpha^2 - 12a^2\beta - 12\alpha^2 b + 24b\beta$$

Da nun (§. 43.)

$$A = \int z$$
$$2B = A\int z - \int z^2$$
$$3C = \int z^3 - A\int z^2 + B\int z$$
$$4D = A\int z^3 - B\int z^2 + C\int z - \int z^4$$

iſt, ſo findet ſich, wenn man die Werthe von $\int z$, $\int z^2$, $\int z^3$, $\int z^4$ in dieſen Formeln ſetzt, und die Reduction vornimmt

$$A = 2(a + \alpha)$$
$$B = (a + \alpha)^2 + (a\alpha + 2b + 2\beta)$$
$$C = (a\alpha + 2b + 2\beta).(a + \alpha)$$
$$D = (a\beta + \alpha b).(a + \alpha) + (\beta - b)^2$$

und damit iſt die geſuchte Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

beſtimmt, und gefunden, deren Wurzeln z die Summe $x + y$ der Wurzeln der Gleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha x + \beta$$

ſind.

§. 62.

Will man anſtatt $z = x + y$, die Differenz $z = x - y$ haben, ſo darf man nur in der zweyten Gleichung α negativ nehmen, weil dieſes die Wurzeln y verneinend macht.

§. 63.

Solle aber

$$z = \pi x + \varrho y$$

ſeyn; ſo müſſen beyde Gleichungen vorerſt in ſolche verwandelt werden, deren Wurzeln

$\xi =$

$\xi = \pi x$, und $\eta = \varrho y$ ſind. Man wird demnach

$$0 = \xi^2 - a\pi\xi + b\pi^2$$
$$0 = \eta^2 - \alpha\varrho\eta + \beta\varrho^2$$

haben, und in den vier Gleichungen, wodurch A, B, C, D beſtimmt worden, $a\pi$ anſtatt a, und $\alpha\varrho$ anſtatt α ſetzen müſſen, um die geſuchte Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

heraus zu bringen.

§. 64.

Solle aber

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

ſeyn, ſo můſſen einige Verwandlungen mehr vorgehen. Man macht nemlich nach den oben gegebenen Methoden aus

$$0 = x^2 - ax + b$$

eine Gleichung

$$0 = \xi^2 + 2b\xi + bb \atop - aa\xi$$

deren Wurzeln $\xi = xx$, oder Quadrate von x ſind. Sodann ſetzt man $\pi xx = \pi\xi = \zeta$, um dadurch

$$0 = \zeta^2 + 2\pi b\zeta + bb\pi\pi \atop - aa\pi\zeta$$

zu erhalten. Endlich ſetzt man $\zeta + \tau = v$, und ſo erhält man

$$0 = v^2 - 2\tau v + \tau\tau$$
$$+ 2\pi b v - 2\pi b \tau$$
$$- aa\pi v + aa\pi\tau$$
$$+ bb\pi\pi$$

Ferners verwandelt man die zweyte Gleichung

$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

nach der oben angegebenen Methode (§. 36.) in

$$0 = \eta^2 - 3\alpha\beta\eta + \beta^3$$
$$+ \alpha^3\eta$$

deren Wurzeln $\eta = y^3$, oder Cubi von y ſind. Sodann ſetzt man $\varrho\eta = \varrho y^3 = \sigma$, und erhält dadurch

$$0 = \sigma^2 - 3\alpha\beta\varrho\sigma + \beta^3\varrho^2$$
$$+ \alpha^3\varrho\sigma$$

Da man auf dieſe Art endlich $z = v + \sigma$ hat, ſo darf man nur in den 4 Gleichungen, wodurch A, B, C, D beſtimmt werden (§. 60.)

$-2\tau + 2\pi b - aa\pi$ anſtatt a

$\tau\tau - 2\pi b\tau + aa\pi\tau + b^2\pi^2$ anſtatt b

und

$-3\alpha\beta\varrho + \alpha^3\varrho$ anſtatt α

$\beta^3\varrho^2$ anſtatt β

ſetzen, um dadurch die Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu beſtimmen, deren Wurzeln ſodann

$$z = v + \sigma = \zeta + \tau + \sigma = \pi\xi + \tau + \varrho\eta =$$
$$\pi x^2 + \tau + \varrho y^3$$

folglich

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

ſeyn werden.

§. 65.

§. 65.

Man kann auf eine ähnliche Art

$$\begin{aligned} z = \; & Mx^k + Nx^h + \&c. \\ & + Px^k + Qy^\lambda + \&c. \\ & + R \end{aligned}$$

ſetzen, und die Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

aus den beyden Gleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

ohne dieſe vorerſt aufzulöſen, heraus bringen. Denn dieſe beyden Gleichungen laſſen ſich nach der Regel des §. 47 in zwo andere

$$0 = \xi^2 - a'\xi + b'$$
$$0 = \eta^2 - \alpha'\eta + \beta'$$

dergeſtalt verwandeln, daß

$$\xi = Mx^k + Nx^h + \&c. + R$$

und

$$\eta = Py^k + Qy^\lambda + \&c.$$

ſey, und ſo hat man ſodann

$$z = \xi + \eta.$$

wodurch ſich die Coefficienten in der geſuchten Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

beſtimmen laſſen.

§. 66.

Wir werden nun aber ſehen, wie die Rechnung ausfällt, wenn z nicht die Summe $x + y$, ſon-

ſondern das Product xy iſt. Es ſey demnach wiederum, wie §. 54.

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{rc.}$$

$$0 = y^n - \alpha y^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{rc.}$$

ſo iſt (§. 54. 56.)

$$0 = z^{mn} - Az^{mn-1} + Bz^{mn-2} - Cz^{mn-3} + \text{rc.}$$

Es ſeyn ebenfalls, wie (§. 58.) P, Q, R &c. die Wurzeln der erſten Gleichung, p, q, r &c. die Wurzeln der andern; ſo ſind, weil $z = xy$ ſeyn ſolle, die Wurzeln der dritten

$$\begin{matrix} Pp & Qp & Rp & \&c. \\ Pq & Qq & Rq & \\ Pr & Qr & Rr & \\ \&c. & \&c. & \&c. & \end{matrix}$$

Da dieſes nun keine Binomia ſind, ſo gebrauchen wir den Newtonſchen Lehrſatz nicht, ſondern es iſt überhaupt

$$\begin{aligned} \int z^k = & + P^k p^k + Q^k p^k + R^k p^k \&c. \\ & + P^k q^k + Q^k q^k + R^k q^k \\ & + P^k r^k + Q^k r^k + R^k r^k \\ & \quad \&c. \qquad \&c. \qquad \&c. \end{aligned}$$

das will ſagen,

$$\int z^k = \int y^k (P^k + Q^k + R^k + \&c.) = \int y^k . \int x^k$$

folglich, wenn man der Ordnung nach $k = 1, 2, 3, 4$ rc. ſetzt,

$$\begin{aligned} \int z &= \int x . \int y \\ \int z^2 &= \int x^2 . \int y^2 \\ \int z^3 &= \int x^3 . \int y^3 \\ &\&c. \end{aligned}$$

und

und hieraus vermöge der Formeln des §. 43.

$$+ \; A = \int x \int y$$
$$-2B = \int x^2 . \int y^2 - A \int x . \int y$$
$$+3C = \int x^3 . \int y^3 - A \int x^2 . \int y^2 + B \int x . \int y$$
$$-4D = \int x^4 . \int y^4 - A . \int x^3 . \int y^3 + B \int x^2 . \int y^2 - C \int x . \int y.$$

&c.

Da nun $\int x$, $\int x^2$, $\int x^3$ &c. $\int y$, $\int y^2$, $\int y^3$ &c. durch a, b, c &c. α, β, γ &c. gegeben ſind, (§. 43.) ſo hat man vermittelſt dieſer Formeln auch A, B, C, D &c. und damit die geſuchte Gleichung

$$0 = z^{mn} - A z^{mn-1} + B z^{mn-2} - \&c.$$

deren Wurzeln $z = xy$ ſeyn werden. Man ſieht zugleich aus dieſem Beweiſe, daß

A durch a, α
B durch a, α, b, β
C durch a, α, b, β, c, γ
&c.

beſtimmt wird, ſo viel auch die fürgegebenen beyden Gleichungen Glieder und Coefficienten haben mögen.

§. 67.

Ungeachtet übrigens die Beweiſe, ſo wir ſowohl für $z = x + y$, als für $z = xy$ gegeben haben, bey ihrer Allgemeinheit noch ſehr einfach ſind, ſo verfällt man dennoch in weitläufige Rechnungen, wenn man ſie in beſondern Fällen entwickeln, und die Coefficienten A, B, C, D &c. nicht durch $\int x$, $\int x^2$ &c. $\int y$, $\int y^2$ &c.

ſondern durch a, b, c &c. α, β, γ &c. ausdrucken will, dafern dieſe nicht in Zahlen gegeben ſind. Ich habe daher eine andere Methode geſucht, wodurch dieſe Weitläuftigkeit in beſondern Fällen abgekürzt werden kann. Es ſeyn z. E. zwo Quadratgleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und eine dritte Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu finden, ſo, daß $z = xy$ ſey. Man ſetze

$$x = z : y$$

in die erſte Gleichung

$$0 = x^2 - ax + b$$

ſo verwandelt ſich dieſe in

$$0 = z^2 - azy + by^2$$

Nun giebt die zweyte Gleichung mit b multiplicirt

$$0 = by^2 - \alpha by + \beta b$$

wird dieſe abgezogen, ſo bleibt

$$0 = z^2 - b\beta + (\alpha b - az)y$$

demnach

$$y = (b\beta - z^2) : (\alpha b - az)$$

Dieſer Werth von y in der Gleichung

$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

geſetzt, und die Reduction vorgenommen, giebt die geſuchte Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^4 - a\alpha z^3 + a^2\beta z^2 - a\alpha b\beta z + b^2\beta^2 \\ + \alpha^2 b \,.. \qquad\qquad \\ - 2b\beta \,.. \qquad\qquad \end{aligned}$$

deren Wurzeln $z = xy$ ſind.

§. 68.

Solte aber z nicht das Product x y, ſondern der Quotient x : y, oder ein Product aus $x^m y^n$ ſeyn, ſo gelangt man beſſer zum Ziele, wenn man vorerſt die beyden Gleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

in zwo andern Quadratgleichungen verwandelt, deren Wurzeln

$$\xi = x^m$$
$$\eta = y^n$$

ſind, welches nach den oben angegebenen Methoden geſchieht. Denn ſo erhält man

$$z = \xi\eta$$
$$0 = \xi^2 - G\xi + H$$
$$0 = \eta^2 - K\eta + L$$

und folglich die geſuchte Gleichung

$$0 = z^4 - GKz^3 + G^2Lz^2 - GHKLz + H^2L^2$$
$$+ K^2Hz^2$$
$$- 2HLz^2$$

welche immer eine Biquadratgleichung ſeyn wird, ſo groß auch die Exponenten m, n ſeyn mögen.

IX.

Quadratur und Rectification der krummen Linien durch geradlinichte Vielecke, welche um dieſelben und in denſelben beſchrieben werden können.

§. 1.

Tab. III. Archimedes iſt der erſte geweſen, welcher ſich, da die Quadratur und Rectification des Circuls nicht genau gefunden noch durch Zahlen ausgedrucket werden konnte, in Sinn kommen lieſſe, dieſe beyden Gröſſen, vermittelſt der um den Circul und in denſelben beſchriebenen Vielecke dergeſtalt zu beſtimmen, daß er die Schranken angeben könnte, zwiſchen welchen ſie fiele. Die durchaus gleichförmige Krümmung des Circuls machte, daß man die ſogenannten regulären Vielecke dazu gebrauchen konnte, bey welchen ſich von einer Seite auf den ganzen Umkreis ſchlieſſen lieſſe; und einige geometriſche Lehrſätze verhalfen dazu, daß man durch fortgeſetztes Halbiren aus jedem angenommenen Vielecke andere von 2, 4, 8, 16, 32 ꝛc. mal mehr Seiten berechnen konnte.

§. 2.

§. 2.

Dieſe Schicklichkeiten fallen bey jeden andern krummen Linien gröſtentheils weg. Es laſſen ſich zwar um und in denſelben geradlinichte Vielecke beſchreiben, dabey aber werden, wenn man die Seiten gleich macht, die Winkel ungleich, und hinwiederum erhält man bey gleichen Winkeln ungleiche Seiten; dieſes macht, daß ſich nicht ſo unbedingt von jeder Seite auf den ganzen Umkreis des Vieleckes ſchlieſſen läßt. Ueberdies läßt ſich auch nicht ſo leicht beſtimmen, wie wenn das Vieleck um die Linie gezogen oder angenommen worden, daß demſelben entſprechende Vieleck in derſelben müſſe gezogen werden, weil ſich, wenn man nicht zwo oder mehr Bedingungen zugleich annimmt, unzählige ziehen laſſen, die ſämtlich einander unähnlich ſind. Hingegen iſt bey dem Circul die Anzahl der Seiten, und die Bedingung, daß ſie einander gleich ſeyn ſollen völlig zureichend.

§. 3.

Da demnach bey der Ziehung der Vielecke um jede andere krumme Linien, die nicht Circul ſind, viel willkührliches bleibt, ſo werden wir bey dem anfangen, was für ſich am einfachſten, und beſonders in der Ausübung am leichteſten iſt. Und hier bieten ſich ſogleich zween Fälle an. Denn hat man nach beliebigen Regeln ein Vieleck in eine krumme Linie beſchrie-

beſchrieben, ſo iſt unter allen Vielecken, die von gleichvielen Seiten um daſſelbe beſchrieben werden können, dasjenige das gleichförmigſte und regulärſte, deſſen Seiten mit den Seiten des inner der krummen Linie gezogenen Parallel ſind. Die Regularität wird gröſſer und zu den vorhabenden Abſichten bequemer, wenn man die Winkel gleich macht, welche jede zwo Seiten des Vieleckes mit einander machen.

§. 4.

Fig. I. So z. E. ſey AMNB eine halbe Ellipſe. Solte in und um dieſelbe ein Sechseck beſchrieben werden, ſo macht man den Winkel MAB = 60 Gr. und zieht AM. Sodann wird AMN = MNB = 120 Gr. gemacht, und MN, NB gezogen, ſo iſt AMNB die Hälfte des Sechseckes in der Ellipſe. Ferner zieht man die Tangente am, mn, nb mit AM, MN, NB parallel, und ſo iſt amnb die Hälfte des Sechseckes um die Ellipſe. Dieſe Art die Vielecke in und um eine krumme Linie zu zeichnen, hat in Abſicht auf die Ausübung etwas ſehr leichtes und einfaches, weil ſich dabey die Durchſchnittspuncten M, N, B, m, n, b von ſelbſt ergeben, und weil es ſehr leicht iſt, Tangenten an eine krumme Linie zu ziehen, welche mit der Chorde derſelben parallel ſeyn.

§. 5.

Es verſchwindet aber dieſe Leichtigkeit gröſtentheils, wenn man bey dem äuſſern Vielecke

ecke anfängt, und ſodann das Innere nach demſelben ziehen will, weil ſich die Puncte A, M, N, B nicht eben ſo leicht durch die Puncten a, m, n, b beſtimmen laſſen. Mit der Bedingung, daß die innern Seiten den äuſſern parallel ſeyn ſollen, reicht man nicht aus, weil ſich unter dieſer Bedingung unzählige Vielecke ziehen laſſen, in dem man z. E. den Punct M auf dem ganzen Bogen $\mu\nu$, der zwiſchen den Berührungspuncten μ, ν liegt, annehmen kann, wo man will. Geht man aber von der Bedingung der parallelen Lage beyder Vielecke ab, ſo iſt der einfachſte und kenntlichſte Fall derjenige, wo, nachdem das äuſſere Vieleck gezogen worden, das Innere in die Berührungspuncten μ, ν, β falle. Auf dieſe Art ſtellt $\alpha\mu\nu\beta\gamma$ die Hälfte des Sechseckes vor. Die Beſtimmung der Berührungspuncte iſt es nun, was hiebey die meiſte Schwürigkeit verurſacht. Hingegen hat dieſe letztere Art der Verzeichnung beyder Vielecke den Vortheil, daß ſich dabey einzelne Stücke der krümmen Linie, dergleichen $\mu M \nu$ iſt, beſonders betrachten, und mit dem Triangel $\mu m \nu$ vergleichen laſſen. Ueberdies iſt der Winkel E m a das Maaß der Krümmung des Bogens $\mu M \nu$, weil derſelben in μ die Richtung μm, in ν die Richtung νm hat. Werden aus μ, ν parallele Ordinaten $\mu\alpha$, νC auf A B gezogen, ſo findet ſich

$$E m \mu = m \nu C - a \mu \alpha.$$

Denn

Denn es iſt

$$Em\mu = m\mu\nu + m\nu\mu$$
$$180° = \alpha\mu\nu + m\nu C$$

demnach

$$Em\mu + 180 = \alpha\mu m + m\nu C$$
$$Em\mu = \alpha\mu m - 180 + m\nu C = m\nu C - \alpha\mu\alpha$$

Da nun die Winkel $a\mu\alpha$, $m\nu C$ durch die Differentialien der Abſciſſen und Ordinaten leicht beſtimmt werden, ſo läßt ſich auch die krumme Linie leicht in ſolche Theile theilen, die einerley Krümmung haben, oder wobey die Poligonalwinkel $\mu m\nu$ ſämtlich gleich werden.

§. 6.

Um nun zu ſehen, was hieraus zum Behuf der Rectification der krummen Linien kann gefunden werden, ſo werden wir einen Triangel, dergleichen $\mu m \nu$ iſt, beſonders vornehmen, und denſelben auf das allgemeinſte betrachten. Fig. II. Es ſey demnach AM ein Stück einer krummen Linie, AT die Tangente des Puncts A, und TM die Tangente des Puncts M, AM die Chorde. Man verlängere AT in P und fälle auf AP die Linie MP ſenkrecht, ſo, daß AP als eine Abſciſſe, PM als eine Ordinate angeſehen werde, und TP die dem Punct M zugehörige Subtangente ſey. Man ſetze

$$AP = x$$
$$PM = y$$

ſo iſt

die

die Chorde $AM = \surd(xx + yy)$

$PT = ydx : dy$

$AT = x - ydx : dy$

und der Bogen $AM = \int\surd(dx^2 + dy^2)$

die Tangente $TM = y\surd\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)$

§. 7.

Werden in dieſen Formeln die Wurzelgröſſen nach der Newtonſchen Binomialformel aufgelöſt, ſo iſt

$$TM = y\left(\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{2dx} - \frac{dy^3}{2.4dx^3} + \frac{1.3.dy^5}{2.4.6dx^5} - \text{rc.}\right)$$

demnach

$$AT + TM = x + \frac{ydy}{2dx} - \frac{y.dy^3}{2.4.dx^3} + \frac{3y.dy^5}{2.4.6.dx^5} - \text{rc.}$$

ferner die Chorde

$$AM = x + \frac{y^2}{2x} - \frac{y^4}{2.4.x^3} + \frac{1.3.y^6}{2.4.6.x^5} - \text{rc.}$$

und der Bogen

$$AM = x + \tfrac{1}{2}\int\frac{dy^2}{dx} - \frac{1}{2.4}\int\frac{dy^4}{dx^3} + \frac{1.3}{2.4.6}\int\frac{dy^6}{dx^5} - \text{rc.}$$

Da nun hiebey

$$dy : dx = \text{tang. } MTP$$

iſt, ſo ſind alle dieſe Reihen deſtomehr convergirend, je kleiner die Krümmung des Bogens AM iſt.

§. 8.

Nun läßt ſich die Verhältniß zwiſchen y und x überhaupt durch die Reihe

y =

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + ex^6 + \text{ꝛc.}$$

ausdrücken. Ich ſage überhaupt und ohne Rückſicht auf gewiſſe Puncte einiger krummen Linien, wo ſtatt ganzer Exponenten gebrochene zum Vorſchein kommen, oder wo einige der erſten Glieder dieſer Reihe = o werden. Man ſetze A wäre ein ſolcher Punct, ſo darf man nur anſtatt aus der Tangente A P die Abſciſſenlinie zu machen, die Abciſſen auf M T nehmen, und man wird die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \&c.$$

immer ganz erhalten. In dieſer Reihe bleiben nemlich die beyden erſten Glieder, welche ſonſt

$$A + Bx$$

ſeyn würden, weg, weil y zugleich mit $x = o$ wird, und weil B x nur vorkömmt, wo die Abſciſſenlinie die krumme Linie unter einem Winkel ſchneidet, deren Tangente = B iſt.

§. 9.

Wenn wir demnach die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

als die allgemeinſte Gleichung zwiſchen y und x annehmen, ſo iſt

$$dy = dx(2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + 5dx^4 + \text{ꝛc.})$$

Werden nun dieſe Werthe in den erſt gefundenen Reihen (§. 7.) geſetzt, und die für den Bogen A M angezeigten Integrationen vorgenommen,

men, ſo erhålt man den Bogen AM $= x +$

$$\tfrac{2}{3}a^2x^3 + \tfrac{3}{2}abx^4 + \tfrac{8}{5}acx^5 + \tfrac{5}{3}adx^6 + \tfrac{12}{7}aex^7 + \text{etc.}$$
$$+ \tfrac{9}{10}bb \ldots + 2bc \ldots + \tfrac{15}{7}bd \ldots$$
$$- \tfrac{2}{5}a^4 \ldots - 2a^3b \ldots + \tfrac{8}{7}cc \ldots$$
$$- \tfrac{18}{7}a^3c \ldots$$
$$- \tfrac{27}{7}a^2b^2 \ldots$$
$$+ \tfrac{4}{7}a^6 \ldots$$

die Chorde AM $= x +$

$$\tfrac{1}{2}a^2x^3 + abx^4 + acx^5 + adx^6 + aex^7 + \text{etc.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}bb \ldots + bc \ldots + bd \ldots$$
$$- \tfrac{1}{8}a^4 \ldots - \tfrac{1}{2}a^3b \ldots + \tfrac{1}{2}cc \ldots$$
$$- \tfrac{1}{2}a^3c \ldots$$
$$- \tfrac{3}{4}b^2a^2 \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{16}a^6 \ldots$$

Ferners die Summe der Tangenten AT $+$ TM $=$

$$x + a^2x^3 + \tfrac{5}{2}abx^4 + 3acx^5 + \tfrac{7}{2}adx^6 + 4aex^7$$
$$- a^4 \ldots - \tfrac{11}{2}a^3b \ldots - 7a^3c \ldots$$
$$+ \tfrac{3}{2}b^2 \ldots + \tfrac{7}{2}bc \ldots - \tfrac{45}{4}a^2b^2 \ldots$$
$$+ 4bd \ldots$$
$$+ 2cc \ldots$$
$$+ 2a^6 \ldots$$

§. 10.

Vergleicht man nun dieſe drey Reihen mit einander, ſo finden ſich die Coefficienten a, b, c, d &c. in allen auf einerley Art verwickelt, und der Unterſchied beſteht nur in den Zahlen, womit ſie in jeder Reihe beſonders multiplicirt ſind. Dieſe Zahlen finden ſich nun aber ſo beſchaffen, daß, wenn man $\tfrac{1}{3}$ (AT $+$ TM) zu

$\frac{2}{3}$ von der Chorde addirt, man eine Reihe

$$\frac{AT + TM + 2AM}{3} = x + \tfrac{2}{3}a^2 x^3 + \begin{array}{l} \tfrac{3}{2}abx^4 + \tfrac{5}{3}acx^5 + \tfrac{11}{6}adx^6 + 2aex^7 + \text{etc.} \\ \qquad + \tfrac{5}{6}bb \ldots + \tfrac{11}{6}bc \ldots + 2bd \ldots \\ \qquad - \tfrac{5}{12}a^4 \ldots - \tfrac{13}{6}a^3b \ldots + cc \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{8}{3}a^3c \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{17}{4}a^2b^2 \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{17}{24}a^6 \ldots \end{array}$$

erhält, deren drey erſten Glieder mit der für den Bogen AM gefundenen Reihe übereintreffen, und welche folglich nur um $\frac{AT + TM + 2AM}{3} -$

$$AmM = \begin{array}{l} + \tfrac{1}{15}acx^5 + \tfrac{1}{6}adx^6 + \tfrac{2}{7}aex^7 + \text{etc.} \\ - \tfrac{1}{15}bb \ldots - \tfrac{1}{6}bc \ldots - \tfrac{1}{7}bd \ldots \\ - \tfrac{1}{60}a^4 \ldots - \tfrac{1}{6}a^3b \ldots - \tfrac{1}{7}cc \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{2}{21}a^3c \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{11}{28}b^2a^2 \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{23}{168}a^6 \ldots \end{array}$$

gröſſer iſt, als der Bogen. Da dieſer Unterſchied erſt bey der fünften Dignität der Abſciſſe x anfängt, ſo wird derſelbe bey jeden Halbiren der Abciſſe, oder auch des Bogens, 32 mal kleiner. Man kann alſo hieraus beurtheilen, was man ſich von dieſer Art, die Länge einer krummen Linie durch Näherung zu beſtimmen, zu verſprechen hat, oder von wie wenigen Graden der Krümmung man den Bogen AmM annehmen müſſe, wenn der Fehler, den man zuläßt, wenn man für deſſen Länge

$$\frac{AT + TM + 2AM}{3}$$

an-

annimmt, eine gewiſſe Gröſſe nicht überſchreiten ſollen.

§. 11.

Wir wollen um dieſes auf eine leichte Art verſtändlicher zu machen, den Halbmeſſer des Krümmungskreiſes zur Einheit annehmen, und die Fehler beſtimmen, die man zuläßt, wenn man auf dieſe Art die Länge eines Bogens des Krümmungskreiſes ſucht. Es ſey demnach AM ein Circulbogen, deſſen Halbmeſſer = 1 iſt; ſo iſt AM deſſen Chorde, AT = TM die Tangente der Hälfte des Bogens. Man ſetze nun den Bogen ſtuffenweiſe 5, 10, 15 Gr. ſo wird man für

5 Gr. $\frac{AT + TM + 2AM}{3} = 0{,}0872665$

10 : : : : : : : : = 0,1745334

15 : : : : : : : : = 0,2618033

20 : : : : : : : : = 0,3490823

ꝛc.

erhalten, da hingegen die Länge des Bogens ſelbſt für

5° : : : : : : : : : = 0,0872665

10 : : : : : : : : : = 0,1745329

15 : : : : : : : : : = 0,2617994

20 : : : : : : : : : = 0,3490659

ꝛc.

iſt. Zieht man dieſe Zahlen von den erſten ab, ſo bleibt für

5 Gr.	= 0,0000000
10	= 0,0000005
15	= 0,0000039
20	= 0,0000165
ꝛc.	

Woraus man ſieht, daß, wenn man einen Fehler, der ſich auf $\frac{1}{60000}$ des Halbmeſſers für einen Bogen von 20 Graden beläuft, nicht achten will, man auf dieſe Art Bögen von 20 Graden Krümmung rectificiren kann. Nimmt man aber lauter Bögen von 5 Graden, ſo iſt der Fehler nicht ſo groß, daß er auf 10 Millionen 1 betrüge. Da nun die gemeinen Tafeln der Sinus, Tangenten, Secanten ebenfalls nur bis auf 10000000te Theile berechnet ſind, und man ſich faſt bey allen Rechnungen damit begnügt, ſo erhellet hieraus, daß man ſich aus gleichen Gründen begnügen kann, bey der Rectification jeder krummen Linie, dieſelbe in ſolche Stücke zu theilen, deren Krümmung 5 Gr. beträgt, und daß man ſodann für die Länge jedes Bogens AmA ſchlechthin nur

$$\frac{AT + TM + 2AM}{3}$$

nehmen darf. Der Fehler wird immer kleiner als $\frac{1}{10000000}$ Theil des Halbmeſſers des Krümmungskreiſes ſeyn.

§. 12.

Will man ſich aber ſtatt der Berechnung der Conſtruction bedienen, ſo wird die Figur ſelten

ſelten ſo groß gezeichnet, daß $\frac{1}{60000}$ des Halbmeſſers des Krümmungskreiſes merklich wäre, daher kann man kürzer verfahren, und mit einem male die Länge ſolcher Stücke der krummen Linien finden, deren Krümmung ſich bis auf 20 Gr. beläuft. Wir haben nun noch zu ſehen, was ſowohl bey der Berechnung als bey der Conſtruction zu thun iſt.

§. 13.

Es ſey demnach AMN jede krumme Linie. Fig. III. Auf AP werden die Abſciſſen AP, AQ, und die ſenkrechten Ordinaten PM, QN genommen. TMR, VRN ſeyn die Tangenten in M und N; R derſelben Durchſchnittspunct, und MN die Chorde, ſo iſt der zwiſchen M und N liegende Bogen um deſto genauer

$$= \frac{MR + RN + 2MN}{3}$$

je kleiner die Krümmung deſſelben iſt, ſo, daß bey jeder doppelt kleinern Krümmung der Fehler bey 32 mal geringer wird (§. 10.).

§. 14.

Man ſetze nun

$$AP = x \quad AQ = \xi \quad MTP = \omega$$
$$PM = y \quad QN = \eta \quad NVQ = \varphi$$

ſo wird

$$\text{tang.}\,\omega = dy : dx$$
$$\text{tang.}\,\varphi = d\eta : d\xi$$

und folglich

$$\text{tang. VRT} = \text{tang.}(\omega - \varphi) = \frac{dy.d\xi - d\eta.dx}{dx.d\xi + dy.d\eta}$$

ſeyn. Hiedurch wird, weil VRT die Krümmung des Bogens iſt, dieſelbe beſtimmt, und man kann in Abſicht auf die zu erhaltende Genauigkeit nach §. 11. erörtern, ob man den fürgegebenen Bogen MN, deſſen Länge zu finden, ganz beybehalten könne, oder denſelben in Theile zerfällen müſſe, indem man zwiſchen PQ noch eine oder mehrere Abſciſſen annimmt. Da im letztern Fall für jeden Theil einerley Rechnung vorzunehmen iſt, wie für den ganzen Bogen, ſo können wir AM als einen ſolchen Theil angeben, und die Rechnung, wodurch die Chorde MN, nebſt den Tangenten MR, RN, oder überhaupt die Seiten des Triangels MRN beſtimmt werden, wird folgendermaſſen gefunden.

§. 15.

Man ziehe NH, MK mit der Abſciſſenlinie AQ und KRL mit den Ordinaten parallel, ſo iſt

$$MH = ML + KN = \xi - x$$
$$LH = LR + RK = \eta - y$$

Nun iſt

$$ML = MR \text{ coſ. } \omega \qquad LR = MR \text{ ſin. } \omega$$
$$KN = NR \text{ coſ. } \varphi \qquad RK = NR \text{ ſin. } \varphi$$

demnach

$$MR \text{ coſ. } \omega + NR \text{ coſ. } \varphi = \xi - x$$
$$MR \text{ ſin. } \omega + NR \text{ ſin. } \varphi = \eta - y.$$

Wer-

Werden dieſe Gleichungen aufgelöſt, ſo findet ſich

$$MR = \frac{(\eta - y)\,\text{coſ.}\,\varphi - (\xi - x)\,\text{ſin.}\,\varphi}{\text{ſin.}\,(\omega - \varphi)}$$

$$NR = \frac{-(\eta - y)\,\text{coſ.}\,\omega + (\xi - x)\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,(\omega - \varphi)}$$

Da nun die Chorde

$$MN = \surd((\xi - x)^2 + (\eta - \eta)^2)$$

iſt, ſo laſſen ſich vermittelſt dieſer dreyen Formeln die drey Seiten MR, RN, NM des Triangels MRN und daher die durch Näherung geſuchte Länge des Bogens, welche

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3}$$

ſeyn wird, leicht finden.

§. 16.

Man kann auch, wenn man ſich der trigonometriſchen Tabellen bedienen will,

$$dy : dx = \text{tang.}\,\omega$$
$$d\eta : d\xi = \text{tang.}\,\varphi$$
$$(\eta - y) : (\xi - x) = \text{tang.}\,\psi$$

machen, und nachdem man auf dieſe Art die Winkel ω, φ, ψ, welche TMP, VNQ, NMH ſind, gefunden, und die Chorde

$$MN = \surd((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2)$$

berechnet iſt, ſo wird man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = \frac{\text{ſ}(\psi - \varphi) + \text{ſ}(\omega - \psi) + 2\,\text{ſ}(\omega - \varphi)}{3\,\text{ſ}(\omega - \varphi)} \cdot MN$$

für die durch Näherung geſuchte Länge des Bogens erhalten.

§. 17.

Dieſe Formel fleußt aus den erſten Sätzen der Trigonometrie, weil

$$\psi - \varphi = RNM$$
$$\omega - \psi = RMN$$
$$\omega - \varphi = MRV$$

und die Seiten RM, RN, MN in Verhältniß der Sinus dieſer Winkel ſind. Uebrigens läßt ſich dieſe Formel in ſofern noch zuſammenziehen, als

$$ſ(\psi - \varphi) + ſ(\omega - \psi) = 2ſ\frac{\omega - \varphi}{2} \cdot coſ.\frac{2\psi - \omega - \varphi}{2}$$

und

$$ſin.(\omega - \varphi) = 2ſ\frac{\omega - \varphi}{2} . coſ.\frac{\omega - \varphi}{2}$$

iſt. Denn werden dieſe Werthe ſubſtituirt, ſo erhält man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = coſ.\left(\frac{2\psi - \omega - \varphi}{2}\right) MN : 3 coſ.\frac{\omega - \varphi}{2} + \frac{2MN}{3}.$$

§. 18.

Um dieſes Verfahren durch ein leichtes Beyſpiel zu erläutern, ſo ſey AMN eine Parabel, und

$$2x = yy$$

demnach

$$2dx = 2ydy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} = tang.\, \omega$$

und

und daher auch

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\eta} = \text{tang.}\,\varphi.$$

Man ſetze z. E. P ſey der Brennpunct, folglich $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $\omega = 45$ Gr. und die Krümmung des Bogens NM werde von 5 Gr. angenommen, ſo iſt $\varphi = 45^\circ - 5^\circ = 40^\circ$. dennach $1 : \eta = $ tang. 40 Gr.

$$\eta = 1{,}1917536$$
$$\log.\eta = 0{,}0761865$$
$$2\log.\eta = 0{,}1523730$$
$$\log.2 = 0{,}3010300$$
$$\log.\xi = 0{,}8513430 - 1$$

$$\xi = 0{,}7101384 \qquad \eta = 1{,}1917536$$
$$x = 0{,}5000000 \qquad y = 1{,}0000000$$
$$\xi - x = 0{,}2101384 \qquad \eta - y = 0{,}1917536$$

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = 0{,}9125205 = \text{tang.}\,\psi$$
$$\psi = 42^\circ.22'.52''$$
$$\frac{\omega+\varphi}{2} = 42\,.\,30\,.\,0$$
$$\frac{\omega+\varphi}{2} - \psi = 0.\ 7.\ 8 \quad \log.\text{coſ.} = 0{,}9999991 - 1$$
$$\frac{\omega-\varphi}{2} = 2.30.\ 0 \quad \log.\text{coſ.} = 0{,}9995865 - 1$$
$$\text{diff.}\quad 0{,}0004126$$

Ferner $NM = 0{,}2844777$ $\log.MN = 0{,}4540483 - 1$

$$\log.(MR + RN) = 0{,}4544609 - 1$$

$$MR + RN = 0,2847481$$

$$\frac{1}{3}(MR + RN) = 0,0949160$$
$$\frac{2}{3}\ MN = 0,1896518$$
$$0,2845678$$

Und dieſes iſt demnach bis auf einen $\frac{1}{100000000}$ Theil des halben Parameters der Parabel die Länge des Bogens MN, welche zu ſuchen war.

§. 19.

Nimmt man aber den Bogen gröſſer an, z. E. von 15 Grad Krümmung, ſo, daß $\omega = 45°$, $\varphi = 30$ Grad ſey, ſo findet man

$$x = \frac{1}{2} \qquad \xi = \frac{3}{2}$$
$$y = 1 \qquad \eta = \sqrt{3}$$

demnach

$$\xi - x = 1$$
$$\eta - y = \sqrt{3} - 1 \quad \text{daher } NM = 1,2393137$$
$$\text{tang.}\,\psi = \sqrt{3} - 1 = 0,7320508$$
$$\psi = 36°.12'.22''$$
$$\frac{1}{2}(\omega - \varphi) = 37.30.0$$

$$\frac{1}{2}(\omega + \varphi) - \psi = 1.17.38 \quad \log.\cos. = 0,9998892 - 1$$
$$\frac{1}{2}(\omega - \varphi) = 7.30.0 \quad \log.\cos. = 0,9962686 - 1$$
$$\text{diff.} = 0,0036206$$
$$\log. NM = 0,0931812$$
$$\log.(RM + RN) = 0,0968018$$

$$RM + RN = 1,2496888$$

$$\frac{1}{3}(RM + RN) = 0,4165629$$
$$\frac{2}{3}\ MN = 0,8262091$$
$$1,2427720.$$

Die-

Dieſes wäre demnach die durch dieſe Näherung gefundene Länge des Bogens. Es iſt aber die wahre Länge

$= \underline{1,2427361}$

demnach der Unterſchied 0,0000359

welcher ſich kaum auf $\frac{1}{35000}$ Theil des Bogens beläuft.

§. 20.

Wenn man ſich ſtatt der Rechnung mit der Conſtruction begnügen will, ſo kann man mehrentheils noch gröſſere Bögen vornehmen, weil man bey den Conſtructionen ſelten ſo ſcharf verfährt, daß man auf 35000 nicht um 1 fehlen ſolte. Ueberdies wird die Arbeit kürzer, weil die Seiten der Triangel MRN ehender gemeſſen als berechnet ſind. Hingegen kann die Ziehung der Tangenten MR, RN, oder der Chorden MN Schwürigkeiten und Weitläuftigkeiten haben. Denn ungeachtet ſich dieſe Linien, jede für ſich betrachtet, leicht ziehen laſſen, ſo kömmt hier die Bedingung vor, daß, wenn die Tangenten gezogen ſind, die Chorden in die Berührungspuncte gezogen werden; oder hinwiederum, daß, wenn die Chorden gezogen ſind, die Tangenten an die Endpuncten der Chorden gezogen werden. Hiebey kömmt es auf beſondere Vortheile an, die man aus der Natur der vorhabenden krummen Linie vorerſt finden muß, ſo wie man dergleichen für die paraboliſchen, logarithmiſchen und andere Linien gefunden.

§. 21.

§. 21.

Es kommen aber beſonders in der angewandten Mathematik Fälle vor, wo die krumme Linie ſchlechthin durch Verſuche beſtimmt wird, und wo die Gleichung dazu noch nicht bekannt iſt. Und da iſt die Frage: wie, wenn man an ſolche Linien Tangenten gezogen, der Berührungspunct gefunden werden könne? Dieſe Frage läßt ſich für alle diejenigen Berührungspuncten, wo entweder die krumme Linie einen Diameter hat, oder wo wenigſtens der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes weder 0 noch ∞ iſt, folgendermaſſen auflöſen: Es
Fig. III. ſey AMB ein Stück einer krummen Linie, und an dieſelbe ſey die Tangente TM gezogen. Um den Berührungspunct M zu finden, ziehe man mit der Tangente parallele Chorden AB, ſo viel man will, und ſo nahe beyſammen, als man will. Jede Chorde theile man in zween gleiche Theile, und ſo wird ſich durch die Theilungspuncte C, eine Linie MC ziehen laſſen, welche in den Berührungspunct M trift. Dieſe Linie iſt gerade und ein Diameter, wenn AMN ein Kegelſchnitt iſt. In andern Fällen kann ſie ebenfals gerade ſeyn, wenn nemlich die krumme Linie einen oder mehrere Diameter hat, und einer derſelben in den Punct M trift. In allen übrigen Fällen iſt CM eine krumme Linie, und zwar iſt ihre Krümmung deſto geringer, je weniger ſich die Linie AMB von der Krümmung eines Kegelſchnittes entfernt. Da

nun

nun bey denen krummen Linien, wo dieſe Bedingung wegfallen kann, ſie nur bey einzelnen Puncten, wie z. E. bey den Wendungspuncten wegfällt, ſo kann dieſe Methode überhaupt betrachtet ſo gut als allgemein angeſehen werden. Daß aber der Gebrauch davon viel allgemeiner ſey läßt ſich leicht erachten. Man ſetze z. E. A B ſey eine Abſciſſenlinie, ſo habe die Ordinate in M ein Maximum. Die gröſte Ordinate findet ſich durch Ziehung der mit A B parallellen Tangente ohne Mühe. Will man aber die Ordinate ſelbſt ziehen, ſo muß vorerſt der Punct M geſunden werden. Und dazu dient die erſt angegebene Methode, immer vorausgeſetzt, daß die Gleichung, wodurch die Natur der Linie A M B ausgedruckt wird, nicht bekannt ſey.

§. 22.

Um nun zu ſehen, wiefern die bisher angeführten Betrachtungen ebenfalls zur Quadratur der krummen Linien dienen können, wenn dieſe vermittelſt der Vielecke durch Näherung geſucht wird, ſo werden wir zur 2ten Figur zurücke kehren, und da beut ſich die Anmerkung von ſelbſt an, daß wenn der Bogen A m M ein Stücke einer krummen Linie iſt, ſodann A T M ein Stück des um dieſelbe beſchriebenen Vieleckes ſey, ſo wie die Chorde A M eine Seite des in derſelben beſchriebenen Vieleckes iſt. Der Unterſchied des Flächenraumes ergiebt ſich theils aus dem Abſchnitte A M m, und um Fig. II.

ſo

ſo viel iſt die krumme Linie gröſſer als das zu der Seite A M gehörende Theil des in der krummen Linie beſchriebenen Vieleckes; theils aus dem Raume A m M T, um welchen die Linie kleiner iſt als der zu den Seiten A T M gehörende Theil des um die krumme Linie beſchriebenen Vieleckes.

§. 23.

Wir wollen damit anfangen, daß wir den Raum A m M P ſuchen, und hiezu werden wir die vorhin gebrauchte Benennung anwenden. (§. 6. ſeqq.) Es iſt demnach

$$AmMP = \int y\,dx = \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{4}bx^4 + \tfrac{1}{5}cx^5 + \tfrac{1}{6}dx^6 + \text{etc.}$$

Hingegen iſt der Raum des

$$\triangle AMP = \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^4 + \tfrac{1}{2}cx^5 + \tfrac{1}{2}dx^6 + \text{etc.}$$

Nimmt man demnach $\frac{2}{3}$ von dieſem Triangel, ſo iſt

$$\tfrac{2}{3}\triangle AMP = \tfrac{1}{3}xy = \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{3}bx^4 + \tfrac{1}{3}cx^5 + \tfrac{1}{3}dx^6 + \text{etc.}$$

Hievon der Raum A m M P abgezogen, bleibt

$$\tfrac{2}{3}\triangle AMP - AmMP = \tfrac{1}{12}bx^4 + \tfrac{2}{15}cx^5 + \tfrac{1}{6}dx^6 + \text{etc.}$$

Sofern man nun dieſen Unterſchied für nichts achten kann, läßt ſich der Raum A m M P als $\frac{2}{3}$ von dem Raum des Triangels A M P anſehen, und eben ſo wird der Raum A m M Q $= \frac{2}{3}$ APMQ ſeyn. Denn A M m A =

AMP

$AMP - AmMP = \frac{1}{3} AMP = \frac{1}{6} APMQ$, und folglich $AMmQ = (\frac{1}{6} + \frac{1}{2}) APMQ = \frac{2}{3} APMQ$.

§. 24.

Alles dieſes hat nach geometriſcher Schärfe ſtatt, wenn der Bogen A m M ein Stück einer Parabel iſt. Demnach kömmt es in jedem andern Fall der Wahrheit um deſto näher, je weniger die Krümmung des Bogens A m M von der Krümmung eines denſelben oſculirenden paraboliſchen Bogens abweicht.

§. 25.

Wir können aber ferners das Segment AMmA, mit dem Triangel AMT vergleichen, deſſen Inhalt $= \frac{1}{2}. AT. PM$ iſt. Werden demnach die Werthe

$$AT = \frac{1}{2}x + \frac{bxx}{4a} + cx^3 + \frac{3}{4}d.x^4 + \&c.$$
$$- \frac{3bb}{8aa} \ldots - \frac{5bc}{4aa} \ldots$$
$$+ \frac{9b^3}{8a^3} \ldots$$

$$PM = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

mit einander multiplicirt, ſo findet ſich die Hälfte des Productes $\triangle AMT =$

$$\frac{1}{4}ax^3 + \frac{3}{4}bx^4 + \frac{1}{2}cx^5 + \frac{5}{8}dx^6 + \&c.$$
$$- \frac{bb}{16a} \ldots - \frac{bc}{4a} \ldots$$
$$+ \frac{3b^3}{8a^2} \ldots$$

Hinge-

Hingegen iſt das Segment AmMA = △AMP − AmMP, folglich AmMA = $\frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{4}bx^4 + \frac{3}{10}cx^5 + \frac{1}{3}dx^6 +$ &c. Wird demnach wiederum $\frac{2}{3}$ von dem Triangel AMT genommen und das Segment AmMA davon abgezogen, ſo bleibt $\frac{2}{3}$ AMT − AmMA = $\frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{30}cx^5 + \frac{1}{12}dx^6 +$ ꝛc.

$$-\frac{bb}{24a}\ldots - \frac{bc}{6a}\ldots$$
$$+\frac{b^3}{4a^2}\ldots$$

Dieſer Unterſchied wird ebenfals = 0, ſo ofte AmM ein Stück einer Parabel iſt. Demnach iſt derſelbe in jedem andern Fall deſto unmerklicher, je weniger AmM von der Krümmung des oſculirenden paraboliſchen Bogens abweicht. Man kann daher, ſo oft die Krümmung des Bogens von wenigen Graden iſt, für das Segment AmMA, $\frac{2}{3}$ des △ AMT nehmen.

§. 26.

Will man aber das Segment AmMA mit beyden Triangeln AMT und AMP vergleichen, ſo darf man nur $\frac{1}{4}$ AMP + $\frac{1}{6}$ AMT zuſammen addiren, und das Segment wird nur um

$$+\frac{11}{120}cx^5 + \frac{5}{48}dx^6 + \text{\&c.}$$
$$+\frac{b}{24a}\ldots$$
$$-\frac{b^3}{16a^2}\ldots$$

gröſ-

gröſſer ſeyn. Da dieſer Unterſchied, welcher bey jedem paraboliſchen Bogen ebenfalls $= 0$ wird, ſich erſt bey der fünften Dignität der Abſciſſe x äuſſert, ſo ſieht man leicht, daß man auf dieſe Art der Wahrheit ſehr viel näher kömmt, und der Bogen bey gleichem Fehler merklich gröſſer ſeyn kann.

§. 27.

Es ſey z. E. A m M ein Circulbogen $= \omega$, deſſen Halbmeſſer $= 1$, ſo iſt $AP = \text{ſin.}\,\omega$, $Mp = 1 - \text{coſ.}\,\omega$, $AT = TM = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\omega$, demnach

$$\tfrac{1}{4}\triangle AMP = \tfrac{1}{8}(1 - \text{coſ.}\,\omega)\,\text{ſ}\omega = \tfrac{1}{8}\,\text{ſ}\omega - \tfrac{1}{16}\,\text{ſ}2\omega$$

$$\tfrac{1}{6}\triangle AMT = \tfrac{1}{12}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega\,(1 - \text{coſ.}\,\omega) = \tfrac{1}{6}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{12}\,\text{ſin.}\,\omega$$

und

$$\tfrac{1}{4}\triangle AMP + \tfrac{1}{6}\triangle AMT = \tfrac{1}{6}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{24}\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{16}\,\text{ſ}2\omega.$$

Dieſes giebt für einen Bogen von 20 Graden den Werth . . . 0,0034645.
Es iſt aber der wahre Inhalt des Segmentes . . . 0,0035228

diff. 0,0000583.

Der Unterſchied iſt $\frac{1}{60}$ Theil des Segmentes, oder $\frac{1}{35000}$ Theil des Quadrats des Halbmeſſers, oder der Einheit, welche bey dieſer Ausmeſſung zum Grunde liegt. Wäre der Bogen nur von 10 Gr. ſo würde man nach dieſer Formel 0,0004405 anſtatt 0,0004423 finden,

finden, und daher der Unterſchied nur 0,0000018 ſeyn.

§. 28.

Indeſſen, wenn es nur um das Segment AmMn zu thun iſt, ſo kann man es bey der erſten Methode (§. 23.) bewenden laſſen, wenn man nemlich die Chorde AM mit der Höhe nm multiplicirt und von dem Producte $\frac{2}{3}$ nimmt. Man ſetze z. E. wiederum AmM ſey ein Circulbogen von ω Graden, ſo iſt die Chorde $AM = 2 \sin. \frac{1}{2}\omega$, und die Sagitte $nm = 1 - \cos. \frac{1}{2}\omega$, daher

$$\tfrac{2}{3}. AM. nm = \tfrac{4}{3}(\sin. \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\sin. \omega)$$

dies giebt für den Bogen von 20 Graden 0,0035175 anſtatt des wahren Inhaltes 0,0035228, der Unterſchied iſt nun hier nur 0,0000053, bey 11 mal kleiner als vorhin, welches daher rührt, weil hier anſtatt des Segmentes AmMQ das Segment AmMnA quadrirt worden.

§. 29.

Fig. V. Es ſey, um nun zu allgemeinern Betrachtungen fortzuſchreiten, AμmM ein Stück einer beliebigen krummen Linie, AP eine Tangente, A deren Berührungspunct, AN, MP auf AP ſenkrecht, MN parallel, und man habe das Segment AMN zu quadriren. Um dieſes auch bey ſolchen krummen Linien, für welche man die Gleichung nicht weiß, und die folglich

folglich aus Verſuchen conſtruirt, oder auch von freyer Hand gezogen ſind, ſo genau man es gebraucht oder verlangt, oder auch ſo genau es die Gröſſe der Figur zuläßt, zu erhalten, kann man die Linie in m, μ in beliebige kleinere Theile theilen, und in dem man A μ, μ m, m M durch gerade Linie zuſammen zieht, das dadurch entſtehende Vieleck N A μ m M beſonders, und nach den erſt angegebenen Methoden die kleinen Segmente A μ, μ m, m M jedes beſonders quadriren, und die Summe wird dem Wahren deſto näher kommen, in je mehr Theile man den Bogen A M getheilt hat. Es iſt dabey eben nicht nothwendig, daß die Theile einander genau gleich ſeyn, jedoch iſt es gut, wenn ſie nicht gar zu ungleich ſind, weil die gröſſern Segmente nach den erſt angegebenen Methoden minder genau quadrirt werden als die kleinern.

§. 30.

Wir wollen aber das Willkührliche, welches bey dieſer Eintheilung bleibt, ſo einſchränken, daß wir die Aſciſſe A P in beliebiger Anzahl gleicher Theile theilen, und aus den Theilungspuncten, dergleichen π, p ſind, Ordinaten $\pi\mu$, p m aufrichten, und durch Ziehung der Parallelen $\mu\nu$, m n, die Rectangel A $\nu\mu\pi$, A n m p vollenden. Nun kann der Inhalt dieſer Rectangel, ſowohl durch Rechnung als durch Conſtruction, immer leicht gefunden werden. Die Frage iſt demnach, ob ſich aus

denſelben der Inhalt des Segmentes AMN, oder auch der Segmente Amn, A$\mu\nu$ eben ſo leicht, und um deſto genauer finden laſſe, in je mehr gleiche Theile AP getheilt worden? Und zwar, welches wohl zu merken, ohne daß man weiter nichts als den Inhalt der Rectangel Aμ, Am, AM &c. wiſſe.

§. 31.

Die Bedingung, die wir zur Aufloͤſung dieſer Frage, annehmen, iſt, daß die Abſciſſen auf der Tangente AP, und zwar von dem Beruͤhrungspunct A an gerechnet, genommen werden. Sodann, da wir die Anzahl der Theile willkuͤhrlich und daher unbeſtimmt laſſen, ſo werden wir Aπ den erſten, πp den zweyten, pP den dritten Theil nennen, und auf dieſe Art fortfahren, um ſodann die Wahl zu behalten, bey welchem wir ſtehen bleiben wollen.

§. 32.

Es ſey demnach

$A\pi = x$	$\pi\mu = y'$	$A\pi\mu\nu = R'$	$A\mu\nu = S'$
$Ap = 2x$	$pm = y''$	$Apmn = R''$	$Amn = S''$
$AP = 3x$	$PM = y'''$	$APMN = R'''$	$AMN = S'''$
&c.	&c.	&c.	&c.

Und die Verhaͤltniß zwiſchen x, y, werden wie vorhin (§. 8.) und aus eben den Gruͤnden, durch die Reihe

$$y' = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \text{\&c.}$$

ausgedruͤckt; ſo wird man

y''=

$$y'' = 4ax^2 + 8bx^3 + 16cx^4 + 32dx^5 + \text{rc.}$$
$$y''' = 9ax^2 + 27bx^3 + 81cx^4 + 243dx^5 + \text{rc.}$$
$$y^{IV} = 16ax^2 + 64bx^3 + 256cx^4 + 1024dx^5 + \text{rc.}$$
&c.
$$R' = ax^3 + bx^4 + cx^5 + dx^6 + \text{rc.}$$
$$R'' = 8ax^3 + 16bx^4 + 32cx^5 + 64dx^6 + \text{rc.}$$
$$R''' = 27ax^3 + 81bx^4 + 243cx^5 + 729dx^6 + \text{rc.}$$
$$R^{IV} = 64ax^3 + 256bx^4 + 1024cx^5 + 4096dx^6 + \text{rc.}$$
&c.

und
$$S' = \tfrac{2}{3}ax^3 + \tfrac{3}{4}bx^4 + \tfrac{4}{5}cx^5 + \tfrac{5}{6}dx^6 + \text{rc.}$$
$$S'' = \frac{2.8}{3}ax^3 + \frac{3.16}{4}bx^4 + \frac{4.32}{5}cx^5 + \frac{5.64}{6}dx^6 + \text{rc.}$$
$$S''' = \frac{2.27}{3}ax^3 + \frac{3.81}{4}bx^4 + \frac{4.243}{5}cx^5 + \frac{5.729}{6}dx^6 + \text{rc.}$$
$$S^{IV} = \frac{2.64}{3}ax^3 + \frac{3.256}{4}bx^4 + \frac{4.1024}{5}cx^5 + \frac{5.4096}{6}dx^6 + \text{rc.}$$
&c.

erhalten. Um nun hiebey die Brüche zu vermeiden, und nicht jedes Segment beſonders mit den Rectangeln zu vergleichen, werden wir überhaupt

$$S = \alpha ax^3 + \beta bx^4 + \gamma cx^5 + \delta dx^6 + \text{rc.}$$

ſetzen, weil die Werthe von α, β, γ, δ &c. nachgehends ohne Mühe für die Segmente S', S'', S''' rc. können geſetzt werden.

§. 33.

Da nun die Reihen, ſo wir für jede Rectangel und Segmente gefunden, nur in den Zahlen, womit ihre Glieder multiplicirt werden,

von einander verſchieden ſind, ſo läßt ſich für jedes Segment eine Reihe von Zahlen m, n, p, q, r &c. gedenken, ſo, daß

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + \text{ꝛc.}$$

werde. Da nun hiebey x nicht veränderlich ſeyn könnte, dafern dieſe Vergleichung nicht auch bey jedem Gliede ſtatt hätte, ſo erhalten wir dadurch

$$\alpha = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{ꝛc.}$$
$$\beta = m + 16n + 81p + 256q + 625r + \text{ꝛc.}$$
$$\gamma = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{ꝛc.}$$
$$\delta = m + 64n + 729p + 4096q + 15625r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon = m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + \text{ꝛc.}$$

§. 34.

Da dieſe Gleichungen in allwegen ins Unendliche fortgehen, ſo kömmt es nun darauf an, wie viele Glieder man beybehalten will, oder auch in wie viele Theile die Abſciſſe AP getheilt wird. So viele Glieder man beybehält, ſo viele Gleichungen werden auch beybehalten, um m, n, p &c. dadurch zu beſtimmen. Da aber alle Coefficienten geometriſche Progreſſionen ſind, ſo findet ſich in der Auflöſung etwas einförmiges, welches macht, daß die verſchiedenen Werthe, ſo m, n, p, q &c. erhalten, wenn man 1, 2, 3 ꝛc. von dieſen Buchſtaben beybehält, nach gewiſſen Geſetzen können aus einander hergeleitet werden. So z. E. um die verſchiedene Werthe des m zu finden, ſchaft man

man aus dieſen Gleichungen, der Ordnung nach, n, p, q &c. weg. Nun wird erſtlich n weggeſchaft, wenn jede Gleichung verdoppelt von der nächſtfolgenden abgezogen wird. Denn ſo bleibt

$$\begin{aligned} \beta - 2\alpha &= -m + 27p + 128q + 375r + \text{etc.} \\ \gamma - 2\beta &= -m + 81p + 512q + 1875r + \text{etc.} \\ \delta - 2\gamma &= -m + 243p + 2048q + 9375r + \text{etc.} \\ \varepsilon - 2\delta &= -m + 729p + 8192q + 46875r + \text{etc.} \end{aligned}$$
&c.

Hier ſind die Coefficienten ebenfalls geometriſche Progreſſionen. Daher wird p weggeſchaft, wenn jede Gleichung dreyfach genommen, von der nächſtfolgenden abgezogen wird; ſo bleibt

$$\begin{aligned} \gamma - 5\beta + 6\alpha &= 2m + 128q + 750r + \text{etc.} \\ \delta - 5\gamma + 6\beta &= 2m + 512q + 3750r + \text{etc.} \\ \varepsilon - 5\delta + 6\gamma &= 2m + 2048q + 18750r + \text{etc.} \end{aligned}$$
&c.

Um eben ſo q wegzuſchaffen, wird jede Gleichung vierfach genommen von der nächſtfolgenden abgezogen; demnach bleibt

$$\begin{aligned} \delta - 9\gamma + 26\beta - 24\alpha &= -6m + 750r + \text{etc.} \\ \varepsilon - 9\delta + 26\gamma - 24\beta &= -6m + 3750r + \text{etc.} \end{aligned}$$
&c.

Aus dieſen Gleichungen wird r weggeſchaft, wenn jede fünffach genommen von der nächſtfolgenden abgezogen wird. Und ſo bleibt

$$\varepsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\beta - 120\alpha = 24m + \text{etc.}$$

Auf dieſe Art erhält man, der Ordnung nach, die Werthe

$$m = \alpha$$
$$m = 2\alpha - \beta$$
$$2m = 6\alpha - 5\beta + \gamma$$
$$6m = 24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta$$
$$24m = 120\alpha - 154\beta + 71\gamma - 14\delta + \varepsilon$$
&c.

Und man ſieht aus der Art wie die Buchſtaben m, p, q, r &c. weggeſchaft worden, daß in dieſen Werthen von m die Coefficienten durch die Multiplication der Factoren

$$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1) \text{ ꝛc.}$$

erzeugt werden.

§. 35.

Aus denen in vorhergehenden §. gefundenen Ueberreſten, laſſen ſich nun ferner die Werthe von jedem der übrigen Buchſtaben finden. Denn man darf nur anſtatt denſelben wegzuſchaffen, m wegſchaffen. So z. E. wenn man die Werthe von q finden will, ſo zieht man die Gleichungen

$$\gamma - 5\beta + 6\alpha = 2m + 128q + 750r + \text{ꝛc.}$$
$$\delta - 5\gamma + 6\beta = 2m + 512q + 3750r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon - 5\gamma + 6\delta = 2m + 2048q + 18750r + \text{ꝛc.}$$
&c.

jede von der nächſtfolgenden ab, und ſo bleibt

$$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 384q + 3000r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon - 6\delta + 11\gamma - 6\beta = 1536q + 15000r + \text{ꝛc.}$$
&c.

Hier wird nun, um q beyzubehalten, r weggeſchaft, indem man jede Gleichung fünffach genom-

120 α —

60 α —

40 α —

30 α —

24 α —

6 + 71 γ —

1. 2. 3. 4

6 + 59 γ —

1. 1. 2. 3

+ 49 γ —

2. 1. 1. 2

+ 41 γ —

3. 2. 1. 1

+ 35 γ —

4. 3. 2. 1

genommen von der nåchſtfolgenden abzieht; und ſo bleibt

$$\varepsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\beta + 30\alpha = -384q + \text{ꝛc.}$$
&c.

Hier werden demnach, weil man, anſtatt wie vorhin (§. 34.) vierfach abzuziehen, um m wegzuſchaffen nur einfach abgezogen worden, die Coefficienten der Werthe von q nicht durch die Multiplication der Factoren

$$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1).\text{ꝛc.}$$

ſondern der Factoren

$$1.(2-1).(3-1).(1-1).(5-1)\ \text{ꝛc.}$$

erzeugt. Man kann zugleich aus dieſer Anmerkung abnehmen, wie die Factoren fůr n, p, r &c. ausſehen můſſen, da fůr jeden dieſer Buchſtaben ſtatt der 2, 3, 5 ꝛc. fachen, eine einfache Subtraction vorgenommen wird.

§. 36.

Wir wollen nun die Werthe von m, n, p, q &c. in nebenſtehender Tabelle vorſtellen.

§. 37.

Die Bildung dieſer Tabelle beruht fůrnehmlich auf der Beſtimmung der Coefficienten, ſo in den Zåhlern dieſer Brůche vorkommen. Und dabey liegen die unterſten Brůche oder Glieder jeder Columne zum Grunde. Dieſe entſtehen eben ſo wie die oberſten aus der Multiplication der Binomialfactoren

$$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1)\text{ꝛc.}$$

$$m = \alpha$$
$$m = 2\alpha - \beta$$
$$2m = 6\alpha - 5\beta + \gamma$$

wird nun, um q beyzubehalten, r weg-
aſt, indem man jede Gleichung fünffach
genom-

genommen von der nächſtfolgenden abzieht; und ſo bleibt

$\varepsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\beta + 30\alpha = -384q +$ ꝛc.

&c.

Hier werden demnach, weil man, anſtatt wie vorhin (§. 34.) vierfach abzuziehen, um m wegzuſchaffen nur einfach abgezogen worden, die Coefficienten der Werthe von q nicht durch die Multiplication der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1).$ ꝛc.

ſondern der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(1-1).(5-1)$ ꝛc.

erzeugt. Man kann zugleich aus dieſer Anmerkung abnehmen, wie die Factoren für n, p, r &c. ausſehen müſſen, da für jeden dieſer Buchſtaben ſtatt der 2, 3, 5 ꝛc. fachen, eine einfache Subtraction vorgenommen wird.

§. 36.

Wir wollen nun die Werthe von m, n, p, q &c. in nebenſtehender Tabelle vorſtellen.

§. 37.

Die Bildung dieſer Tabelle beruht fürnehmlich auf der Beſtimmung der Coefficienten, ſo in den Zählern dieſer Brüche vorkommen. Und dabey liegen die unterſten Brüche oder Glieder jeder Columne zum Grunde. Dieſe entſtehen eben ſo wie die oberſten aus der Multiplication der Binomialfactoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1)$ ꝛc.

die übrigen entſpringen aus dieſen durch ähnliche Factoren. So z. E. für q

$(6-11+6-1).(5-1)=30-61+41-11+1$

$(30-61+41-11+1).(6-1)=180-396+307-107+17-1$ ꝛc.

Die Nenner aber ſind Producte aus Cubiczahlen und den natürlichen Zahlen 1, 2, 4 ꝛc.

§. 38.

Fig. V. Um nun den Gebrauch dieſer Tabelle zu zeigen, ſo wollen wir z. E. ſetzen, die fürgegebene Abſciſſe A P werde in 3 gleiche Theile getheilt, und es ſolle das Segment A M N quadrirt werden. Hier haben wir demnach (§. 32.)

$$S=S'''=\frac{2.27}{3}ax^4+\frac{3.81}{4}bx^4+\frac{4.243}{5}cx^5$$

folglich

$$\alpha=\frac{2.27}{3}=18$$

$$\beta=\frac{3.81}{4}=\frac{243}{4}$$

$$\gamma=\frac{4.243}{5}=\frac{972}{5}$$

und in vorſtehender Tabelle die dritte Columne

$$+m=\frac{6\alpha-5\beta+\gamma}{2}$$

$$-n=\frac{3\alpha-4\beta+\gamma}{8}$$

$$+p=\frac{2\alpha-3\beta+\gamma}{54}$$

Wer-

Werden in dieſen Formeln die Werthe von α, β, γ geſetzt, ſo erhält man

$$m = -\frac{27}{40}$$
$$n = -\frac{27}{40}$$
$$p = +\frac{107}{120}$$

demnach

$$AMN = \frac{107}{120} APMN - \frac{27}{40} A pmn - \frac{27}{40} A\pi\mu\nu$$

woraus man ſieht, der wievielte Theil von den drey Rectangeln müſſe genommen werden, um den Inhalt des Segmentes durch dieſe Näherung zu erhalten. Man erhält denſelben vollkommen, wenn die Gleichung für die krumme Linie wirklich nicht mehr als die drey erſten Glieder

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4$$

hat, oder auch nur

$$y = ax^2 + bx^3$$

oder endlich auch nur

$$y = ax^2$$

iſt.

§. 39.

Um aber ein Beyſpiel zu geben, wo dieſes nicht vorkömmt, und wo man folglich in der That nur eine Näherung erhält, ſo wollen wir ſetzen AM ſey ein Circulbogen von 30 Gr. und deſſen Halbmeſſer = 1. Hier haben wir demnach

$AP = \sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$ $PM = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}1339746$
$Ap = \frac{2}{3} AP = \frac{1}{3}$ $pm = 1 - \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}0571910$
$A\pi = \frac{1}{3} AP = \frac{1}{6}$ $\pi\mu = 1 - \sqrt{\frac{35}{36}} = 0{,}0139868$

und

und hieraus

$$APMN = 0,0669873$$
$$Apmn = 0,0190637$$
$$A\pi\mu\nu = 0,0023311$$

demnach den Inhalt des Segmentes AMN

$= \frac{107}{120} APMN - \frac{27}{40}(Apmn + A\pi\mu\nu)$
$= 0,0452888$

Es iſt aber der wahre Inhalt $= 0,0452930$

demnach der Unterſchied nur $= 0,0000042$

Da ſich dieſer Unterſchied erſt bey der ſechſten Dignität der Abſciſſe x zu äuſſern anfängt, ſo wird derſelbe 64 mal geringer, wenn man den Bogen nur halb ſo groß annimmt.

§. 40.

Setzt man, die Abſciſſe AP ſolle in 4 gleiche Theile getheilt werden, und man wolle ebenfalls das ganze Segment AMN quadriren, ſo haben wir $S = S^{IV}$, demnach (§. 32.)

$$\alpha = \frac{2.64}{3} = \frac{128}{3}$$

$$\beta = \frac{3.256}{4} = 192$$

$$\gamma = \frac{4.1024}{5} = \frac{4096}{5}$$

$$\delta = \frac{5.4096}{6} = \frac{10240}{3}$$

und aus der Tabelle (§. 36.)

+ m

$$+m = \frac{24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta}{6}$$

$$-n = \frac{12\alpha - 19\beta + 8\gamma - \delta}{16}$$

$$+p = \frac{8\alpha - 14\beta + 7\gamma - \delta}{54}$$

$$-q = \frac{6\alpha - 11\beta + 6\gamma - \delta}{384}$$

Werden in dieſen Formeln die Werthe von α, β, γ, geſetzt, ſo findet man nach geſchehener Reduction

$$m = -\frac{64}{45}$$

$$n = -\frac{4}{15}$$

$$p = -\frac{63}{135}$$

$$q = +\frac{83}{90}$$

demnach erhält man

$$S = \frac{83}{90} R^{IV} - \frac{63}{135} R''' - \frac{4}{15} R'' - \frac{64}{45} R'$$

§. 41.

Dieſe Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0{,}0452925$$

welcher Werth von den wahren nur um 0, 0000005 verſchieden iſt.

§. 42.

Wollte man hingegen die Abſciſſe AP nur in zween Theile theilen, ſo würde man, ebenfals für das ganze Segment AMN (§. 32. 36.)

) α =

$$\alpha = \tfrac{16}{3}$$
$$\beta = 12$$
$$+m = 2\alpha - \beta$$
$$-n = \alpha - \beta$$

und hieraus

$$m = -\tfrac{4}{3}$$
$$n = +\tfrac{5}{6}$$

demnach

$$S = \tfrac{5}{6}R'' - \tfrac{4}{3}R'$$

finden. Dieſe Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0,0452481$$

welches um 0, 0000449 zu wenig iſt.

§. 43.

Würde man aber die Abſciſſe AP ganz behalten, ſo würde man (§. cit.)

$$\alpha = m = \tfrac{2}{3}$$

demnach

$$S = \tfrac{2}{3}R'$$

erhalten. Dieſes giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0,0446582$$

welches um 0,0006348 zu wenig iſt. Man ſieht demnach aus dieſen für einerley Segment gefundenen Unterſchieden

0,0006348
0,0000449
0,0000046
0,0000005

Um wie viel man dem Wahren näher kömmt, wenn

wenn man die Abſciſſe in mehrere Theile theilt. Ueberdies werden dieſe Unterſchiede, wenn der Bogen ſelbſt kleiner iſt, in ungleicher Verhältnis kleiner. Denn wenn man nur die Hälfte des Bogens nimmt, ſo wird der erſte Unterſchied 16, der andere 32, der dritte 64, der vierte 128 mal kleiner.

§. 44.

Was aber bey allem dieſem beſonders anzumerken iſt, beſteht darin, daß die Coefficienten der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wodurch die Natur der krummen Lienie AM überhaupt ausgedruckt wird, keinen Einfluß auf die Beſtimmung der Buchſtaben m, n, p, q, r &c. haben, ungeachtet ſie daraus hergeleitet ſind. In der That beſtimmt dieſe Gleichung oder Reihe in jedem fürgegebenen Fall nur die Grösſe der Rectangel R′, R″, R‴ &c. aus welchen ſodann S vermitelſt der Formel

$$S = mR' + nR'' + pR''' + \&c.$$

gefunden wird.

§. 45.

Sehen wir aber genauer nach, wie die Buchſtaben m, n, p &c. beſtimmt werden, ſo findet ſichs, daß wenn in der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wechſelsweiſe einige Glieder = o ſind, die Buchſtaben m, n, p &c. auf eine andere Art beſtimmt

werden

werden können. Wir wollen z. E. $b = d = f = \&c. = 0$ ſetzen, und ſo werden wir ſtatt den (§. 33.) angenommenen Gleichungen folgende

$$\alpha = m + 8n + 27p + 64q + \text{ꝛc.}$$
$$\gamma = m + 32n + 243p + 1024q + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon = m + 128n + 2187p + 16384q + \text{ꝛc.}$$
$$\eta = m + 512n + 19683p + 262144q + \text{ꝛc.}$$
&c.

haben, weil die für β, δ, ζ &c. daſelbſt angenommene Gleichungen hier wegbleiben können.

§. 46.

Die Auflöſung dieſer Gleichungen iſt nun der vorhergehenden ganz ähnlich. So wird um m zu finden, nach und nach n, p, q &c. weggeſchaft. Man zieht nemlich, um anfangs n wegzuſchaffen, jede Gleichung vierfach genommen, von der nächſtfolgenden ab, und ſo bleibt

$$\gamma - 4\alpha = -3m + 135p + 768q + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon - 4\gamma = -3m + 1215p + 12288q + \text{ꝛc.}$$
$$\eta - 4\varepsilon = -3m + 10935p + 196608q + \text{ꝛc.}$$
&c.

Um ferner p wegzuſchaffen, wird jede Gleichung 9 mal genommen, von der nächſtfolgenden abgezogen, und ſo bleibt

$$\varepsilon - 13\gamma + 36\alpha = 24m + 5376q + \text{ꝛc.}$$
$$\eta - 13\varepsilon + 36\gamma = 24m + 86016q + \text{ꝛc.}$$
&c.

Eben

Eben ſo wird q weggeſchaft, wenn jede Gleichung 16 mal genommen, von der nächſtfolgenden abgezogen wird, und ſo bleibt

$$\eta - 29\varepsilon + 244\gamma - 576\alpha = -360m + \text{ꝛc.}$$

Auf dieſe Art ſind nun der Ordnung nach die Werthe, ſo m erhält,

$$m = \alpha$$

$$m = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$

$$m = \frac{36\alpha - 13\gamma + \varepsilon}{3.8.}$$

$$m = \frac{576\alpha - 244\gamma + 29\varepsilon - \eta}{3.8.15.}$$

&c.

Die Coefficienten entſtehen nun hier aus der Multiplication der Factoren

$$1.(4-1).(9-1).(16-1).(25-1).\text{ꝛc.}$$

§. 47.

Die Werthe der übrigen Buchſtaben n, p, q &c. finden ſich auf eine ähnliche Art. So z. E. wird für p erſtlich

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \text{\&c.}$$

ferner

$$\varepsilon - 5\gamma + 4\alpha = 27.(9-1).(9-4)p +$$
$$64(16-1).(16-4)\,q + \&c.$$

ſodann

$$\eta - 21\varepsilon + 84\gamma - 64\alpha = 27.(9-1)$$
$$(9-4)(9-16)p + \&c.$$

&c.

Hingegen erhält man für n

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p +$$
$$64(16-1)q + \&c.$$

$$\varepsilon - 10\gamma + 9\alpha = 8.(4-1)(4-9)n +$$
$$64(16-1)(16-9)q + \&c.$$

$$\eta - 26\varepsilon + 169\gamma - 144\alpha = 8.(4-1)$$
$$(4-9)(4-16)n + \&c.$$

&c.

Und eben ſo für q

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p +$$
$$64(16-1)q + \&c.$$

$$\varepsilon - 5\gamma + 4\alpha = 27(9-1).(9-4)p +$$
$$64.(16-1).(16-4)q + \&c.$$

$$\eta - 14\varepsilon + 49\gamma - 36\alpha = 64.(16-1).$$
$$(16-4).(16-9).q + \&c.$$

&c.

§. 48.

Hieraus erwächſt ſodann folgende Tabelle

+m=

$+m=$	α	$\frac{4\alpha-\gamma}{4-1}$	$\frac{36\alpha-13\gamma+\varepsilon}{(4-1).(9-1)}$	$\frac{576\alpha-244\gamma+29\varepsilon-\eta}{(4-1).(9-1).(16-1)}$	ꝛc.
$-n=$	- - -	$\frac{\alpha-\gamma}{8.(4-1)}$	$\frac{9\alpha-10\gamma+\varepsilon}{8.(4-1).(9-4)}$	$\frac{144\alpha-169\gamma+26\varepsilon-\eta}{8.(4-1).(9-4).(16-4)}$	ꝛc.
$+p=$	- - -	- - -	$\frac{4\alpha-5\gamma+\varepsilon}{27.(9-1).(9-4)}$	$\frac{64\alpha-84\gamma+21\varepsilon-\eta}{27.(9-1).(9-4).(16-9)}$	ꝛc.
$-q=$	- - -	- - -	- - - - - -	$\frac{36\alpha-49\gamma+14\varepsilon-\eta}{64.(16-1).(16-4).(16-9)}$	ꝛc.

§. 49.

Der Gebrauch dieſer Tabelle iſt dem von der vorhergehenden ganz ähnlich, dagegen aber nicht ſo allgemein, weil er ſich nur auf die Fälle erſtreckt, wo

$$y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$$

iſt. Man ſetze z. E. die Abſciſſe werde nur in zween Theile getheilt, ſo haben wir $S = S''$, und daher (§. 32. 45.)

$$\alpha = \frac{2.8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\gamma = \frac{4.32}{5} = \frac{128}{5}$$

und aus der zweyten Columne der Tabelle (§. 48.)

$$+ m = \frac{4\alpha - \gamma}{4 - 1} = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$

$$- n = \frac{\alpha - \gamma}{8.(4-1)} = \frac{\alpha - \gamma}{24}$$

folglich

$$m = -\tfrac{64}{45}$$
$$n = +\tfrac{38}{45}$$

und daher

$$S = \tfrac{38}{45} R'' - \tfrac{64}{45} R'$$

§. 50.

Da bey dem Circul die Bedingung

$$y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$$

vorkömmt, ſo wollen wir wiederum einen Circulbogen

culbogen von 30 Gr. für AM ſetzen, und da giebt die erſt gefundene Formel

$$S = 0,0452767$$

welches nur um 0,0000163 von dem Wahren abweicht. Ein Unterſchied, der beynahe drey mal geringer iſt, als derjenige, den wir für eben dieſen Fall (§. 42.) aus den erſten Formeln gefunden haben.

§. 51.

Wir können nun ferners eben dieſe Methode auch auf diejenigen Fälle ausdehnen, wo die bisher vorausgeſetzte Bedingung (§. 31.) wegfällt, und daher die Lage der Abſciſſenlinie ganz willkührlich gelaſſen wird. Es ſey demnach BM ein Stück einer krummen Linie. Auf Fig. VI. AP werden die Abſciſſen von A an gerechnet, und die Ordinaten ſeyn auf dieſer Linie ſenkrecht. Solte nun das Stück ABMP quadrirt werden, ſo kann man wiederum, wie vorhin, die Abſciſſe AP in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen; und da iſt die Frage, wie der geſuchte Inhalt von ABMP durch die vermittelſt ſolcher Theilung entſtehende Rectangel APMN, Apmn, $A\pi\mu\nu$ &c. beſtimmt werden könne, und wie durch eben dieſelbe der Inhalt der einzeln Theile $AB\mu\pi$, ABmp ꝛc. beſtimmt werde?

§. 52.

Es ſey

$$A\pi = x \quad Ap = 2x \quad AP = 3x \;\&c.$$
$$\pi\mu = y' \quad pm = y'' \quad PM = y''' \;\&c.$$

und die Verhältniß zwiſchen x, y werden durch die Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

ausgedrückt. Man nenne ferner die Segmente S′, S″, S‴ &c. und die Rectangel R′, R″, R‴ &c. ſo haben wir

$$R' = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$R'' = 2ax + 4bx^2 + 8cx^3 + 16dx^4 + 32ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$R''' = 3ax + 9bx^2 + 27cx^3 + 81dx^4 + 243ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$R^{IV} = 4ax + 16bx^2 + 64cx^3 + 256dx^4 + 1024ex^5 + \text{ꝛc.}$$

&c.

Ferner

$$S' = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$S'' = 2ax + \tfrac{4}{2}bx^2 + \tfrac{8}{3}cx^3 + \tfrac{16}{4}dx^4 + \tfrac{32}{5}ex^5 \text{ -- }$$
$$S''' = 3ax + \tfrac{9}{2}bx^2 + \tfrac{27}{3}cx^3 + \tfrac{81}{4}dx^4 + \tfrac{243}{5}ex^5 \text{ -- }$$
$$S^{IV} = 4ax + \tfrac{16}{2}bx^2 + \tfrac{64}{3}cx^3 + \tfrac{256}{4}dx^4 + \tfrac{1024}{5}ex^5 \text{ -- }$$

wofür wir überhaupt

$$S = \alpha ax + \beta bx^2 + \gamma cx^3 + \delta dx^4 + \varepsilon ex^5 + \text{ꝛc.}$$

ſetzen, welche Reihe ſich auch auf die zwiſchen die Theilungspuncte fallende Abſciſſen x ausdehnet, weil auch dieſe Räume $\int y\,dx$ durch die Rectangel R′, R″, R‴ &c. beſtimmen laſſen.

§. 53.

§. 53.

Man ſetze nun wiederum

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + \&c.$$

ſo erhält man aus gleichem Grunde, wie §. 33. die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha &= m + 2n + 3p + 4q + 5r + \text{etc.}\\
\beta &= m + 4n + 9p + 16q + 25r + \text{etc.}\\
\gamma &= m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{etc.}\\
\delta &= m + 16n + 81p + 256q + 625r + \text{etc.}\\
\varepsilon &= m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{etc.}
\end{aligned}$$

&c.

Demnach ſind die Gleichungen wodurch m beſtimmt wird

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \&c.$$

$$\beta - 2\alpha = (1-2)m + 3(3-2)p + 4(4-2)q + 5(5-2)r + \&c.$$

$$\gamma - 5\beta + 6\alpha = (1-2).(1-3)m + 4(4-2).(4-3)q + 5(5-2)(5-3)r + \&c.$$

$$\delta - 9\gamma + 26\beta - 24\alpha = (1-2).(1-3).(1-4)m + 5.(5-2).(5-3).(5-4)r + \&c.$$

$$\varepsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\beta + 120\alpha = (1-2).(1-3).(1-4).(1-5)m + \&c.$$

&c.

Ferner die Gleichung wodurch n beſtimmt wird

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$

$$\gamma - 4\beta + 3\alpha = 2(2-1)(2-3)n + 4.(4-1)(4-3)q + 5(5-1)(5-3)r + \&c.$$

$\delta - 8\gamma + 19\beta - 12\alpha = 2(2-1).2-3).$
$(2-4)n + 5.(5-1).(5-3).(5-4).r + \&c.$
$\varepsilon - 13\delta + 59\gamma - 107\beta + 60\alpha = 2.(2-1).$
$(2-3).(2-4).(2-5)n + \&c.$
&c.

Eben ſo die Gleichungen, wodurch die Werthe von p beſtimmt werden

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$
$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1).$
$(4-2)q + 5.(5-1).(5-2)r + \&c.$
$\delta - 7\gamma + 14\beta - 8\alpha = 3(3-1)(3-2)$
$(3-4)p + 5.(5-1).(5-2).(5-4)r + \&c.$
$\varepsilon - 12\delta + 49\gamma - 78\beta + 40\alpha = 3(3-1).$
$(3-2).(3-4).(3-5)p + \&c.$
&c.

Wiederum die Gleichungen, wodurch q beſtimmt wird

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5.(5-1)r + \&c.$
$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p +$
$4(4-1)(4-2)q + 5(5-1).(5-2)r + \&c.$
$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 4(4-1)(4-2)$
$(4-3)q + 5.(5-1).(5-2).(5-3)r + \&c.$
$\varepsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\beta + 30\alpha = 4(4-1)$
$(4-2)(4-3)(4-5)q + \&c.$
&c.

Sodann die Gleichungen, wodurch r beſtimmt wird

$\beta -$

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$

$$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1)(4-2)q + 5(5-1)(5-2)r + \&c.$$

$$\alpha = 3$$

$$\beta = \tfrac{9}{2}$$

$$\gamma = \tfrac{27}{3} = 9$$

$\delta - 8\gamma + 19\beta - 12\alpha = 2(2-1).2-3).$
$(2-4)n + 5.(5-1).(5-3).(5-4).r + \&c.$

$\varepsilon - 13\delta + 59\gamma - 107\beta + 60\alpha = 2.(2-1).$
$(2-3).(2-4).(2-5)n + \&c.$

&c.

Eben ſo die Gleichungen, wodurch die Werthe von p beſtimmt werden

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$

$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1).$
$(4-2)q + 5.(5-1).(5-2)r + \&c.$

$\delta - 7\gamma + 14\beta - 8\alpha = 3(3-1)(3-2)$
$(3-4)p + 5.(5-1).(5-2).(5-4)r + \&c.$

$\varepsilon - 12\delta + 49\gamma - 78\beta + 40\alpha = 3(3-1).$
$(3-2).(3-4).(3-5)p + \&c.$

&c.

Wiederum die Gleichungen, wodurch q beſtimmt wird

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5.(5-1)r + \&c.$

$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p +$
$4(4-1)(4-2)q + 5(5-1).(5-2)r + \&c.$

$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 4(4-1)(4-2)$
$(4-3)q + 5.(5-1).(5-2).(5-3)r + \&c.$

$\varepsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\beta + 30\alpha = 4(4-1)$
$(4-2)(4-3)(4-5)q + \&c.$

&c.

Sodann die Gleichungen, wodurch r beſtimmt wird

— δ	120 α — 1
— δ	60 α — 1
— δ	40 α —
— δ	30 α —
.	24 α —
.	- -

-β + 71 γ — 14

1. 2. 3. 4

-β + 59 γ — 13

1. 1. 2. 3

-β + 49 γ — 12

2. 1. 1. 2

-β + 41 γ — 11

3. 2. 1. 1

-β + 35 γ — 10

4. 3. 2. 1

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$

$$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1)(4-2)q + 5(5-1)(5-2)r + \&c.$$

$$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 4(4-1)(4-2)(4-3)q + 5(5-1)(5-2)(5-3)r + \&c.$$

$$\varepsilon - 10\delta + 35\gamma - 50\beta + 24\alpha = 5.(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)r + \&c.$$

&c.

§. 54.

Aus dieſen Gleichungen entſtehet ſodann beygefügte Tabelle.

§. 55.

Vergleicht man dieſe Tabelle mit der erſtern (§. 36.) ſo iſt ſie davon nur in den Cubiczahlen verſchieden, welche hier in den Nennern nicht vorkommen, und an deren Statt nur die ledigen Zahlen, oder die Cubicwurzeln, hier als Theiler erſcheinen.

§. 56.

Der Gebrauch dieſer Tabelle iſt dem von beyden vorhergehenden ganz ähnlich. Es ſey z. E. ABMP zu quadriren, und die Abſciſſe AP in drey gleiche Theile getheilt; ſo haben wir $S = S'''$, demnach (§. 52.)

$$\alpha = 3$$
$$\beta = \tfrac{9}{2}$$
$$\gamma = \tfrac{27}{3} = 9$$

T 5 und

und aus der dritten Columne dieſer Tabelle

$$+m = \frac{6\alpha - 5\beta + \gamma}{2}$$

$$-n = \frac{3\alpha - 4\beta + \gamma}{2}$$

$$+p = \frac{2\alpha - 3\beta + \gamma}{6}$$

Setzt man in dieſen Formeln die Werthe von α, β, γ, ſo erhält man

$$m = \tfrac{9}{4}$$
$$n = 0$$
$$p = \tfrac{1}{4}$$

demnach, weil $n = 0$ wird,

$$S''' = \tfrac{1}{4}R''' + \tfrac{9}{4}R'$$

Man kann daher, ſo oft man ſich mit einer Triſection der Abſciſſe begnügen will, das mittlere Rectangel weglaſſen, und ſchlechthin

$$ABMP = \tfrac{1}{4}ANMP + \tfrac{9}{4}A\nu\mu\pi$$

ſetzen.

§. 57.

Dieſes Phänomenon, daß man nemlich eines von den Rectangeln gar nicht gebraucht, kömmt auch in andern Fällen vor. So z. E. wenn man ſich mit der Biſection der Abſciſſe begnügt, hat man (§. 52. 54.) $S = S''$

$$\alpha = 2$$
$$\beta = \tfrac{4}{2} = 2$$
$$m = 2\alpha - \beta = 2$$
$$n = \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

folg-

folglich ſchlechthin

$$S'' = 2 R'.$$

§. 58.

Eben ſo wenn man die Abſciſſe in 4 Theile theilt, $S = S^{IV}$, und (§. cit.)

$$\alpha = 4$$
$$\beta = \frac{16}{2} = 8$$
$$\gamma = \frac{64}{3}$$
$$\delta = \frac{256}{4} = 64$$

$$+m = \frac{24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta}{6} = \frac{8}{3}$$

$$-n = \frac{12\alpha - 19\beta + 8\gamma - \delta}{4} = \frac{1}{3}$$

$$+p = \frac{8\alpha - 14\beta + 7\gamma - \delta}{6} = \frac{8}{9}$$

$$-q = \frac{6\alpha - 11\beta + 6\gamma - \delta}{24} = 0$$

demnach

$$S^{IV} = * \frac{8}{9} R''' - \frac{2}{3} R'' + \frac{8}{3} R'$$

§. 59.

Hingegen erhält man, wenn die Abſciſſe in fünf gleiche Theile getheilt wird

$$S^{V} = \frac{19}{144} R^{V} - \frac{25}{288} R^{IV} + \frac{25}{18} R''' - \frac{175}{144} R'' + \frac{425}{144} R'$$

wobey alle fünf Rectangel müſſen berechnet werden.

§. 60.

Ueberhaupt betrachtet, ſind dieſe Formeln weniger convergirend als diejenigen, ſo wir oben für den Fall der fünften Figur gefunden haben. Man hat den Grund davon darin zu ſuchen, daß hier in der Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

die erſten zwey Glieder beybehalten werden. Da nun z. E. wenn man die Abſciſſe AP in drey Theile theilt, und dadurch

$$ABMP = \tfrac{1}{4} ANMP + \tfrac{9}{4} A\nu\mu\pi$$

erhält, (§. 56.) dieſe Formel eigentlich nur da nach aller Schärfe ſtatt hat, wo

$$y = a + bx + cx^2$$

iſt, ſo ſieht man leicht, daß in jeden andern Fällen der Fehler, den man dadurch zuläßt, von den übrigen Gliedern

$$dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

herrührt, und in Abſicht auf den Raum ABMP,

$$= \tfrac{1}{4} dx^4 + \tfrac{1}{5} ex^5 + \tfrac{1}{6} fx^6 + \&c.$$

iſt. Daher muß auch die Abſciſſe $A\pi = x$ klein genug ſeyn, wenn man dieſen Unterſchied ſolle weglaſſen können. Da dieſer Unterſchied ſich hier bey der vierten Dignität von x anfängt, ſo kömmt man den Wahren 16 mal näher, wenn x um die Hälfte kleiner angenommen wird.

§. 61.

Dieſe Formeln haben übrigens die Bequemlichkeit, daß man dadurch krumme Linien, ſo genau man will, quadriren kann, ſo bald ſie conſtruirt ſind; und in ſoferne haben ſie ſelbſt auch in der practiſchen Geometrie ihren Nutzen, wo nicht ſelten Felder auszumeſſen vorkommen, deren Grenzlinien ſich in die Krümme ziehen. Solche kann man nun in Segmente, dergleichen ABMP iſt, eintheilen, und ihren Inhalt, vermittelſt der Rectangel $A\mu$, Am, AM, beſtimmen.

§. 62.

Man nimmt zu dieſem Ende, wenn z. E. aq eine ſolche Linie iſt, auf AQ, ſo viele gleiche Theile AB, BC, CD &c. man will, und richtet aus denſelben Perpendiculairen Aa, Bb auf. Auf dieſe Art wird man, wenn man dieſe Theile zu 3 und 3 nimmt nach der Formel des §. 56. Fig. VII.

$$AadD = \tfrac{9}{4} AB.Bb + \tfrac{1}{4} AD.Dd = \tfrac{3}{4} AB(Dd + 3Bb)$$
$$DdgG = \tfrac{3}{4} AB(Gg + 3Ee)$$
$$GgkK = \tfrac{3}{4} AB(Kk + 3Hh)$$
$$KknN = \tfrac{3}{4} AB(Nn + 3Ll)$$
$$NnqQ = \tfrac{3}{4} AB(Qg + 3Oo)$$

daher den ganzen Inhalt

$$AaqQ = \tfrac{3}{4} AB(Dd + Gg + Kk + Nn + Qq)$$
$$+ \tfrac{9}{4} AB(Bb + Ee + Hh + Ll + Oo)$$

erhalten, welcher deſto genauer ſeyn wird, von jewe-

jeweniger Graden die Krümmung der Bögen ab, bc, cd &c. iſt.

§. 63.

Man erhält aber den Inhalt genauer, wenn man die Theile auf AQ zu 4 und 4 nimmt. Alsdann dient die Formel des 58 §. und es iſt

$$AaeE = \tfrac{8}{3} AB.Bb - \tfrac{2}{3} AC.Cc + \tfrac{8}{9} AD.Dd$$
$$= \tfrac{4}{3} AB(2Bb - Cc + 2Dd)$$
$$Eeil = \tfrac{4}{3} AB(2Ff - Gg + 2Hh)$$
$$IiNn = \tfrac{4}{3} AB(2Kk - Ll + 2Mn)$$

&c.

daher der Inhalt

$$AanN = \tfrac{8}{3} AB(Bb + Dd + Ff + Hh + Kk + Mm) - \tfrac{4}{3} AB(Cc + Gg + Ll).$$

§. 64.

Will man den Inhalt noch genauer haben, ſo nimmt man die Theile auf AQ zu 5 und 5, und gebraucht die Formel des §. 59. Denn ſo wird

$$AafF = \tfrac{425}{144} AB.Bb - \tfrac{175}{144}. AC.Cc + \tfrac{25}{18}.AD.Dd - \tfrac{25}{288} AE.Ee + \tfrac{19}{144}. AF.Ff$$

oder

$$AafF = \tfrac{10}{288} AB(85.Bb - 70.Cc + 120.Dd - 10.Ee + 19.Ff)$$
$$FflL = \tfrac{10}{288} AB(85.Gg - 70.Hh + 120.Ii - 10.Kk + 19.Ll)$$
$$LlqQ = \tfrac{10}{288} AB(85.Mm - 70.Nn + 120.Oo - 10.Pp + 19.Qq)$$

ſeyn.

§. 65.

Man kann aber auch ſchlechthin nur die Puncte a, d, g, k, n, q durch gerade Linien zuſammenhängen, welche ſodann ein geradlinichtes Vieleck ausmachen, welches ſich leicht berechnen läßt. Und ſo bleiben nur noch die Segmente zu berechnen, welche auf dieſen Chorden ſtehen, und theils zu dem Vielecke addirt, theils ſubtrahirt werden müſſen, je nachdem ſie auſſer- oder innerhalb demſelben liegen. Es ſey AmMnA ein ſolches Segment, ſo wird die Chorde AM mit der Höhe mn multiplicirt, und von dem Producte $\frac{2}{3}$ genommen, weil, wie wir oben (§. 23. 28.) geſehen haben, der Inhalt deſto genauer $= \frac{2}{3} . AM . mn$ iſt, je weniger der Bogen AmM von der Krümmung der denſelben oſculirenden Parabel abweicht. Fig. II.

§. 66.

Bey den bisher (§. 52 ſeqq.) betrachteten Formeln, haben wir noch immer geſetzt, daß die Abſciſſen von A gegen P gerechnet, und daher ſämtlich poſitiv genommen werden. Nimmt man aber eben ſo viele negative Abſciſſen mit in die Rechnung, ſo wird dieſe ganz geändert, und man reicht damit doppelt weiter, weil man die gleichnahmigten Rectangel auf beyden Seiten in eines zuſammen nehmen kann. Es ſey z. E. das Segment P′M′MP zu quadriren, ſo wird die Abſciſſe P′P in 2, 4, 6, 8 ꝛc. gleiche Fig. VI. Fig. VIII.

Theile

Theile getheilt, und aus den Theilungspuncten perpendiculaire Ordinaten aufgerichtet. Die mittlere dieſer Ordinaten ſey AB. Und die Abſciſſen werden von dem Punct A an gegen P und P′ vor- und rückwerts gerechnet. Zieht man die Puncte M′M, m′m, μ′μ durch gerade Linien zuſammen, ſo ergeben ſich die Trapeze P′M′MP, p′m′mp, π′μ′μπ, deren Inhalt der Summe zweyer gleichnahmigten Rectangel $AP'.P'M' + AP.PM$ &c. gleich iſt.

§. 67.

Man ſetze nun wiederum $A\pi = x$, $\pi\mu = y$, und

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

und nenne die Trapeze T′, T″, T‴ &c. die denſelben entſprechende Segmente S′, S″, S‴ ꝛc. ſo findet man

$$T' = 2ax + 2cx^3 + 2ex^5 + 2gx^7 + ꝛc.$$
$$T'' = 4ax + 16cx^3 + 64ex^5 + 256gx^7 + ꝛc.$$
$$T''' = 6ax + 54cx^3 + 486ex^5 + 4374gx^7 + ꝛc.$$
&c.
$$S' = 2ax + \tfrac{2}{3}cx^3 + \tfrac{2}{5}ex^5 + \tfrac{2}{7}gx^7 + ꝛc.$$
$$S'' = 4ax + \tfrac{16}{3}cx^3 + \tfrac{64}{5}ex^5 + \tfrac{256}{7}gx^7 + ꝛc.$$
&c.

wofür wir überhaupt

$$S = 2\alpha ax + 2\gamma cx^3 + 2\varepsilon ex^5 + 2\eta gx^7 + ꝛc.$$

ſetzen,

ſetzen, um auf eine allgemeine Art die Trapeze T', T'', T''' &c. mit jeden Segmenten vergleichen zu können.

§. 68.

Zu dieſem Ende ſetzen wir wiederum

$$S = mT' + nT'' + pT''' + \&c.$$

und erhalten dadurch die Gleichungen.

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \text{ꝛc.}$$
$$\gamma = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{ꝛc.}$$
$$\eta = m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + \text{ꝛc.}$$

&c.

§. 69.

Hieraus erhält man folgende Tabelle, welche von derjenigen, ſo wir oben (§. 48.) aus ganz ähnlichen Gleichungen gefunden, nur darinn verſchieden iſt, daß in den Nennern ſtatt der Cubiczahlen 1, 8, 27, 64 ꝛc. ihre Wurzeln 1, 2, 3, 4 ꝛc. vorkommen.

$+m=$	α	$\frac{4\alpha-\gamma}{4-1}$	$\frac{36\alpha-13\gamma+\varepsilon}{(4-1).(9-1)}$	$\frac{576\alpha-244\gamma+29\varepsilon-\eta}{(4-1).(9-1).(16-1)}$	ꝛc.
$-n=$	- - -	$\frac{\alpha-\gamma}{2(4-1)}$	$\frac{9\alpha-10\gamma+\varepsilon}{2(4-1)(9-4)}$	$\frac{144\alpha-169\gamma+26\varepsilon-\eta}{2.(4-1)(9-4)(16-4)}$	ꝛc.
$+p=$	- - -	- - -	$\frac{4\alpha-5\gamma+\varepsilon}{3(9-1)(9-4)}$	$\frac{64\alpha-84\gamma+21\varepsilon-\eta}{3.(9-1).(9-4).(16-9)}$	ꝛc.
$-q=$	- - -	- - -	- - - - - -	$\frac{36\alpha-49\gamma+14\varepsilon-\eta}{4(16-1).(16-4).(16-9)}$	ꝛc.

§. 70.

§. 70.

Setzt man nun z. E. die Abſciſſe P′P werde in 6 gleiche Theile getheilt, ſo haben wir S = S‴, und daher (§. 67.)

$$\alpha = 3$$
$$\gamma = \frac{27}{3} = 9$$
$$\varepsilon = \frac{243}{5}$$

und aus der dritten Columne dieſer Tabelle

$$+m = \frac{36\alpha - 13\gamma + \varepsilon}{24}$$

$$-n = \frac{9\alpha - 10\gamma + \varepsilon}{30}$$

$$+p = \frac{4\alpha - 5\gamma + \varepsilon}{120}$$

demnach

$$m = \frac{33}{20}$$
$$n = \frac{12}{25}$$
$$p = \frac{13}{100}$$

und

$$S''' = \frac{33}{20}T' + \frac{12}{25}T'' + \frac{13}{100}T'''$$

§. 71.

Da nun

$$T' = A\pi(\pi\mu + \pi'\mu')$$
$$T'' = 2A\pi(pm + p'm')$$
$$T''' = 3A\pi(PM + P'M')$$

iſt, ſo iſt der ganze Raum

$$P'M'MP = \frac{33}{20}A\pi(\pi\mu + \pi'\mu') + \frac{24}{25}A\pi(pm + p'm') + \frac{39}{100}A\pi(PM + P'M').$$

Dieſe Formel fängt nun erſt bey der ſiebenten Dignität des x an von dem wahren Inhalt des Segments P′M′MP abzuweichen.

§. 72.

Man kan aber das Convergiren dieſer Formeln noch weiter treiben, weil ſich der hier betrachtete Fall (§. 66. ſeq.) auf denjenigen reduciren läßt, den wir oben (§. 45. ſeq.) betrachtet haben. Es ſey HKO eine jede krumme Linie, die Abſciſſen werden auf VR von A an vor- und rückwärts genommen, und die Ordinaten ſeyn auf denſelben ſenkrecht. Man mache nun AR = AV, und indem man die Ordinaten VH, RO aufrichtet, und die Chorde HCO zieht, ſo ziehe man ſodann hCo durch C mit VR parallel, ſo wird man auf dieſe Art die krumme Linie hBo conſtruiren können, die ihren Scheitelpunct in B hat, deren Axe AB iſt, und deren Theile auf beyden Seiten dieſer Axe einander ähnlich ſind, und ſo wird auch jeder Raum

Fig. IX.

$$VhBoR = VHBOR$$

ſeyn. Denn man ſetze jede Abſciſſe

$$AQ = x \qquad QN = y$$
$$AT = -x \qquad TL = \eta$$
$$Qn = Tl = z.$$

und $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$

ſo iſt

$$\eta = a - bx + cx^2 - dx^3 + \&c.$$

Dem-

demnach

$$\frac{y+\eta}{2}=a+cx^2+ex^4+gx^6+\&c.$$

Nun aber iſt

$$\frac{y+\eta}{2}=\frac{QN+TL}{2}=Ac=Qn=Tl=z$$

demnach

$$z=a+cx^2+ex^4+gx^6+\&c.$$

Da nun hier lauter gerade Dimenſionen ſind, ſo iſt die Linie hBo auf beyden Seiten der Linie AB ſich ſelbſt ähnlich, — B ihr Scheitelpunct und BC ihre Axe. Ferner iſt der Raum

$$ABNQ=\int y\,dx=ax+\tfrac{1}{2}bx^2+\tfrac{1}{3}cx^3+\tfrac{1}{4}dx^4+\tfrac{1}{5}ex^5+\&c.$$

$$ABLT=\int \eta\,dx=ax-\tfrac{1}{2}bx^2+\tfrac{1}{3}cx^3-\tfrac{1}{4}dx^4+\tfrac{1}{5}ex^5+\&c.$$

folglich der ganze Raum

$$QNBLT=2ax+\tfrac{2}{3}cx^3+\tfrac{2}{5}ex^5+\tfrac{2}{7}gx^7+\&c.$$

Eben dieſe Reihe findet ſich aber auch für den Raum QnBlT, demnach ſind dieſe beyden Räume einander gleich. Es iſt daher gleichviel, ob man VHBOR oder VhBoR quadrirt. Nun läßt ſich das Rectangel VhoR für ſich berechnen, demnach hat man nur noch das Segment hCoBh zu quadriren, und für dieſes hat man die Gleichung

$$z-a=cx^2+ex^4+gx^6+\&c.$$

welche eben die iſt, die wir bey dem oben (§. 45. ſeqq.) betrachteten Fall zum Grunde leg-

legten. Es wird demnach hiedurch ihr Gebrauch vollends allgemein gemacht.

§. 73.

Wenn es hiebey nur darum zu thun iſt, das Segment HBOCH zu quadriren, ſo wird die Lage der Abſciſſenlinie gleichgültig, und man thut dabey am beſten, wenn man ſie mit der Chorde HO parallel zieht, oder die Abſciſſen ſelbſt auf dieſer Chorde von dem Mittel C gegen O und H gerechnet nimmt, und die Ordinaten ſenkrecht aufrichtet. Dadurch erhält man den Vortheil, daß das Segment hBoCh ſowohl länger als ſchmähler, und daher aus beyden Gründen die Krümmung des Bogens hBo vermindert wird. Ich werde mich aber nicht länger hiebey aufhalten, ſondern dieſen Betrachtungen noch einige andere beyfügen, welche die durch Näherung zu beſtimmende Rectification und Quadratur des Circuls beſonders betreffen.

§. 74.

Fig. XI. Es ſey AMNB ein halber Circul, und man habe die Länge des Bogens AM zu beſtimmen. Zu dieſem Ende richte man auf AB die Tangente AQ ſenkrecht auf, und trage den dritten Theil des Bogens AM aus B in N. Man ziehe ſodann durch NM eine gerade Linie bis in Q, ſo wird AQ der Länge des Bogens AM deſto näher kommen, von jeweniger Graden derſelbe iſt.

§. 75.

Um dieſes zu beweiſen, ſetze man den Halbmeſſer $AC = 1$, den Winkel $NCB = \omega$,

ſo iſt $MCA = 3\omega$

$CMN = CNM = 2\omega$

$CFN = \omega$,

demnach $CF = 2\,\text{coſ.}\,\omega$

$AF = 1 + 2\,\text{coſ.}\,\omega$.

Nun iſt

$AQ = AF.\,\text{tang.}\,\omega$

folglich

$AQ = (1 + 2\,\text{coſ.}\,\omega)\,\text{tang.}\,\omega = \text{tang.}\,\omega + 2\,\text{ſin.}\,\omega$.

Man kann demnach aus dem §. 11. ſehen, wie dieſer Werth dem wahren Werthe des Bogens näher kömmt. Oder da

$\text{tang.}\,\omega = \omega + \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{2}{15}\omega^5 + \frac{17}{315}\omega^7 + \&c.$

$2\,\text{ſin.}\,\omega = \omega - \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{60}\omega^5 - \frac{1}{2520}\omega^7 + \&c.$

folglich

$AQ = 3\omega * + \frac{3}{20}\omega^5 - \frac{3}{56}\omega^7 + \&c.$

iſt, ſo ſieht man hieraus, daß AQ von der wahren Länge des Bogens AM erſt in der fünften Dignität von ω anfängt verſchieden zu ſeyn, oder daß

$AQ - AM = \frac{1}{1620}AM^5 - \frac{1}{41824}AM^7 + ꝛc.$

iſt.

§. 76.

Man kommt aber der Wahrheit ungleich näher, wenn man auf folgende Art verfährt: Es ſey AMB ein halber Circul, und die Länge Fig. XII.

des Bogens A M zu ſuchen. Zu dieſem Ende richtet man A Q auf A B ſenkrecht auf, und ziehe aus M den Sinus M P. Man theile A P in 5 gleiche Theile, und trage C e aus B in E. Wird nun durch E und M eine gerade Linie E M Q gezogen, ſo wird A Q noch genauer, als vorhin, der Länge des Bogens gleich ſeyn. Denn ſetzt man $AC = CB = BD = 1$, $AM = \varphi$, ſo iſt

$$CP = \text{coſ.}\,\varphi, \quad PM = \text{ſin.}\,\varphi$$
$$AP = (1 - \text{coſ.}\,\varphi)$$
$$ED = \tfrac{1}{5}AP = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5}\,\text{coſ.}\,\varphi$$
$$BE = \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5}\,\text{coſ.}\,\varphi$$
$$PE = \tfrac{9}{5} + \tfrac{6}{5}\,\text{coſ.}\,\varphi$$
$$AE = \tfrac{14}{5} + \tfrac{1}{5}\,\text{coſ.}\,\varphi.$$

Da nun

$$AQ = \frac{PM.AE}{PE}$$

iſt, ſo iſt

$$AQ = \frac{(14 + \text{coſ.}\,\varphi)\,\text{ſin.}\,\varphi}{9 + 6\,\text{coſ.}\,\varphi} = \frac{28\,\text{ſ.}\,\varphi + \text{ſ.}\,2\varphi}{18 + 12\,\text{coſ.}\,\varphi}$$

Da nun

$$\text{ſin.}\,\varphi = \varphi - \frac{1}{2.3}\varphi^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\varphi^5 - \text{etc.}$$

$$\text{ſin.}\,2\varphi = 2\varphi - \frac{8}{2.3}\varphi^3 + \frac{32}{2.3.4.5}\varphi^5 - \text{etc.}$$

$$\text{coſ.}\,\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2.3.4}\varphi^4 - \text{etc.}$$

iſt, ſo findet ſich, wenn man dieſe Reihen in der Formel A Q ſetzt, und die Theilung vornimmt

AQ =

$$AQ = v - \frac{1}{2700} v^7 + \text{ꝛc.}$$

ſo, daß alſo der Unterſchied zwiſchen AQ und dem Bogen AM ſich erſt in der 7ten Dignitåt des Bogens zu åuſſern anfångt. Und wenn auch der Bogen $v = 1$ wird, ſo iſt dieſer Unterſchied dennoch nur $\frac{1}{2700}$ Theil des Halbmeſſers. Nimmt man aber den Bogen um die Hålfte kleiner, ſo wird der Fehler bey jeder Biſection 128 mal geringer. Wenn demnach die Långe eines Circulbogens durch Conſtruction zu beſtimmen iſt, ſo iſt die hier angegebene ſo leicht und ſo genau man es verlangen kann.

§. 77.

Werden aber die beyden erſt angegebene Conſtructionen mit einander verglichen, ſo findet ſichs ohne Můhe, daß auch bey der letztern Conſtruction der Bogen BN von dem dritten Theile des Bogens AM gar unmerklich verſchieden iſt, und daß man folglich dadurch einen Bogen ſehr genau in 3 Theile theilen kann. Denn wenn je der Bogen AM gar zu groß iſt, ſo darf man nur denſelben halbiren, und den dritten Theil von ſeiner Hålfte ſuchen, und dieſe ſodann verdoppeln.

X.
Anmerkungen und Zuſätze zur Gnomonic.

§. 1.

Tab. III. IV. V. Man wird nicht leicht eine Wiſſenſchaft finden, die in ſo viele verſchiedene Formen gebracht, und auf ſo unzählig mannigfaltige Art angewandt worden, als die Gnomonic. Man kann anſtehen, ob es möglich ſey, eine Art von Sonnen-Uhren zu erdencken, die nicht ſchon irgend beſchrieben und angebracht worden wäre. Selbſt auch die Methode, jede Sonnenuhr zu zeichnen, und die dazu dienlichen Inſtrumente und Tabellen ſind eben ſo häufig als mannigfaltig. Es ſcheint daher daß, was man noch etwann darüber erfinden kann, ſchlechthin nur eine Nachleſe iſt, und daß man alle über die Gnomonic herausgekommene Schriften müſſe durchgangen haben, wenn man ſich berechtiget achten will, es eine Nachleſe zu nennen.

§. 2.

Betrachtungen von dieſer Art, bothen ſich mir bey dem Entſchluſſe an, hier einige Anmerkungen über die Gnomonic zu liefern. Ich habe lange nicht alle Schriften über dieſe Wiſſen-

Wiſſenſchaft geleſen, und in ſoferne muß ich unentſchieden laſſen, ob, was ich hier vortragen werde, durchaus neu ſey oder nicht. Ich kann aber darauf zählen, daß ſich viele meiner Leſer in eben dem Fall befinden, und daß es folglich denſeben ſo gut neu ſeyn werde, als es mir ware, da ich darauf verfiele. Verſchiedenes davon wird dienen zu zeigen, daß öfters die erſten Erfinder zufrieden ſind, wenn ſie etwas finden.

I. Anmerkungen über die Azimuthaluhren.

§. 3.

Die Azimuthaluhren ſind vielleicht zuerſt erfunden, und zuletzt berichtigt worden. Ich will ſagen, der erſte, der ſich in Sinn kommen lieſſe, die Zeit nach dem Schatten der Sonne zu meſſen, ſteckte etwan einen Stab gerade aufgerichtet in die Erde, beſchrieb einen Circul darum, und theilte denſelben, ſo gut er es verſtunde, in Stunden, und vermuthlich machte er jede Stunde gleich groß. Von dieſem erſten Anfange an, bis zu der Bemerkung, daß man die Stunden ungleich machen, und ſie entweder von Tag zu Tag ändern, oder dem Zeiger eine ſchiefe mit der Weltaxe parallele Lage geben müſſe, war noch ſehr weit, und es muſten vorerſt die Gründe der ſpähriſchen Aſtronomie erfunden werden, welche ſodann zeig-

zeigten, daß man nicht bey Azimuthaluhren, ſondern bey Aequinoctialuhren den Anfang machen müſſe.

§. 4.

Indeſſen muß man doch ſagen, daß der erſte Einfall, die Zeit nach dem Schatten eines aufrechtſtehenden Stabes zu meſſen, auf die genaueſte Sonnenuhr führte, weil in der That die Azimuthaluhren allein von den Anomalien der Refraction frey ſind. Da ſich aber die Stundenwinkel davon beſtändig ändern, ſo haben ſie die Unbequemlichkeit, daß man entweder einen Calender dabey anbringen, oder den Zeiger beweglich machen muß, und auch in dem letztern Fall wird der Calender dabey nothwendig. Man hat daher dieſen vorgezogen, und die Azimuthaluhr dergeſtallt zeichnen
Fig. I. gelehrt, daß die Stunden in der Ellipſe ADBE herum liegen, der Zeiger aber auf der Linie Gg, als der kürzern Axe der Ellipſe, hin und her geſchoben wird. Die Methode, ſowohl die Ellipſe als den Calender in Gg zu zeichnen, findet ſich in mehreren gnomoniſchen Schriften. Sie wird aber darin nur als eine Azimuthalſonnenuhr beſchrieben, und weder durch die Eigenſchaften der Ellipſe kenntlicher, noch durch andere dabey mit vorkommende Umſtände, brauchbarer gemacht. Hierin beſteht nun meine Nachleſe, und die Zeichnung der Uhr wird ſich folgender maſſen angeben laſſen:

§. 5.

§. 5

Machet den Winkel DFC ſo groß als die Polhöhe des Ortes, für welchen die Uhr dienen ſolle, und nachdem ihr DF willkührlich angenommen, ſo ziehet DC aus D auf FC ſenkrecht. Traget DF aus C in A und B, und machet CE = CD, ſo iſt AB die gröſſere, DE die kleinere Axe, und F der Brennpunct der Ellipſe ADBE. Traget CF in Cf, ſo iſt f der andere Brennpunct. Machet ferner jeden Winkel GfC der Declination der Sonne gleich, ſo wird ſich auf Gg der Thierkreis oder der Calender zeichnen laſſen. Endlich machet jeden Winkel DCK dem Stundenwinkel, und CK der halben Axe CB gleich, und fället aus K die Perpendiculair KP auf AB, ſo wird H der Punct ſeyn, wo die Stunde muß hingeſchrieben werden. Und wenn die Declination der Sonne = GfC iſt, ſo iſt DGH das Azimuth der Sonne zu der Stunde H. DE iſt die Mittagslinie, D liegt gegen Mitternacht, und der Zeiger wird in G aufgerichtet. Ferner iſt für eben den Tag jede Linie GH allemale dem Coſinus der Sonnenhöhe gleich, und wird aus G die Normallinie GL auf die Ellipſe gezogen, ſo zeigt ſie die Stunde des Aufganges der Sonne, ſo wie die andere Normallinie Gl die Stunde des Niederganges bezeichnet, und zugleich der Halbmeſſer des Circuls iſt, auf welchem GH den Coſinus der der Sonnenhöhe giebt. Auf eben dieſem Circul

cul

tul iſt CK der Coſinus der Declination der Sonne.

§. 6.

Der Beweis von allen dieſen Sätzen wird nicht ſchwer, wenn man ſich die ganze Figur als eine ortographiſche Projection der Sphäre vorſtellt. Man fälle nemlich aus jeden Punkten des Parallelkreiſes der Sonne, Perpendiculairen auf die Fläche des Horizontes, ſo bezeichnen dieſe die Ellipſe ADBE. Der Diameter AB behält ſeine Länge, welche den doppelten Coſinus der Declination gleich iſt. Hingegen wird DE in Verhälniß des Halbmeſſers zum Sinus der Polhöhe verkürzt. Und dieſes iſt der Grund, warum der der Polhöhe gleich gemachte Winkel DFC in den Brennpunct F trift. Denn FD iſt in der Ellipſe allemal = AC = CB, und ſo wird hier CB: CD = FD : CD = 1 : ſin. eleu. poli. Fällt man ferner aus dem Scheitelpunt der Sphäre eine Perpendiculairlinie auf den Horizont, ſo trift dieſe in G. Hingegen iſt C die Projection desjenigen Punctes der Weltaxe, welcher in der Fläche des Parallelkreiſes der Sonne liegt, und von dem Mittelpunct der Sphäre um den Sinus der Declination entfernt iſt. Da dieſer Mittelpunct in G fällt, ſo iſt GC die Projection von dieſem Sinus der Declination, und wegen der ſchiefen Lage der Weltaxe im Verhältniß des Halbmeſſers zum Coſinus der

Polhö-

Polhöhe verkürzt. GH iſt für jede Stunde die Projection des Sinus des Abſtandes der Sonne vom Scheitelpunct, und folglich des Coſinus der Sonnenhöhe. Dieſe Linie hat in der Lage GL, Gl ihre beyden Maxima; und L, l ſind die Projection der Punkte, wo der Parallelkreis der Sonne den Horizont durchſchneidet. Nimmt man demnach GL = 1 an, ſo iſt CB der Coſinus der Declination, CF = Cf im Verhältniß des Coſinus der Polhöhe kleiner, und CG in Verhältniß der Tangente der Declination kleiner als CF, folglich in zuſammengeſetzter Verhältniß der Tangente und des Coſinus der Declination und des Coſinus der Polhöhe kleiner als CL = 1, demnach in Verhältniß des Sinus der Declination und des Coſinus der Polhöhe. Hieraus ergiebt ſich, warum der Calender in Gg aus dem Brennpunct f kann verzeichnet werden. Endlich iſt CP allemal die Projection des Sinus des Stunden-Bogens, welcher, wenn CK = CB als Halbmeſſer angenommen wird, dem Winkel DCK gleich wird.

§. 7.

Die erſt angegebene Verzeichnung der Azimuthaluhren hat für diejenigen, welche die Ellipſen aus der höhern Geometrie kennen, etwas geſchmeidiges, wodurch ſie faßlicher wird. Der Gebrauch des Brennpuncts wird dadurch merkwürdig, daß er ſowohl die Polhöhe DFC

als

als die Declination der Sonne GfC, und damit den auf Gg gezeichneten Calender beſtimmen hilft. Es iſt ferners merkwürdig, daß die aus jedem Punct G auf die Ellipſe gezogene Normallinien GL, Gl die Stunde des Auf- und Unterganges der Sonne angeben. Es iſt unnöthig hier mit anzumerken, daß die Puncte L, F, G, f, l ſämtlich in dem Umkreiſe eines Circuls liegen, weil dieſes aus dem, daß GL, Gl Normallinien ſind, für ſich folgt. Da man aber, um dieſen Circul zu ziehen, nur drey Puncte nöthig hat, ſo kann man die Puncte L, l beſtimmen, wenn man den Circul durch f, G, F zieht; und hinwiederum wird G beſtimmt, wenn der Circul durch L, F, G gezogen wird. Im erſten Fall findet man aus der Declination die Länge des Tages LADBL, im andern aus der Länge des Tages die Declination. Endlich iſt hiebey merkwürdig, daß dieſe Azimuthaluhr, vermittelſt der Linie GH, nicht nur die Stunde H, und ihr Azimuth DGH angiebt, ſondern ihre Länge ſelbſt den Coſinus der Sonnenhöhe vorſtellt, wenn GL zum Halbmeſſer angenommen wird.

§. 8.

Es kömmt aber bey dieſer Azimuthaluhr noch ein anderer Umſtand vor, welcher unerwarteter iſt. Man darf nemlich nur ſetzen, daß AC die Mittagslinie ſey, und über derſelben einen Zeiger aus C aufrichten, welcher mit

derſelben

derſelben einen Winkel mache, der der Polhöhe DFC gleich ſey, ſo wird, wenn man in A 12 Uhr ſchreibt, und ſo die Stunden ändert, die Uhr eine Horizontaluhr für eben die Polhöhe ſeyn, für welche ſie vorhin eine Azimuthaluhr war. Denn bey den Horizontaluhren ſind die Tangenten der Stundenwinkel in der Verhältniß des Halbmeſſers zum Sinus der Polhöhe kleiner als die Tangenten der Stundenbögen. Es ſey demnach jeder Stundenbogen =KCB, ſeine Tangente =KP, wenn man nemlich CP als einen Halbmeſſer anſieht. Da nun PH in der Verhältniß von FD zu CD, oder des Halbmeſſers zum Sinus der Polhöhe kleiner iſt als PK, ſo iſt PH die Tangente des Stundenwinkels der Horizontaluhr, und folglich HCB der Stundenwinkel ſelbſt.

§. 9.

Ungeachtet aber die Ellipſe ADBE eben ſo wohl zu einer Azimuthaluhr als zu einer Horizontaluhr gebraucht werden kann; ſo macht dennoch die verſchiedene Lage der Mittagslinie, als welche im erſten Fall die kürzere, im andern Fall aber die längere Axe iſt, daß man ſie nicht zugleich zu beyden Abſichten gebrauchen kann, wenn man ſich des Schattens beyder Zeiger bedienen will. Will man aber an dem Zeiger der Azimuthaluhr, welcher auf der Linie Gg ſenkrecht ſteht, einen gleichfalls aufrechtſtehenden Spiegel befeſtigen, ſo, daß derſelbe mit beyden

Axen der Ellipſe einen Winkel von 45 Graden mache, ſo wird der, vermittelſt des Spiegels, reflectirte Schatten des Azimuthalzeigers, die Stunden von D an gerechnet, eben ſo zeigen, wie der auf C B ſtehende Zeiger der Horizontaluhr die Stunde, von B an gerechnet, weiſen wird, wenn die längere Axe in der Mittagslinie liegt. In jeder andern Lage treffen beyde Stunden nicht zuſammen. Man hat ſich auch dieſes Umſtandes längſt ſchon bedient, um durch die Vereinigung der Azimuthal- und Horizontaluhren die Lage der Mittagslinien zu finden, dabey aber jede Uhr beſonders verzeichnet. Läßt ſich aber der Spiegel gut anbringen, ſo gebraucht es, nach der hier angegebenen Methode, dieſer gedoppelten Zeichnung nicht, weil man bey der Ellipſe A D B E bleiben, und ſchlechthin nur die Zahlen, ſowohl von D als von B an gerechnet, herum ſchreiben darf.

II. Beſtimmung des Azimuth durch die Höhe der Sonne.

§. 10.

In den Anweiſungen zur Gnomonic begnügt man ſich mehrentheils die Verfertigung der Sonnen-Uhren, und etwann auch der Mond- und Sternuhren anzugeben, das will ſagen, man macht die Beſtimmung der Zeit darin zur Hauptabſicht; und dieſes hat

hat allerdings ſeine gute Gründe, weil man den übrigen Umſtänden ſeltener als der Zeit nachfragt. Indeſſen hat die Beſtimmung des Azimuth, und folglich der Mittagslinie, noch genug Erhebliches, daß man die dazu dienlichen Mittel vervielfältigen ſollte. In der Gnomonic ſelbſt kömmt die Frage von Beſtimmung der Mittagslinien bey den meiſten Sonnenuhren vor. In der practiſchen Geometrie kann ſie ebenfalls ſehr gute Dienſte leiſten; und bey der Schiffahrt wird ſie unentbehrlich. Da das Azimuth am unmittelbarſten aus der Höhe der Sonne geſunden wird, ſo werde ich einige darüber angeſtellte Unterſuchungen hier mit anbringen.

§. 11.

Es iſt unnöthig aus dem vorhingeſagten zu wiederholen, daß die erſtbeſchriebene Azimuthaluhr dazu dienen kann, ſofern man GL, als den Sinus totus, und GH als den Coſinus der Sonnenhöhe anſieht, (§. 5.) und ſofern GI, GL das Azimuth der auf- und untergehenden Sonne iſt. Es iſt vielmehr die Frage, das Azimuth unmittelbar auf den Quadranten zu verzeichnen, mit welchem die Höhe der Sonne gemeſſen wird. Dazu dienen nun folgende Betrachtungen:

§. 12.

Es ſey HZON der Mittagskreiß, HCO der Horizont, GCF der Aequator, KSI Fig. II.

ein Parallelkreiß des Aequators, S der Ort der Sonne, SZ ihr Abſtand vom Zenith, SP ihr Abſtand vom Pole, SPZ der Stunden-Winkel, SZI der Azimuthalwinkel. Man ſetze:

$$PZ = e$$
$$PS = c$$
$$ZS = k$$
$$PZS = a$$

ſo giebt die Trigonometrie folgende Gleichung:

$$\operatorname{coſ} c = \operatorname{coſ} e . \operatorname{coſ} k + \sin e . \sin k . \operatorname{coſ} a$$

oder wenn man durch ſin. k dividirt

$$\operatorname{coſ} c . \operatorname{coſec} k = \operatorname{coſ} e . \cot k + \sin e . \operatorname{coſ} a.$$

§. 13.

Fig. III. Da wir den ſphähriſchen Triangel PSZ in einen geradlinichten verwandeln, in welchem e ein Winkel werde, ſo ſeyn in dem geradlinichten Triangel $\alpha \varepsilon \beta$ vier auf einander folgende Stücke, nemlich die Winkel δ, ε und die Seiten α, β; ſo wird die Verhältniß dieſer vier Stücke durch die Gleichung

$$\alpha \operatorname{coſec} \varepsilon = \beta . \cot \varepsilon + \beta . \cot \delta$$

ausgedrückt. Wird dieſe Gleichung mit der letztern des vorhergehenden §. verglichen, ſo läßt ſich

$$\operatorname{coſec} \varepsilon = \operatorname{coſec} k$$
$$\cot \varepsilon = \cot k$$

demnach

$$\varepsilon = k$$

ſetzen.

ſetzen. Dadurch aber wird

$$\alpha = \cos c$$
$$\beta = \cos e$$

und da nun nur noch

$$\beta \cot \delta = \sin e . \cos a$$

bleibt, ſo findet ſich

$$\cot \delta = \frac{\sin e . \cos a}{\beta} = \tang e . \cos a$$

Und auf dieſe Art ſind die vier Stücke $\varepsilon, \alpha, \beta, \delta$ des geradlinichten Triangels durch die vier Stücke k, c, e, a des ſphäriſchen Triangels dergeſtalt beſtimmt, daß die Seite k des letztern im erſtern der Winkel ε wird. Es iſt demnach in dem geradlinichten Triangel der Winkel ε das Complement der Sonnenhöhe, die Seite β der Sinus der Polhöhe, die Seite α der Sinus der Declination. Und da

$$\cot \delta = \tang e . \cos a$$

iſt, ſo ergiebt ſich hieraus, daß der Winkel δ dem Bogen NL gleich iſt. Denn der Triangel LGN iſt in G rechtwinklicht, und

$$GN = 90° - e$$
$$GNL = a$$

demnach

$$\cos a = \cot e . \cot NL = \cot e . \cot \delta$$
$$d = NL.$$

§. 14.

Wir führen dieſen letztern Umſtand nur an, um zu zeigen, daß der Winkel δ auch auf der

Sphäre eine Bedeutung hat. Es iſt aber zu unſerm Vorhaben genug, wenn wir aus der Gleichung

$$\cot \delta = \text{tang } e . \cos a$$

die Anmerkung ziehen, daß ſich der Winkel δ ſchlechthin nach dem Azimuth a verändert, und daher beſtändig iſt, ſo lange man bey einerley Azimuth bleibt. Da nun die demſelben gegenüberſtehende Seite $\varepsilon = \cos e$ durchaus beſtändig iſt, ſo wird der Punct δ allemal in dem Umkreiſe des Circuls ε δ γ liegen, und auf dieſe Art wird α durch ε, oder hinwiederum ε durch α beſtimmt. Es iſt demnach nur die Frage, dieſen Circul für jedes Azimuth zu beſtimmen. Dieſes wird nun am leichteſten geſchehen, wenn wir den Winkel ε rechtwinklicht nehmen.

§. 15.

Fig. IV. Es ſey demnach AC zu AB wie der Sinus totus zur Tangente e, und A ein rechter Winkel. Ferner ſey für jedes Azimuth

$$AB : AD = 1 : \cos a$$

ſo wird

$$AC : AD = 1 : \text{tang } e . \cos a = 1 : \cot \delta$$

demnach

$$\delta = CDA$$

ſeyn. Man halbire DC in E, und aus E beſchreibe man mit dem Halbmeſſer ED den Bogen ADC, ſo iſt dieſes der für das Azimuth a geſuchte Bogen. Nimmt man nun jedes Azimuth

muth von 10 zu 10 Graden, ſo werden die denſelben entſprechende Bögen auf eben die Art beſchrieben, wie ſie die Figur vorſtellt. Zieht man durch E eine Parallele HEG mit AB, ſo liegen alle Mittelpuncte auf HG, und es iſt für jedes Azimuth

$$HF : EF = 1 : \text{coſ}\, a.$$

§. 16.

In dieſer Figur iſt nun

$$AC = \beta = \text{coſ}\, e$$

folglich

$$CB = CM = \text{ſin. tot.}$$

ferner jede Linie

$$Cd = \text{coſ}\, c = \alpha$$

$$dCA = k$$

$$dCK = 90° - k$$

und der Circul ADdC zeigt das dazu gehörige Azimuth an.

§. 17.

Daferne das auf dieſe Art zu verfertigende Inſtrument nur für die Sonnenhöhen und deren Azimuthe dienen ſolle, ſo gebraucht man nicht die gantze Figur, ſondern man macht CL dem Sinus der größten Declination der Sonne gleich; und indem man aus C den Bogen Ll beſchreibt, ſo iſt der Theil LlC alles, was man von der Figur gebraucht. Auf CL werden aus C die Sinus der Declination für jede Grade der Ecliptic getragen, und mit

L l concentriſche Bögen aus C beſchrieben. Wo nun dieſe Declinationsbögen die Azimuthalbögen durchſchneiden, da ergiebt ſich zugleich die dazu gehörende Höhe der Sonne durch den Winkel, den die aus C in dieſe Durchſchnittspuncte gezogenen Linien mit CK machen. Die fünfte Figur ſtellt einen ſolchen für die Grade der Ecliptic verzeichneten Azimuthalquadtanten gröſſer und deutlicher vor, und die Verzeichnung auf eine bloß practiſche Art vorgetragen, iſt folgende.

§. 18.

Fig. V. Nach einer beliebig angenommenen Scale mache man C F dem halben Sinus der Polhöhe, FH dem halben Coſinus derſelben gleich und den Winkel F von 90 Graden. Sodann ſehe man F H als einen Halbmeſſer an, und trage auf denſelben aus F gegen H und G alle Sinus des Azimuth, von Grad zu Grad, oder von 5 zu 5, oder, wie es in der Figur geſchehen, von 10 zu 10 Graden, ſo hat man eben ſo viele Mittelpuncte, aus welchen man durch C eben ſo viele Circulbogen zieht, und auf dieſelbe die Grade des Azimuth von Mittag und von Mitternacht an gerechnet, zeichnet. Der Winkel H C N wird von 90 Graden gemacht, und ſo erhält man N C L die gantze Oefnung, ſo der Quadrant haben muß. Ferner mache man C L dem Sinus der gröſten Declination der Sonnen gleich, und beſchreibe aus

aus C den äuſſerſten Bogen LKN, welcher ſodann in Grade getheilet wird, die von K aus vor- und rückwärts gezählet werden, ſo, daß der 90ſte Grad in L falle. Sodann werden auf CL aus C die Sinus der Declination von allen Graden der Ecliptic aufgetragen, oder welches einerley iſt, man ſieht CL als einen Halbmeſſer an, und trägt alle Sinus darauf, oder man fällt aus jeden Grade des Bogens LK Perpendicularen auf CL, und ſchreibt die nördliche Zeichen des Thierkreyſes da, wo die Sinus ihrer Declination hinfallen. Auf CN werden auf gleiche Art die ſüdlichen Zeichen geſchrieben. Die Dioptern werden auf CL angemacht, ſo, daß für die nördliche Zeichen C, für die ſüdlichen L gegen die Sonne gerichtet wird. Den in C angemachten Faden CP mit dem Gleichgewichte P und der daran beweglichen Perle p, läßt man frey herunter hängen, nachdem man denſelben anfangs auf CL, oder CN gelegt, um die Perl auf den Ort der Sonne zu ſchieben. Auf dieſe Art wird z. E. wenn die Sonne im 23ſten Grad ♉, oder 7 Grad ♌ und 20 Grad hoch iſt, die Perl in p ſeyn, und den 95ſten Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, oder auf den 85ſten Grad von Mitternacht an gerechnet, anzeigen. Wäre bey gleicher Höhe der Sonne eben die Declination ſüdlich, ſo würde die Perl in q auf den 21ſten Grad von Mittag, oder auf den 159ſten Gr. von Mitternacht an gerechnet,

 fallen.

fallen. Will man aber den Quadranten feſte ſtellen, und die Dioptern anſtatt des Fadens, auf ein bewegliches Lineal bringen, ſo muß CK immer horizontal liegen, und die auf CL, CN geſchriebene Grade und Zeichen werden auf das Lineal gezeichnet.

§. 19.

Wer leicht einige gnomoniſche Schriften geleſen hat, wird ohne Mühe auf die Anmerkung fallen, daß man längſt ſchon einen Quadranten von dieſer Art geſucht hat, auf welchem die hier verzeichneten Azimuthalbögen, Stundenbögen wären, und zwar mit dem Bedinge, daß es Circulbögen blieben. Denn wenn man andere krumme Linien dazu gebrauchen will, ſo laſſen ſich unzählige dergleichen verzeichnen. Man findet auch hin und wieder ſolche Quadranten beſchrieben, wo man mit Hindanſetzung der geometriſchen Schärfe Circulbögen dazu gebraucht. Mit geometriſcher Schärfe läßt ſich eben dieſer Azimuthalquadrant dazu gebrauchen, wenn man die Declination und die Sonnenhöhe verwechſelt. Man nimmt nemlich die Declination auf dem Bogen KL, oder KN, und den Sinus der Sonnenhöhe auf CL, oder CN, und verwandelt die Grade des Azimuth, ſo die Perl anzeigt, in Stunden, indem man ſie durch 15 theilt. So z. E. wenn man ſetzt, die Declination ſey 20 Grad nördlich, die Sonnenhöhe $18\frac{1}{2}$ Grad, ſo wird die

Perl,

Perl, wie vorhin, in p ſeyn, und von Mittag an gerechnet 95 Grad, oder, durch 15 getheilt, 6 St. 20 Min. angeben, welches Nachmittags-Stunden ſind. Theilt man aber die von Mitternacht an gerechnete 85 Grad durch 15, ſo erhält man 5 St. 40 Min. welches Vormittags-Stunden ſind.

§. 20.

Der Grund, warum dieſe Verwechſelung angeht, iſt, weil man in beyden Fällen in dem Triangel PZS drey Seiten und einen Winkel hat. Der Quadrant iſt für den Azimuthalwinkel Z conſtruirt. Will man ſtatt deſſen den Stundenwinkel P nehmen, ſo ſteht dieſem nicht mehr die Seite PS, ſondern die Seite ZS gegenüber. Demnach müſſen dieſe Seiten verwechſelt werden. Da die Seite PZ an beyden Winkeln liegt, ſo bleibt ſie in beyden Fällen unverändert. Da übrigens die Scale CL nur bis auf $23\frac{1}{2}$ Grad geht, ſo ſieht man leicht, daß ſie nicht für alle Sonnenhöhen dient, und daß man folglich dieſelbe bis auf den Sinus der gröſten Sonnenhöhe verlängern müſſe. Fig. II. Fig. V.

§. 21.

Ich werde mich aber dabey nicht länger aufhalten, ſondern vielmehr die Anmerkung machen, daß alle die gnomoniſche Inſtrumente, wobey das, was man ſucht, auf einer ganzen

Fläche

Fläche herum getragen und geſucht werden muß, auf eine ſolche Art ins weitläuftige fallen, daß man, ſo ſinnreich ſie auch ausgeſonnen ſind, ſtatt derſelben, mit gutem Grunde, einfachere wünſchen kan. So z. E. fällt das Geſchmei-
Fig. I. dige der Azimuthaluhr der erſten Figur in die Augen. Die Stunden liegen auf einer einigen Linie herum, und der Zeiger wird auch nur auf der Linie Gg, als auf einer ganz einfachen Scale auf den Ort der Sonne geſtellt. Ich habe daher auf Mittel gedacht, bey den Quadranten eben ſolche Abkürzungen und Geſchmeidigkeiten zu erhalten, und werde nun das, ſo ich für das Azimuth gefunden, folgender maſſen vortragen.

§. 22.

Fig. II. Da die Sonnenhöhe, deren Complement der Bogen ZS iſt, auf dem Quadranten durch einen Winkel vorgeſtellt und gemeſſen wird, ſo habe ich nach den bekannten trigonometriſchen Regeln den Triangel E C A genommen, deſſen drey Seiten ihre Pole in den Ecken P, Z, S haben. Hier iſt nun

ECA die Höhe des Aequators = e
CEA das Complement der Sonnenhöhe = k
CAM das Complement der Declination = c
EC das Complement des Azimuth = 180° − a
CA der Stundenbogen = SPZ.

Nun war es die Frage, den Triangel AEC dergeſtalt zu proiiciren, daß das Auge in dem

Nadir

Nadir des Puncts E und die Tafel auf der aus dem Auge in E gezogenen Linien ſenkrecht war. Man weiß, daß auf dieſe Art die Bögen EC, EA durch gerade Linien vorgeſtellt werden, deren Länge den Tangenten der Hälfte dieſer Bögen gleich iſt, daß der Winkel E bleibt, und AC durch einen Circulbogen vorgeſtellt wird, welcher die Linien EC, EA unter den Winkeln A, C ſchneidet.

§. 23.

Man mache demnach den Winkel Fig. VI.

$$AEC = k$$
$$EC = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,a$$
$$EQ = \cot a$$
$$CQR = 90\ \text{Gr.}$$
$$QCR = 90 - c$$

aus R beſchreibe man den Bogen CAM, ſo wird der Winkel

$$ACE = e$$
$$MAE = c$$

und EAE der Declination der Sonne gleich ſeyn.

§. 24.

Nun iſt

$$QC = \cot a + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,a = \text{coſec}\ a$$

demnach

$$QE : QC = \cot a : \text{coſec}\ a = \text{coſin}\ a$$

Nimmt man folglich QC und damit den ganzen Triangel QCR und den Bogen CM als beſtan-

beſtändig an, und betrachtet QC als einen Halbmeſſer, ſo iſt QE der Coſinus des Azimuth, und auf dieſe Art können die Azimuthe auf die Linie QC getragen werden. Da der Winkel AEC = k dem Abſtand der Sonne vom Scheitelpunct gleich iſt, ſo bleibt QC in allen Fällen vertical, und AE iſt immer nach der Sonne gerichtet, und ſchneidet auf EC die Grade des Azimuth ab. Macht man demnach in R ein bewegliches Lineal AR, und auf denſelben in A ein ander bewegliches Lineal AE mit Diogtern an, ſo muß der Winkel EAR immer der Declination der Sonne gleich gemacht, und ſo befeſtigt werden. Sodann dreht man den ganzen Winkel oder die beyden Lineale EAR bis AE gegen die Sonne gerichtet iſt, ſo wird AE das Azimuth in E auf der Scale CQ abſchneiden.

§. 25.

Nach dieſer Anleitung läßt ſich das Inſtrument aus zween Sectoren ſo verfertigen, wie es die 7te Figur vorſtellt. Der erſte Sector NRCM hat einen Bogen NMC, welcher doppelt ſo groß als die Höhe des Aequators iſt. Die Chorde dieſes Bogens NQC wird als ein Diameter angeſehen, und die Sinus verſus jeder Graden aus C gegen N getragen, und die Grade dazu hingezeichnet, welche ſodann jede Azimuthe, von Mittag an gerechnet, vorſtellen. Der andere Sector RDAF hat einen

Fig. VII.

Bogen,

Bogen, der doppelt ſo groß als die Obliquität der Ecliptic iſt. Die Linie AR theilt denſelben in zween gleiche Theile, und iſt von gleicher Länge wie der Halbmeſſer des erſten Sectors. A iſt der Mittelpunct, aus welchem die Bögen DF beſchrieben, und auf welche die Grade der Declination aufgetragen werden. Dieſer zweyte Sector dreht ſich in R um das Centrum des erſtern, hingegen wird in ſeinem Centro A das Lineal AB angemacht, und mit Dioptern verſehen, welche mit der Linie AB parallel ſind.

§. 26.

Solte nun damit das Azimuth der Sonne gefunden werden, ſo wird das Inſtrument in die Verticalfläche der Sonne geſtellt, ſo, daß die Chorde NC vertical ſtehe. Das Lineal AB wird in B auf den Grad der Ecliptic gedreht, in welchem die Sonne iſt. Sodann dreht man den Sector ADRF bis die Dioptern gegen die Sonne gerichtet ſind, ſo wird die Schärfe des Lineals AB auf der Chorde NQC das Azimuth der Sonne abſchneiden, die Höhe der Sonne ſelbſt aber wird MRA + BAR ſeyn.

§. 27.

Man thut hiebey wohl, wenn man den Sector DAFR etwas gröſſer als 47 Grad macht, damit, wenn das Lineal AB auf 0 ♋

liegt,

liegt, es ſich nicht an dem Arm AD ſo anſchlieſſe, daß der Grad des Azimuth auf NQC, den es anzeigen ſolle, ganz bedeckt werde. Aus gleichem Grunde iſt es gut, wenn man das Gewinde A nicht ſehr groß macht, damit es, wenn A nahe an C kömmt, die Grade auf CQ nicht bedecke. Uebrigens da dieſes nur um die Mittagszeit geſchieht, wo ohnehin das Azimuth nicht ſehr genau durch die Sonnenhöhe beſtimmt werden kann, ſo hat es auch nichts auf ſich, wenn gleich die 20 oder 30 erſte Grade bedeckt werden, da es an ſich rathſamer iſt, daß man ſie nie gebrauche, daß will ſagen, das Azimuth Morgens früher, Nachmittags ſpäter zu beſtimmen ſuche. Da endlich das Gewind A nie höher gegen R hinauf zu ſtehen kömmt, als bis dahin, wo der Arm AD horizontal liegt, ſo kann man von dem Sector CMNR den Theil, der noch höher iſt, weglaſſen, und ſo wird er von nicht mehrern Graden ſeyn, als die gröſte Sonnenhöhe; dabey aber bleibt die Chorde und ihre Eintheilung und Lage eben ſo, als wenn man den Sector gantz beybehielte. Es iſt faſt unnöthig zu erinnern, daß man an dem Gewinde A einen Stift befeſtigen kann, welcher auf einem um NMC herum beſchriebenen concentriſchen Bogen, Grade anzeige. Dieſe mögen dienen, den Sector ADRF, nach geſchehener Obſervation, um ſo viel hinauf zu drehen, als die Refraction beträgt, wenn das Inſtrument

groß

groß genug iſt, daß man bey kleinern Sonnenhöhen derſelben, darauf Rechnung tragen kann.

III. Sector, um aus der Sonnenhöhe die Zeit zu beſtimmen.

§. 28.

Das erſt beſchriebene Azimuthalinſtrument hat nun den vorhin (§. 21.) verlangten Vortheil der einfachen und bloß linearen Scalen, und iſt überdies ſehr leicht und ohne weitläuftige Vorbereitung zu gebrauchen. Ueberdies kommt der Umſtand dabey vor, daß die Ungleichheit der Grade auf der Chorde NQC gleichſam der Maaßſtab von der Zuverläßigkeit der Obſervation angiebt, weil dieſe nur ſo weit geht, als die Theile, welche ſich in jedem Fall auf NC noch unterſcheiden laſſen. Ich habe daher geſucht, ob dieſe Vortheile auch bey einem Sector erhalten werden könnten, welcher anſtatt des Azimuth die Stunden angeben würde.

§. 29.

Zu dieſem Ende kehrte ich zu dem Triangel ECA zurücke (§. 22.) wobey nunmehr Fig. II.

$$ECA = e$$
$$CEA = k$$
$$CAM = c$$
$$AC = SPZ = \omega$$

zu betrachten vorkömmt. Dieſen proiicirte ich ſo, daß das Aug im Nadir des Eckes A und
Fig. VIII. die Tafel auf der aus dem Auge durch A gehenden Linien ſenkrecht war. Es ſey demnach

$$MAC = c$$
$$AC = \text{tang.} \tfrac{1}{2}\,\omega$$
$$AQ = \cot \omega$$
$$AQR = 90 \text{ Grad}$$
$$RCQ = 90 - e$$

ſo wird, wenn man aus R den Bogen CN beſchreibt, der Winkel

$$ECA = e$$
$$AEC = k$$

demnach AER die Höhe der Sonne ſeyn. Zieht man ferner RM auf EAM, und KR auf RQ ſenkrecht, ſo iſt

$$KRM = 90^\circ - MAC = 90 - c$$

folglich KRM der Declination der Sonne gleich, und

$$MRE = 90^\circ - MER = k$$

demnach wenn RM vertical iſt, ſo iſt RE gegen die Sonne gerichtet, weil MRE ihrem Abſtand vom Scheitelpunct gleich iſt. Endlich haben wir

$$QC = \text{tang } \tfrac{1}{2}\,\omega + \cot \omega = \text{coſec } \omega$$
$$QA : QC = \cot \omega : \text{coſec } \omega = \text{coſin } \omega$$

Wird daher CQ und damit der ganze Triangel CRQ und der Bogen CN als beſtändig genommen, und CQ als ein Halbmeſſer angeſehen, ſo iſt AQ der Coſinus des Stundenbogens

bogens ω, und auf dieſe Art laſſen ſich auf QC die Stunden zeichnen, wenn man ſie dahin zeichnet, wo die Coſinus ihrer Bögen hintreffen.

§. 30.

Will man demnach aus dieſer Figur ein Inſtrument machen, ſo muß Fig. IX.

KRM die Declination der Sonne
RM vertical
ER gegen die Sonne gerichtet
EA horizonthal

ſeyn. Dieſes kann nun auf folgende Art erhalten werden.

§. 31.

An dem Sector HCLNR wird der Bogen CL = LN der Höhe des Aequators gleich gemacht, die Chorde CQN gezogen, und indem man ſie als einen Diameter anſieht, ſo trägt man die Sinus verſus der Stundenbögen aus C gegen N darauf, um die Stunden und Minuten darauf zu verzeichnen. Von L in K zählt man 90 Grade, und trägt aus K vor- und rückwerts die Declination jeder Grade der Ecliptic, um die Zeichen des Thierkreiſes darauf zu zeichnen. In dem Centro R wird ein bewegliches Lineal RA angemacht und mit Dioptern verſehen. In E aber wird ein Winkelhacken ABD angehenkt, ſo, daß durch die Schwere des Gewichtes D die Schärfe des Lineals AB allemal in eine horizontale Lage

komme. Endlich hängt aus R der Faden R M mit dem Gewichte M herunter.

§. 32.

Soll nun die Stunde gefunden werden, ſo wird der Sector in die Verticalfläche der Sonne geſtellt, ſo, daß der Faden R M auf den Ort der Sonne falle. Sodann richtet man die Dioptern E N gegen den Mittelpunct der Sonne, und läßt den Winkelhacken A D B frey hangen und ſich in Ruhe ſetzen. Dieſer wird ſodann in A die Stunde und Minute anzeigen.

§. 33.

Man kann dieſen Sector mit Wegſchaffung des rechten Winkels K R L folgendermaſſen abändern und geſchmeidiger machen. Der Bogen N C bleibt wie vorhin der doppelten Höhe des Aequators gleich, und die Chorde N Q C wie eben ſo, in Stunden getheilt. Hingegen werden die Grade der Declination aus L vor- und rückwärts getragen. An dem Lineal R E läßt man aus E einen Faden E P mit dem Gewichte P herunter hangen, und die Dioptern F B werden in D rechtwinklicht an dem Lineal R E D befeſtigt.

Fig. X.

§. 34.

Um nun damit die Stunde zu finden, dreht man das Lineal R E D auf das Zeichen und Grad der Ecliptic, in welchem die Sonne iſt,

und wendet ſodann den ganzen Sector ſo, daß das Lineal eine verticale Lage bekomme, oder der Faden E P auf E R treffe, oder, welches einerley iſt, der Ort der Sonne in M vertical über R ſey. Sodann dreht man das Lineal, um die Dioptern B F gegen die Sonne zu richten, und läßt den Faden frey hangen und ſich in Ruhe ſetzen, ſo wird derſelbe in A die Stunde und Minuten weiſen, die zu finden war.

IV. Methode dieſe Sectoren für jede Polhöhe univerſal zu machen.

§. 35.

Die erſt beſchriebene Sectoren, wodurch vermittelſt der Höhe der Sonne ſowohl das Azimuth als die Zeit gefunden wird, haben auſſer der einfachen und blos linearen Scale noch den Vortheil, daß ſie faſt, ohne weitere Zubereitung, für jede Polhöhen allgemein gemacht werden können. Die Möglichkeit dieſes beträchtlichen Vortheils rührt daher, daß die Eintheilung der Scale C N für jede Polhöhen einerley iſt, und daß ſich ſchlechthin nur der Winkel Q R C ändert, als welcher allemal der Höhe des Aequators gleich gemacht werden muß. Setzt man demnach Q C N beſtändig, ſo wird Q R deſto länger, je gröſſer die Tangente der Polhöhe Q C R iſt, und aus gleichem Grunde verlängert ſich C R = E R in Ver-

 hältniß

hältniß der Secante der Polhöhe. Dieſes fordert demnach, daß man auf der Linie RQ noch ein Lineal befeſtige, und auf demſelben die Tangente der Polhöhe aus R gegen Q trage, damit man die Scale CN, welche nunmehr beweglich gemacht werden muß, auf die Polhöhe ſchieben und befeſtigen könne. Eben ſo müſſen auch die Secanten der Polhöhe auf dem Lineale RE aufgetragen werden, um den Faden EP jedesmal da anzuhängen, wo die Polhöhe gezeichnet ſteht. Beyden Linealen RQ, RE giebt man die Länge, welche die gröſte Polhöhe erfordert, wo man zu obſerviren gedenkt; und anſtatt dem Inſtrumente die Figur eines Sectors zu geben, kann man es in ein Rectangel verwandeln, deſſen Breite = CN, die Länge aber der Secante der gröſten Polhöhe gleich iſt, für welche man es zu gebrauchen gedenkt.

§. 36.

Auf dieſe Art verwandelt wird nun das Inſtrument in der 11. Figur vorgeſtellt, wie es vom Aequator bis unter dem Polarcircul gebraucht werden kann. Die Stundenleiter NC läßt ſich an den beyden Rahmen HN, GC ſchieben und bey jeder Polhöhe befeſtigen. Auf NC ſind die Stunden nach den Sinus verſus der Stundenbögen, auf HN und GC die Tangenten der Polhöhen, und auf RED ihre Secanten aufgetragen. Auf dem Bogen M finden

Fig. XI.

finden ſich die Zeichen und Grade des Thierkreiſes nach ihrer Declination. Die Dioptern FB ſind ebenfalls auf DR rechtwinklicht. Wird nun NC auf die Polhöhe geſchoben und befeſtigt, der Faden EP bey der Polhöhe E angeſchraubt, der Ort der Sonne M vertical über R geſtellt, und die Dioptern BF gegen die Sonne gerichtet, ſo ſchneidet der Faden in A die Stunde und Minuten ab. Die Verticallinie MR geht immer in K durch den Punct des Auf- und Unterganges der Sonne. KQ iſt der Sinus der Aſcenſionaldifferenz, QA der Sinus des Stundenbogens, von 6 Uhr an gerechnet, KRE = REA das Complement der Sonnenhöhe, RKA = KAE das Complement der Declination, und

$$RE : KA = \sin RKA : \sin KRE.$$

§. 37.

Alles dieſes geht nun bey dem vorhin (§. 25 ſeqq.) beſchriebenen Azimuthalſector auch an, und die Verwandlung fällt ſo aus, wie es die 12te Figur vorſtellt. Die Azimuthalſcale NC, welche nach den Sinus verſus des Azimuth eingetheilt iſt, läßt ſich an den beyden Rahmen HN, GC ſchieben, und bey der Polhöhe, die nach ihren Tangenten aufgetragen iſt, befeſtigen. Auf dem andern Sector DAF, ſind auf AR die Grade der Polhöhe nach ihren Secanten, und auf dem Bogen DF die Zeichen und Grade des Thierkreiſes Fig. XII.

nach ihrer Declination aufgetragen. Die Polhöhe fällt in R, und der Sector läßt ſich um dieſen Punct drehen, ſo wie die Dioptern AB ſich um ſein Centrum A drehen läßt. NC oder HG wird immer vertical geſtellt, und AB in B auf den Ort der Sonne gelegt, ſodann der ganze Sector DAF ſo gedreht, daß AB gegen die Sonne gerichtet ſey; und ſo wird die Schärfe AB auf NC den Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, abſchneiden.

§. 38.

Die Genauigkeit dieſer Inſtrumente hängt fürnehmlich von der Länge der Scale NC ab, weil ſich auf derſelben deſto kleinere Theile noch unterſcheiden laſſen, je länger ſie gemacht wird. Iſt dieſe Länge von einem Fuß, oder 1440 Decimaltheile von Linien, ſo wird in Q eine Minute Zeit noch die Gröſſe von drey ſolcher Decimaltheile haben, oder beynahe $\frac{1}{3}$ Linie groß ſeyn. Von Q gegen C und N werden ſie immer kleiner. Es iſt dieſes aber kein Fehler des Inſtruments, weil ſich die Zeit aus der Sonnenhöhe deſto minder genau finden läßt, je näher die Sonne bey dem Mittage iſt. Man ſetze

Fig. X.

Fig. II.

$$PZ = e$$
$$ZS = k$$
$$PS = c$$
$$ZPS = \omega$$

ſo haben wir die Gleichung

$$\cos k = \cos e . \cos c + \sin e . \sin c . \cos \omega$$

Wird

Wird nun e, c beſtändig angenommen, und k, ω differentiirt, ſo iſt

$$\text{ſin } k . dk = ſe . ſc . ſ\omega . d\omega$$

folglich iſt

$$d\omega = \frac{ſk}{ſc . ſe . ſ\omega} . dk$$

der Fehler in der Zeit, wenn d k der Fehler in der Höhe der Sonne iſt. Setzt man nun, die Höhe der Sonne werde mit dem Sector NEC gemeſſen, und CR ſey = 1, ſo iſt auf der Stundenleiter NC ein kleiner Theil der Zeit z. E. eine Minute deſto weniger zu erkennen, Fig. X.

1°. je kleiner QC = ſin e iſt,

2°. je ſchiefer der Faden EAP die Linie NC ſchneidet, folglich je kleiner ſin EAQ = ſin c iſt,

3. je mehr die Zeittheile in A kleiner ſind als in Q, folglich je kleiner ſin ω iſt.

Demnach wächſt aus dieſen Gründen die Schwürigkeit, einen kleinen Zeittheil auf NC zu erkennen, in zuſammengeſetzter Verhältniß von ſin c. ſin e. ſin ω. Dieſes iſt nun eben der Theiler der erſtgefundenen Formel

$$d\omega = \frac{ſk}{ſc . ſe . ſ\omega} . dk$$

Der Zähler iſt

$$ſk\, dk = -d \text{ coſ } k. = d \text{ ſin } MRD$$

und giebt folglich an, um wie viel der Perpendicul EP von der Verticale MR weggerückt wird, wenn man mit dem Inſtrument ſtatt

 der

der wahren Sonnenhöhe eine gröſſere nimmt. Da die Möglichkeit dieſen Fehler zu erkennen, mit deſſen Gröſſe zunimmt, ſo nimmt die Schwürigkeit, denſelben zu erkennen, in umgekehrter Verhältniß ab, und dieſes macht, daß $\mathfrak{ſ}k.dk$ die übrige Factoren $\mathfrak{ſ}c.\mathfrak{ſ}e\,\mathfrak{ſ}\omega$ nicht multiplicirt, ſondern dadurch getheilt wird. Da wir demnach die Formel

$$d\omega = \frac{\mathfrak{ſ}k.dk}{\mathfrak{ſ}c.\mathfrak{ſ}e.\mathfrak{ſ}\omega}$$

unmittelbar und ganz auf dem Inſtrumente finden, ſo ziehen wir die Folge daraus, daß es einerley iſt, ob man die Zeit in A obſervirt, oder ob man die Höhe der Sonne mit dem Sector CNR nimmt und daraus die Zeit berechnet.

§. 39.

Man muß ferner bey dieſen, und überhaupt bey allen gnomoniſchen Inſtrumenten, welche nach dem Ort der Sonne gerichtet werden müſſen, dieſen Ort genau wiſſen, und zwar nicht nur für die Mittagszeit, ſondern für die Stunde der Obſervation. Da man nun dieſe Stunde erſt durch das Inſtrument finden will, ſo kann man den Ort der Sonne anfangs ſo annehmen, wie derſelbe für die Mittagszeit aus den Aſtronomiſchen Tafeln berechnet wird, und damit ſehen, wie viel Uhr es ſeyn würde. Man ſucht ſodann den Ort der Sonne für dieſe Zeit, und ſtellt entweder die Obſervation aufs neue an,

an, oder giebt auch nur den Inſtrument die Lage, die es würde gehabt haben, wenn man gleich anfangs den wahren Ort der Sonne gebraucht hätte. So z. E. müſſen bey dieſer Veränderung die Dioptern B F unbeweglich bleiben, und nur der Sector N C R gedreht werden, bis der wahre Ort der Sonne in die Verticallinie M R trift. Uebrigens, wenn das Inſtrument groß genug iſt, daß ſich ſolche kleinere Veränderungen darauf bemerken laſſen, ſo muß man ebenfalls der Refraction Rechnung tragen, und dies geſchieht, wenn man nach geſchehener Obſervation die Dioptern ſo viel der horizontalen Lage näher rückt, als die Refraction beträgt.

V. Conſtructionen für die Sonnenhöhe.

§. 40.

Da bey dem erſtbeſchriebenen Sector der Winkel M R E der Höhe der Sonne, und E A Q den Abſtand der Sonne vom Pol gleich iſt, ſo darf man nur durch jede Zeit A eine Linie A E mit R M parallel ziehen, um die Höhe der Sonne E R M zu haben. Da nun M R allemal durch den Ort der Sonne M gezogen iſt, ſo wird die Höhe der Sonne für jeden Tag und Stunde ohne Mühe beſtimmt.

§. 41.

§. 41.

So leicht und allgemein nun dieſe Conſtruction iſt, ſo werde ich deſſen unerachtet noch eine andere herſetzen, welche zwar nicht ſo allgemein iſt, dabey aber dennoch etwas ſehr einfaches und leichtes an ſich hat. Man nimmt für den fürgegebenen Tag die Mittagshöhe und die Mitternachtstiefe der Sonne, oder welches einerley iſt, die Summe und Differenz der Aequatorshöhe und der Declination. Sodann, indem man in dem Circul AFBL den verticalen und horizontalen Diameter FL, AB gezogen, trägt man die Mittagshöhe aus B in D, die Mitternachtstiefe aus B in E, oder aus A in M, und zieht DG, EH mit dem Horizonte AB parallel. Auf GH beſchreibt man den Circul GJHP und theilt denſelben in 24 Stunden. Wird ſodann durch jede Stunde J die Linie PJK horizontal, oder mit AB parallel gezogen, ſo findet ſich BK, die dazu gehörende Höhe der Sonne, NGQ iſt die Tageslänge, und NHQ die Nachtlänge, DE die doppelte Höhe des Aequators, RJ der Sinus der Sonnenhöhe in beſtändiger Verhältniß des Products der beyden Chorden NJ, QJ. Denn da NQ die Chorde des Nachtbogens, NJQ der Hälfte deſſelben gleich, folglich NQ zu ſin. NJQ in beſtändiger Verhältniß iſt, ſo iſt auch

Fig. XIII.

$$NJ \backsim \sin NQJ$$
$$QJ \backsim \sin QNJ$$

Nun

Nun iſt

$$JR = NJ . \sin QNJ$$

demnach

$$JR \backsim NJ . QJ.$$

Es iſt aber, wenn man die wirkliche Glei-chung ſucht

$$\sin NJQ = NQ : GH$$

demnach $NQ = GH . \sin NJQ$

$$NJ = GH . \sin NQJ$$

$$JR = GH . \sin NQJ . \sin QNJ$$

Nun iſt, wenn man $AC = 1$ ſetzt

$$CG = \cos . (c - e)$$

$$CH = - \cos (c + e)$$

demnach

$$GH = \cos (c - e) - \cos (c + e) = 2 \sin c . \sin e$$

und daher der Sinus der Sonenhöhe

$$JR = 2 \sin c . \sin e . \sin NQJ . \sin QNJ$$

Es iſt aber, wenn J eine Nachmittagsſtunde iſt, der Bogen NPJ die Zeit vom Aufgange der Sonne, JQ die Zeit bis zum Untergang der Sonne. Demnach läßt ſich, wenn die Tageslänge bekannt iſt, die Höhe der Sonne durch die bloſſe Addition von vier Logarithmen berechnen. Da übrigens DE die doppelte Aequatorshöhe iſt, ſo iſt die Chorde DE für jede Declination der Sonne von beſtändiger Gröſſe, und eben die, ſo in der 9ten, 10ten und 11ten Figur CN iſt. Demnach läßt ſich auch aus dieſer 12ten Figur ein ähnliches Inſtrument herleiten.

VI.

VI. Anmerkungen über die Horizontal- und Verticaluhren.

§. 42.

Die Kunſt Sonnenuhren zu machen wird häufig auch von ſolchen Leuten ausgeübt, die von allen dazu gehörigen Gründen ſchlechthin nichts verſtehen. Unter andern Anläſſen, die ich gehabt habe, ohne Rückſicht auf ſo viele ſelbſt auf dem Lande anzutreffende Sonnenuhren dieſe Anmerckung zu machen, fande ich einen ſolchen Künſtler, der ungefähr wußte, daß bey dem Horizonthal- und mittäglichen Verticaluhren die Stunden nicht gleich nahe bey einander ſind. Dieſes brachte ihn, oder einen ſeiner Vorgänger, auf den Einfall aus A und B die Bögen B D, A D zu beſchreiben, jeden in ſechs gleiche Theile zu theilen, und aus der Mitte C die Stundenlinien in die Theilungspuncte zu ziehen, ſodann den Zeiger unter einen halben Winkel, das will ſagen, unter 45 Graden auf C D aufzurichten. So wird unſtreitig die Uhr leicht und geſchwinde gezeichnet, nur muß man für die Genauigkeit derſelben nicht gut ſtehen, weil dieſe eine beträchtliche Verbeſſerung der Methode erfordert, wenn man ſtatt der Tangenten oder Aequinoctiallinie, ſolche Circulbögen, dergleichen A D, BD ſind, dazu gebrauchen will.

Fig. XIV.

§. 43.

§. 43.

Man ziehe nemlich den Circul HDM, und Fig. XV. darin die beyden Diameter HM, VD perpendiculär. Den Circul HDM theile man in 24 gleiche Theile als Stunden. Sodann mache man VDC der Höhe des Aequators, und VDP der Hälfte deſſelben gleich, und aus dem Centro C beſchreibe man durch D den Circul ADE. Aus P ziehe man in jede Stunden des Circuls HDM blinde Linien, und wo dieſe den Circul ADE durchſchneiden, da ziehe man aus V Linien, welches die Stundenlinien der Horizonthaluhr für die Polhöhe DCV ſeyn werden.

§. 44.

Die Figur iſt eine Projection der Sphäre auf den Horizont, wenn das Aug im Zenith iſt. HDM iſt der Horizont, ADE der Aequator, P der Pol, V das Zenith, VF ein Verticalcircul, DG der Stundenbogen auf dem Aequator, oder die Zeit vom Mittage an in Grade verwandelt, GDF die Höhe des Aequators, demnach, weil der Triangel DFG in F rechtwinklicht iſt,

$$\cos GDF = \cot DG \cdot \tang DF$$

daher iſt DF der Stundenbogen, oder DVF der Stundenwinkel für die Horizontalſonnenuhr. Die blinden Linien PG ſind ſchlechthin nur, um den Aequator ADE nach dem Regeln der Projection in Grade einzutheilen.

§. 45.

§. 45.

Nimmt man zu dem Winkeln VDC, VDP ſtatt der ganzen und halben Aequatorshöhe, die ganzen und halbe Polhöhe, ſo erhält man ſtatt der Horizontaluhr eine mittagliche Verticaluhr. Dieſe Verzeichnungsart iſt dadurch geſchmeidiger und in allem eben ſo einfach als die gewöhnliche, weil man hier anſtatt einer geraden Aequinoctiallinie, welche für die Morgen- und Abendſtunden, gar zu ſehr verlängert werden muß, den Aequinoctialcircul ADE gebraucht.

§. 46.

Man kann ſich ferner eben dieſer Projectionsart bedienen, um eine Vorbereitung zu finden, nach welcher ſodann jede Horizontal- und Verticaluhren für jede Polhöhen, durch bloſſe Zeichnung eines halben Circuls gezeichnet werden könnten. Die Vorbereitung ſelbſt iſt folgende:

§. 47.

Fig. XVI. Aus dem Durchſchnitte der Perpendicularen ACB, DCE zieht man den Circul ABDE, und beſchreibt ſodann durch die Punct D, E Circulbögen, welche die Linie DE unter Winkeln von 15, 30, 45, 60, 75 Graden durchſchneiden. Es iſt klar, daß die Halbmeſſer dieſer Bögen Secanten dieſer Grade ſeyn, ihre Mittelpuncte auf AB liegen, und von C um die Tangenten dieſer Grade entfernt ſeyn werden. Dieſes iſt nun die Vorbereitung.

§. 48.

§. 48.

Sollte nun eine Horizontaluhr verzeichnet werden, ſo macht man A P der Polhöhe gleich, zieht P Q mit A B parallel, und beſchreibt aus der Mitte E den halben Circul P M K, ſo iſt K M die Mittagslinie, der Zeiger wird in K aufgerichtet, und die Durchſchnittspuucten 1, 2, 3 ꝛc. 11, 10, 9 ꝛc. geben die Stundenbögen der Horizontaluhr, wenn man aus denſelben gerade Linien in k zieht. Macht man hingegen M P der Höhe des Aequators gleich, ſo erhält man auf eben die Art eine mittägliche Verticaluhr.

§. 49.

Es ſey K das Zenith, P H Q M der Horizont, K Q der Halbmeſſer, K D werde der Tangente und K E der Cotangente der halben Aequatorshöhe gleich gemacht, ſo ſind D, E die beyden Pole, D N E ein Mittagskreis, M D N = M E N der Stundenwinkel, und M E die Polhöhe. Da nun in dem rechtwinklichten Triangel M E N Fig. XVII.

$$\sin EM = \cot MEN . \tang MN$$

ſo iſt M N der Stundenbogen, oder M K N der Stundenwinkel für die Horinzontaluhr. Man ſetze nun C A = 1, ſo iſt C K = dem Sinus der Polhöhe, K Q = K M deren Coſinus. Da nun vermög der Projectionsart, jede Mittagscircul E N D die Mittagslinie E D unter eben den Winkeln ſchneiden, unter welche ſie auf der

Sphäre den Mittagskreis ſchneiden, ſo ergiebt ſich hieraus die Conſtruction der Uhr, wie ſie in der 16ten Figur vorgeſtellet worden, wo die Buchſtaben A, B, C, D, E K, M, P, Q eben die Bedeutung haben, wie in der 17ten Figur.

§. 50.

Man findet ſehr häufig kleine Horizontaluhren, die man bey ſich tragen kann, und wo die Mittagslinie entweder durch den darauf gezeichneten Thierkreis, oder vermittelſt einer Magnetnadel gefunden wird. Solche Uhren ſind nun allerdings für eine gewiſſe Polhöhe, und dieſes mag der Grund ſeyn, warum Reiſende ſich lieber Aequinoctialuhren anſchaffen, welche auf jede Polhöhe können gerichtet werden. Man kann aber dieſen Vortheil auf eine eben ſo leichte Art bey jeder Horizontaluhr erhalten. Man ſetze z. E. die Uhr ſey für den 55ten Grad der Polhöhe gezeichnet, ſo wird ſie unter dieſer Polhöhe in der That eine horizontale Lage haben. Will man ſie aber unter einer andern Polhöhe z. E. unter dem 50ſten Grade gebrauchen, ſo muß man ſie gegen Mittag um 5 Grade erhöhen, damit der Zeiger einen Winkel von 50 Gr. mit dem Horizonte mache. Zu dieſem Ende kann das Plättgen
Fig. XVIII oder Täfelgen A C, auf welchem die Uhr verzeichnet iſt, vermittelſt eines Gewindes in A an ein anderes A B angeſchraubt werden. Um demſelben ſodann die behörige Erhöhung

zu

zu geben, wird in B ein Circulbogen, deſſen Centrum in A iſt, ſo angemacht, daß man ihn ſowohl legen als aufrichten kann. Oder man läßt durch C eine Stellſchraube auf B gehen, durch deren Umdrehen man A C nach Erforderniß erhöhen kann. Es iſt dabey möglich die Schraubengänge mit der Diſtanz A B ſo zu proportioniren, daß bey jedem Umgange der Schraube A C um einen Grad erhöht wird. Dieſes geſchieht, wenn A C ſo lang als $57\frac{3}{10}$ Schraubengänge genommen wird. Das leichteſte und aus andern Abſichten zugleich das vortheilhafteſte Mittel aber iſt das Unterſchieben eines rechtwinklichten Priſma D. Denn A C wird um deſto mehr erhöht, je näher D gegen A geſchoben wird. Wie weit aber das Priſma D an jedem Orte müſſe geſchoben werden, läßt ſich am bequemſten finden, wenn man auf dem untern Plättgen A B eine Landcharte verzeichnet. Denn ſo wird die Uhr auch von denen gebraucht werden können, die von der Polhöhe gar keinen Begrif haben.

§. 51.

Da die Höhe des Priſma D als beſtändig angeſehen wird, ſo iſt A D in Verhältniß der Cotangente des Winkels C A B. Da dieſe Cotangente unendlich wird, wenn C A D = 0 iſt, ſo thut man am beſten, wenn man dem Winkel C A B 5 Grade giebt, wenn D in B zu liegen kömmt, das will ſagen, die Son-

nenuhr wird für eine Polhöhe verzeichnet, die 5 Grade gröſſer iſt, als die gröſte, ſo man auf der Lancharte anbringen will. Man ſetze z. E. es ſolle der 55te Grad der Polhöhe in B fallen, welches ungefähr die nördliche Grenzlinie von Deutſchland iſt, ſo ſieht man die Länge A B als die Cotangente von 5 Graden an, und trägt nach gleichem Maaßſtabe die Cotangenten von 6, 7, 8, 9, 10, 11 ꝛc. Graden aus A gegen B, und nach eben dem Maaßſtabe erhält das Priſma D die Höhe von dem Halbmeſſer. Die Sonnenuhr auf dem obern Plättgen A B wird für den 60ſten Grad der Polhöhe verzeichnet. Die Grade der Länge bleiben hiebey willkührlich. Man kann ſie daher ſowohl nach der Breite der Sonnenuhr, als nach dem Diſtricte der Erdfläche richten, welches man auf die Landcharte bringen will. Man kann

Fig. XIX. aus der 19ten Figur ſehen, wie die Sache ausfällt. A D iſt der Halbmeſſer und zugleich die Höhe des Priſma, A B die Tangente von 85 Grad, und die übrigen Puncte der Scale A B ſind die Tangenten von 84, 83, 82, 81 ꝛc. Graden. Die Uhr A C iſt auf die Polhöhe 60 Grad gezeichnet, und daher iſt bey B der 55ſte Grad geſetzt, weil, wenn das Priſma in B untergeſtellt wird, die Fläche der Uhr um 5 Gr. erhöht, demnach der Zeiger um 5 Grad vertieft, daß will ſagen, auf die Polhöhe von 55 Grad gerichtet wird.

§. 52.

§. 52.

Es wird dem Leſer von ſelbſt beyfallen, daß die beyden Inſtrumente, ſo die 11te und 12te Figur vorſtellt, ebenfalls von der Art ſind, daß eine Landcharte darauf verzeichnet werden kann, und zwar deſto beſſer, weil die in GC und HN verzeichnete Grade der Breite oder Polhöhe weniger ungleich ſind. Fig. XI. et XII.

§. 53.

Wenn die Abweichung der Magnetnadel an einerley Ort beſtändig bliebe, ſo lieſſen ſich auf der Landcharte die ſogenannten Halleyſchen Linien zeichnen, um den Gebrauch der Sonnenuhr auch auf dieſe Art allgemein zu machen. Man kann aber auch auf der Uhr ſelbſt den Thierkreis zeichnen, und zwar für die Polhöhe von 60 Gr. für welche die Uhr horizontal iſt. Unter jeder andern Polhöhe giebt man durch Unterſchiebung des Priſma der Uhr die behörige Erhöhung, und dreht ſie ſodann herum, bis der Schatten auf den Ort der Sonne trift, um dadurch zugleich die Stunde und die Lage der Mittagslinie zu finden. Fig. XIX.

VII. Beſchreibung eines halben Circuls, um aus der Höhe der Sonne die Zeit zu finden.

§. 54.

Fig. XX. Wir haben dieſes Inſtrument oben (§. 19.) nur kurz angezeigt, und werden nun die Art daſſelbe zu verzeichnen noch angeben. Man beſchreibe auf einem Diameter C B, von beliebiger Länge, den halben Circul C N B, und mache den Winkel B C K der Polhöhe gleich. Aus dem Mittelpunct H ziehe man H F mit C K parallel, und aus C die Linie C F auf H F ſenkrecht. Man beſchreibe ſodann mit dem Halbmeſſer F H aus F den Circulbogen H Q, und theile denſelben in Stunden. Aus jeder Stunde ziehe man Perpendicularen auf H F, ſo wird man eben ſo viele Centra haben, aus welchen durch C Circulbögen C D gezogen werden müſſen, welche, wenn L C K = M C K der Obliquität der Ecliptic gleich gemacht wird, innert den Linien M C, L C ſodann gezogen werden. Dieſen Bögen werden die Stunden beygeſchrieben, und aus K gegen L und M die doppelte Grade der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreiſes aufgetragen. Endlich wird in C ein Faden C P mit einer Perl N und Gewichte P angehängt, und die Diopteren auf C B mit dieſer Linie parallel angemacht.

§. 55.

Soll nun damit die Stunde gefunden werden, ſo richtet man die Dioptern C B gegen die Sonne, und läßt den Faden frey hangen. Sodann ſchiebt man die Perl in N auf den 12ten Stundenkreis, und legt den Faden auf den Ort der Sonne, z. E. in CR, ſo fällt die Perl in S auf 4 Uhr 25 Min. Nachmittag, oder 7 Uhr 35 Min. Vormittag.

§. 56.

Dieſes Inſtrument hat zugleich den Vortheil, daß es nach geometriſcher Schärfe genau iſt, und auf eine ſehr einfache und leichte Art verzeichnet werden kann. Bey den Quadranten, die man in den meiſten Anweiſungen zur Gnomonic angiebt, fehlt es an beyden. Denn werden ſie durch lauter Circulbögen conſtruirt, ſo geht der geometriſchen Schärfe ab. Conſtruirt man ſie aber vermittelſt der für jede Stunden und Zeichen voraus berechneten Sonnenhöhen durch krumme Linien, ſo muß man dieſe von freyer Hand ziehen, und die Arbeit wird weitläuftig. In dem Gebrauche iſt gegenwärtiger halbe Circul von den Quadranten auch nur in ſofern verſchieden, daß man bey den Quadranten die Perl anfangs auf den Ort der Sonne ſchiebt, und ſodann die Höhe der Sonne ſucht, hier aber bey der Höhe anfängt, und dann die Perl aus N in S bringt.

VIII. Beſchreibung eines gleich=ſchenklichten Triangels, um aus der Sonnenhöhe die Stunden zu finden.

§. 57.

Fig. XXI. Man nimmt auf der verticalen Linie A E als einen Halbmeſſer an, und trägt die Sinus verſus der Stunden aus A aufwerts. Sodann nimmt man auf gleicher Scale die Tangente der Polhöhe als einen Halbmeſſer an, und trägt die Tangenten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreiſes aus E aufwerts und unterwerts. Endlich nimmt man auf eben der Scale die halbe Secante der Polhöhe als einen Halbmeſſer an, und trägt auf den beyden Schenkeln C D, C F die Secanten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreiſes aus C gegen D und F. Dieſe beyden Schenkel haben in C ein Gewinde wie die beyden Schenkel eines Proportionalcirculs. In D wird gleichfalls ein bewegliches Gewinde angebracht, ſo, daß ſich nicht nur CD an AD herumdrehen laſſe, ſondern daß der Mittelpunct des Gewindes D auf den ſowohl auf CD als auf AD gezeichneten jedesmaligen Ort der Sonne geſchoben werden könne. In F aber wird an dem Schenkel CF ein Stift angemacht, ſo, daß derſelbe ebenfalls auf den auf dieſem Schenkel gezeichneten jedesmaligen

Ort

Ort der Sonne geſchoben und befeſtigt werden könne. Die Dioptern können auf C D oder auf F C kommen, weil jeder dieſer Schenkel einerley Winkel mit dem Horizonte macht. Iſt nun das Gewind in D und der Stift in F auf den Ort der Sonne geſtellt, ſo rückt man den Stift F auf der Stundenlinie A B herauf oder herunter bis die Dioptern F C oder C D gegen die Sonne gerichtet ſind, alsdenn zeigt der Stift die Stunde und Minute, die zu finden war.

§. 58.

Es ſey, um dieſes zu beweiſen,

p die Polhöhe
d die Declination
h die Höhe der Sonne
ω die Stunde oder der Stundenbogen, von Mittag an gerechnet;

ſo iſt vermög der Conſtruction

$AE = 1$

$ED = \text{tang } d . \text{tang } p$

$CD = CF = \frac{1}{2} \sec d . \sec p$

$EF = \cos \omega$

$DCF = 2h$

$DF = 2DC . \sin h = \sec d . \sec p . \sin h$

Nun iſt

$DF = DE + EF$

folglich

$$\mathrm{sec}\,d \,.\, \mathrm{sec}\,p \,.\, \mathrm{sin}\,h = \mathrm{tang}\,d \,.\, \mathrm{tang}\,p + \mathrm{cos}\,\omega$$

oder, wenn man durch $\mathrm{sec}\,d \,.\, \mathrm{sec}\,p$ dividirt

$$\mathrm{sin}\,h = \mathrm{sin}\,p \,.\, \mathrm{sin}\,d + \mathrm{cos}\,p \,.\, \mathrm{cos}\,d \,.\, \mathrm{cos}\,\omega$$

Da dieſes die bekannte Gleichung zwiſchen der Polhöhe, Declination, Sonnenhöhe und Stundenbogen iſt, ſo iſt die Conſtruction diejenige, welche dieſe Gleichung erfordert.

Beyträge
zum Gebrauche
der
Mathematik
und
deren Anwendung
durch
J. H. Lambert.

Mit Kupfern.

Zweyter Theil
Zweyter Abſchnitt.

Berlin,
im Verlag der Buchhandlung der Realſchule,
1770.

XI.
Gedanken über die Grundlehren des Gleichgewichts und der Bewegung.

§. 1.

Man iſt überhaupt der Meynung, daß diejenigen Lehren, welche an Richtigkeit, Schärfe, Gewißheit und Augenſcheinlichkeit (euidenz) den geometriſchen, wo nicht durchaus gleich, jedennoch am nächſten kommen ſollen, die mechaniſchen ſind. Man hat daher ſchon längſten die Frage aufgeworfen: ob ſich die erſten Sätze der Mechanic nicht eben ſo nothwendig und a priori erweiſen laſſen, als es Euclid in Abſicht auf die geometriſchen gethan? Dieſe Frage läßt ſich auch dadurch noch gewiſſermaſſen rechtfertigen, weil man ſelbſt in der Meßkunſt, wenn von der Entſtehensart oder Erzeugung der Figuren die Rede iſt, Sätze zum Grunde legt, die von der Bewegung entlehnt ſind. So z. E. erklärt man die Entſtehung einer Linie durch das Fortflieſſen eines Puncts. Die Entſtehung eines Circuls durch das Herumdrehen einer geraden Linie um einen Punct ꝛc. Nun ſind zwar ſolche mechaniſche Ausdrücke in der theoretiſchen Geometrie fremde. Indeſſen kann man derſelben Tab. VI. VII.

ſelben dennoch nicht entbehren, ſobald man die Geometrie practiſch machen, oder auch nur die Möglichkeit der Figuren erweiſen will. Euclid gebraucht ſie zu dieſer letztern Abſicht, und da er voraus ſieht, daß ſich ohne die vorerſt erwieſene Möglichkeit der Figuren, von denſelben nichts categoriſches erweiſen läßt, ſo läßt er gleich auf die Grundſätze, ſeine Forderungen oder Poſtulata von Ziehung und Verlängerung gerader Linien und von Zeichnung eines Circuls folgen, und fängt ſodann ſeine Theorie mit zwoen Aufgaben an, um dadurch die Möglichkeit ſeiner folgenden Lehren feſte zu ſetzen.

§. 2.

Soferne man demnach in der Mechanic nur auf diejenigen Begriffe und Sätze ſehen wolte, die ſelbſt in der Geometrie gebraucht werden, ſo fern iſt es unſtreitig, daß die Mechanic mit der Geometrie, in Abſicht auf die Nothwendigkeit, Schärfe, Gewißheit und Augenſcheinlichkeit zu gleichen Schritten gehen würde. Allein dabey bleibt die Mechanic nicht ſtehen. In der Geometrie nimmt man die Bewegung, ohne auf etwas anders als auf die Direction und den durchlaufenen Raum zu ſehen. Dieſes iſt in der Mechanic nicht genug. Denn das wenigſte, was man noch mitnehmen muß, iſt die Zeit und Geſchwindigkeit. Und bleibt man bey dieſen vier Begriffen, ſo läßt ſich ohne alle Widerrede eine Theorie errichten,

richten, die der Meßkunſt nichts nachgiebt. Man vergleicht darin die Bewegung einzeler Puncte nach jeder beliebigen Direction und Geſchwindigkeit, welche man nach belieben annimmt und ändert, ohne darauf zu ſehen, woher beyde entſtehen, wenn die Bewegung in der That vorgeht. Man begnügt ſich dabey mit der an ſich ganz klaren Vorſtellung, daß wir uns in Gedanken von jedem Punct des Raumes in jeden andern nach jeder beliebigen Richtung und Geſchwindigkeit verſetzen können, ungefehr wie wir in Gedanken den Umriß jeder Figur durchlaufen. In ſo fern aber iſt dieſer erſte Theil der Mechanic, den wir die Phoronomie nennen können, eben ſo wie die Geometrie, und in eben dem Sinne, ſchlechthin nur ideal, weil alles dabey nur auf Vorſtellungen beruht.

§. 3.

Wolte man aber dabey verbleiben, ſo würde unſtreitig der Mechanic ihr weſentlichſter Theil fehlen. Man ſieht leicht, daß die Kräfte darinn betrachtet, und in jeden Abſichten mit einander verglichen werden müſſen. Und eben dieſes iſt es, worin die Vergleichung der mechaniſchen und geometriſchen Evidenz nicht mehr ſo leichte zu ſeyn ſcheint. Die Kräfte liegen nicht ſo vor Augen, wie die Figuren. In der Bewegung läßt ſich höchſtens nur ihre Wirkung ſehen, und auch dieſes nur zum Theil. Und bey dem Gleichgewichte, wo alles in Ruhe iſt,

würden

würden wir von dem Daſeyn wirkender Kräfte, kaum träumen, wenn wir nicht den Begrif der Kraft durch das Gefühl hätten. In der That verſichern wir uns auch nur dadurch, daß das, was wir bey dem Gleichgewichte eine Kraft nennen, im Stande iſt, eine Bewegung herfür zu bringen, wenn das Gleichgewicht gehoben wird.

§. 4.

Durchgehen wir in dieſer Abſicht die Geſchichte der Mechanic, ſo werden wir auch finden, daß eben daher, weil die Theorie des Gleichgewichtes näher an den Begrif gränzt, den wir unmittelbar durch das Gefühl von der Kraft haben, dieſe Theorie weit früher in Richtigkeit gebracht worden iſt, als diejenige, wo die Kräfte mit der Bewegung verglichen werden. Indeſſen, wenn ich ſage, ſie ſey in Richtigkeit gebracht worden, ſo verſtehe ich dadurch eben nicht, daß es auf eben die Art geſchehen ſey, wie **Euclid** die Geometrie in Richtigkeit gebracht hat. Es kann zwar ſeyn, daß verſchiedene Sätze der Meßkunſt anfangs durch einzelne Erfahrungen gefunden worden, und daß man erſt nachgehendes den Beweis, und beſonders den Beweis von ihrer Allgemeinheit geſucht hat; ſo, daß die Erfahrung eigentlich nur als ein Anlaß diente, auf den Satz aufmerkſam zu machen, und den Beweis dazu zu finden. In der Mechanic hingegen

gegen war die Erfahrung nicht nur durchaus der Weg, worauf man ihre Sätze fand, ſondern es kommen noch dermalen ſelbſt unter ihren erſten Sätzen ſolche vor, die man ihrer bisher angegebenen Beweiſe unerachtet, noch anſtehen könnte, für wahr anzuſehen, wenn man nicht wüßte, daß ſie durch die Erfahrung bewährt erfunden werden. Man darf ſich nur der Streitigkeiten erinnern, die in den neuern Zeiten über die Geſetze der Bewegung und das Maaß der Kräfte ſind geführt worden, um ſich zu verſichern, daß man eben dergleichen in der Geometrie haben müſte, wenn dieſe nicht evidenter wäre, als es bisher die Mechanic geweſen.

§. 5.

Hiebey iſt nun nicht die Frage, ob man ſtatt eines an ſich richtigen Beweiſes, nicht einen andern finden könne, der kürzer, netter, leichter oder auch noch klarer ſey? Dieſe Frage kann um deſto eher vorkommen, weil man nicht ſelten durch Umwege beweiſt, oder aus andern Umſtänden den Vortrag dunkler macht, als er ſeyn könnte und ſollte. Die Frage iſt, ob der Beweis in der That beweiſe, ob ſich der Satz in der That durchaus gedenkbar und verſtändlich machen und eben ſo durchaus erweiſen laſſe ꝛc. Denn was man hiebey erzwingen will, wird nicht erwieſen, ſondern höchſtens nur ſcheinbar gemacht. Die Scharfſinnigkeit

nigkeit artet in Spitzfündigkeit aus, welche das Irrige auf jede Sätze des Beweiſes unvermerkt vertheilt, und was nicht ſo vertheilt werden kann, in die Diſinitionen ſchiebt, damit ſich ſodann, was man daraus herleiten will, daraus herleiten laſſe. Und ſo iſt die Begierde einen Satz erwieſen zu ſehen, der feinſte Sophiſt, den man ſich gedenken kann. Man wird in den Streitſchriften über das Leibnitziſche Maaß der Kräfte, und ſo auch in denen über die Maupertuiſche actio minima ausnehmende Beyſpiele hievon finden. Man ſieht aber ſolche Sophismata nur alsdann ganz deutlich, wenn das, was in der Sache ſelbſt gedenkbar iſt, ein für allemal iſt ins Reine gebracht worden. Denn nur alsdenn ſieht man deutlich ein, wie man das, was vorhin über die Sache gedacht worden, oder was man geglaubt hatte, dabey zu denken, anders denken müſſe, damit es durchaus gedenkbar ſey. Uebrigens geſchieht es ſelten, daß die, ſo in der Streitigkeit verwickelt ſind, auf dieſe Spur kommen, zumal wenn ſie nicht geſonnen ſind, ihr Wort zurück zu nehmen.

§. 6.

Wenn aber auch alles, was man bisher in der Static oder Lehre vom Gleichgewichte, und in der Dynamic oder Lehre von den bey der Bewegung vorkommenden Kräften, durch die Erfahrung, als bewährt befunden, angeſehen werden

werden kann, ſo bleiben doch noch zwo Fragen zu erörtern. Die erſte betrift die Allgemeinheit, weil dieſe ſich, vermittelſt der Erfahrung, nur durch Induction erweiſen läßt. Und da unſere Erfahrungen niemals eine geometriſche Schärfe haben, ſo bleibt bey denen Sätzen, ſo wir daraus finden, immer noch der Anſtand, ob der Satz in Kleinigkeiten nicht Ausnahmen leide, ſo wie z. E. die Haarröhrgen bey dem waagrechten Stande flüßiger Materien kleine Ausnahmen machen, oder wie die Strahlenbrechung in der Luft den Weg des Lichtes ein wenig krümmet. Die andere Frage iſt, ob die mechaniſchen Sätze, ſo wie wir ſie durch die Erfahrung in der gegenwärtigen Welt finden, von der Einrichtung des Weltgebäudes abhängig, oder eben ſo wie die geometriſchen, für ſich nothwendig ſind; ſo, daß ſie, wo ſie vorkommen, nicht anders vorkommen können? Man ſieht leicht, daß wenn und wiefern letzteres ſtatt findet, die Mechanic eben ſo wie die Geometrie nothwendig und a priori erweisbar iſt. Man ſieht auch, daß wenn dieſe letztere Frage entſchieden iſt, die erſtere eben ſo weit erleichtert und entſchieden werde. Denn was man a priori erweiſen kann, geſchieht mit der Beſtimmung der Allgemeinheit und Schärfe. Soll nun dieſe zweyte Frage erörtert werden, ſo muß es immer ſo geſchehen, als wenn die Hauptſätze der Static und Dynamic noch erſt zu erfinden wären, und was die Erfahrung

davon angiebt, mag höchſtens als eine Veranlaſſung dienen, um zu ſehen, ob und wiefern es ſich a priori erweiſen laſſe. Man weiß überhaupt ſchon ſo viel, daß es hiebey auf einige wenige Sätze ankommt, daß man in der Static ganz ausreicht, wenn die Theorie des Hebels und der Zuſammenſetzung der Kräfte einmal erwieſen iſt, und daß man in der Dynamic ebenfalls nur die Entſtehung der Bewegung, vermittelſt der Kräfte, ins Reine bringen darf, um ſodann jedes übrige daraus zu folgern. Ich werde nun das, was ich bey dem Ueberdenken dieſer Theorien gefunden, hier vortragen, und hin und wieder auch mit anmerken, was mir bey einigen bisher gebräuchlichen Beweiſen minder einleuchtend, oder aus welchen Gründen es ſeyn mag, mangelhaft zu ſeyn vorgekommen.

Erſte Grundlehren der Static.

I. Der Begrif der Kraft.

§. 7.

Vor etwann 100 Jahren, oder beſſer zu ſagen, vor des Galilaei und Carteſii Zeiten, wäre es in einem Lehrbuche von der Static oder Hebekunſt kaum nöthig geweſen, ſich

ſich bey dem Begriffe der Kraft lange aufzuhalten. Dermalen aber wird es dadurch nöthiger, weil man nach Durchleſung alles deſſen, was darüber, und beſonders bey Anlaß der **Leibnitziſchen** und **Maupertuiſiſchen** Streitigkeiten, iſt geſchrieben worden, dieſen an ſich ganz einfachen Begrif bald nicht mehr zu finden weiß. Man hat ſeitdem bald aus jeden Modificationen der Kraft beſondere Kräfte gemacht, und daher **lebende** (vires vivas), **todte** (mortuas), **eingepflanzte** (inſitas), **beſchleunigende** (acceleratrices) ꝛc. Kräfte auf die Bahn gebracht. Und beſonders hat **Bilfinger** denſelben noch ſeine vires indifferentes, conſentientes, coincidentes, diſſentientes, repugnantes, disiunctas, parallelas, mixtas, puras &c. beygefügt. Zu dieſen kamen ſodann noch die actio, potentia, preſſio, ſollicitatio, der Impetus, Conatus, Impactus &c. lauter Begriffe, wozu die Sprache Wörter darbothe, die wegen des unbeſtimmten **Umfanges** der Bedeutung ſchwer zu beſtimmen, und daher deſto dienlicher waren, aus willkührlichen Definitionen derſelben Sätze herzuleiten, die man, ſo verwirt ſie waren, bewieſen haben wolte. Ich geſtehe gerne, daß ich die meiſten dieſer Wörter, der davon gegebenen Definitionen unerachtet, niemal recht habe verſtehen können. In der That konnte ich mir auch leicht gedencken, daß die erſten Grundſätze der Mechanic viel einfacher

ſeyn müſten, als daß ein ſolcher Kram von Wörtern und Definitionen dazu nöthig wäre. So z. E. begrif ich wohl, daß wenn das Product aus der Maſſe eines Körpers in das Quadrat der Geſchwindigkeit in der Mechanic gut gebraucht werden kann, daſſelbe Kürze halber mit einem Namen benennt werden könne. Und da die Wörter willkührliche Zeichen der Begriffe ſind, ſo verſtunde ich in ſofern auch, daß man dieſes Product eine **Kraft**, und wenn man ſo will, eine **lebende Kraft** nennen könne. Ob aber dadurch das Wort **Kraft**, oder auch das Wort **lebende Kraft** nicht vieldeutig wurde, das war eine ganz andere Frage, wobey mir immer vorkam, daß ſie bey genauerer Unterſuchung würde bejaht werden müſſen. Und ſollte dieſes ſeyn, ſo würde **Leibnitz** in allen Abſichten beſſer gethan haben, wenn er bemeldtes Product mit jedem andern Worte, nur nicht mit dem Wort Kraft, benennt hätte. Wenigſtens wäre dadurch alles, was bey dem darüber entſtandenen Gezänke **Wortſtreit** heiſt, ſchlechthin unterblieben, und die Frage, ob dieſes Product in allen Fällen beſtändig bleibe, und unter die Finalurſachen der Welt gerechnet werden müſſe, hätte eine ganz andere Geſtalt bekommen. Ueber die **Maupertuiſiſche** actio minima laſſen ſich ganz ähnliche Betrachtungen machen, und noch um deſto mehr, weil das Wort actio in der Sprache längſt ſchon vieldeu-

vieldeutig iſt, und z. E. in den Ausdrücken: actio radiorum ſolarium, actio ignis &c. eben ſo verwickelte Begriffe andeutet, als wenn man menſchliche Handlungen damit benennt, die aus ſehr vielen einfachern zuſammengeſetzt ſind.

§. 8.

Da übrigens dieſe Anmerkungen mehr die Dynamic als die Static betreffen, ſo ſind auch in der That die ſtatiſchen Begriffe weniger verwirrt worden. Man drückt darin das, was man Kraft und Laſt nennt, um es recht verſtändlich zu machen, durch Gewichte aus, und beſtimmt für jede Fälle die Verhältniſſe zwiſchen beyden. Indeſſen muß ich anmerken, daß man im Deutſchen das Wort Kraft gebraucht, da man hingegen im Lateiniſchen anſtatt *Vis* lieber *Potentia* ſagt. Man hat ſich aber an dieſen Unterſchied der Benennungen nicht zu kehren, theils weil dieſe Wörter in der Sprache ohnehin vieldeutig ſind, und daher in der Static nicht nach der Unbeſtimmtheit des Sprachgebrauches definirt werden müſſen, theils und fürnehmlich aber auch, weil in der Static die Sache ſelbſt vorgezeigt wird. Ueberdies werden darin Kraft und Laſt, nur Beziehungsweiſe, ſo genennt, weil in der That beyde Gewichte eine Kraft äuſſern. Dafern ſie aber ungleich ſind, ſo ſtellt man ſich vor, daß das Gröſſere vom Kleinern gehoben, oder

wenigſtens im Gleichgewicht gehalten werden müſſe; und in ſofern wird das Gröſſere die Laſt, das Kleinere aber die Kraft genennet, zumal da öfters ſtatt deſſelben die Kräfte der Menſchen oder der Thiere gebraucht werden.

§. 9.

Ungeachtet man aber den kleinern Gewichte deswegen den Namen der Kraft beylegt, weil daſſelbe das gröſſere im Gleichgewichte halten kann, ſo haben wir dennoch den Begrif der Kraft nicht von daher, ſondern viel unmittelbarer in uns ſelbſten. Wenn wir nemlich eine Laſt heben oder fortdrücken, ſo empfinden wir, daß wir etwas anwenden müſſen, und das, was wir empfinden, daß wir es anwenden muſten, nennen wir die Kraft. Wir empfinden eben dieſes, wenn wir z. E. einen Stein werfen wollen, und wir empfinden es deſto mehr, je ſchwerer derſelbe iſt, und je geſchwinder er ſoll geworfen werden.

§. 10.

Dieſe Beſchreibung, wie wir zu dem an ſich ganz klaren und einfachen Begrif der Kraft gelangen, mag nun um deſto eher ſtatt der Worterklärung dienen, weil wir von der Kraft eben ſo wenig eine Worterklärung geben können noch ſollen, als von dem Farben, dem Lichte ꝛc. In der That beſteht der Unterſchied auch nur darin, daß das Auge ſieht, was auſ-

ſer

ſer ihm iſt, da wir hingegen die Kraft in uns ſelbſt empfinden. Wir können daher die Kraft nicht vorlegen, wie die Farben, um ſie zu ſehen; ſie muß in uns empfunden werden. Und daher haben wir auch, um das Wort verſtändlich zu machen, nur anzuzeigen, wie man zu dieſer Empfindung gelange. Der Begrif, den uns ſodann dieſe Empfindung giebt, iſt eben ſo klar als der Begrif den uns das Anſchauen von den Farben giebt. Und ſo verſchwindet jeder Wortſtreit.

§. 11.

Ich erwähnte vorhin (§. 9.) mit gutem Vorbedachte, daß wir bey dem Werfen eines Steines empfinden, daß wir eben das anwenden müſſen, was wir bey Hebung eines Gewichtes anwenden, auch wenn wir daſſelbe ſchlechthin nur halten. Im letztern Fall währt die Kraft mit gleicher Stärke in einem fort, im erſtern aber empfinden wir derſelben allmählige Verſtärkung, und die Geſchwindigkeit, die daher erwächſt. Wenn man demnach je wolte die Dynamic auf die Erfahrung gründen, ſo würde die hier angeführte die unmittelbarſte ſeyn, weil wir dabey die Kraft, die wir anwenden, ihre allmählige Verſtärkung und die daher entſtehende Geſchwindigkeit unmittelbar ſelbſt empfinden. Und da dieſe Erfahrung uns offenbar angiebt, daß es einerley Kraft iſt, die im erſten Fall nur hält, zieht,

drückt ꝛc. im andern aber in Bewegung ſetzt; ſo ſieht man leicht, daß die bloß drückenden Kräften von den bewegenden Kräften nur in der Art, wie ſie angewandt werden, verſchieden ſind.

§. 12.

In der Static, wo nur das Gleichgewicht der Kräfte betrachtet wird, nimmt man die Kräfte ſchlechthin nur, ſofern ſie einen Druck äuſſern, und jede für ſich weder ſtärcker noch ſchwächer wird. Man nimmt dabey an, daß Kräfte gleich ſind, wenn ſie gleichen Druck äuſſern, das will ſagen, wenn eine ſtatt der andern geſetzt werden kann, daß eine Kraft doppelt, drey, vier, n fach ſo ſtark iſt, als eine andere, wenn ſtatt jener zwo, drey, vier, n von dieſen müſſen geſetzt werden. Ferner ſetzt man, daß zwo, drey, oder mehrere Kräfte, die auf ein Object, oder um es einfacher zu machen, auf einen Punct wirken, einander das Gleichgewicht halten, wenn dieſes Object oder dieſer Punct unbewegt bleibt, oder keiner von dieſen Kräften nachgiebt. Da dieſe Sätze mit dem Begrif der Kräfte in unzertrennlicher Verbindung ſind, ſo werden ſie mit demſelben eben ſo vorausgeſetzt, wie man in der Geometrie den Begrif des Raums und die damit verknüpften Grundſätze voraus ſetzt. Und in ſofern,

ſofern, ſage ich, daß ſich die Static eben ſo nothwendig wie die Geometrie a priori erweiſen laſſe. Ich werde zu dieſem Ende gegenwärtigen Abſchnitt mit folgendem Lehrſatze beſchlieſſen, weil er eigentlich noch hieher gehört.

§. 13.

Wenn zwo gleiche Kräfte in gerader Linie A B, C B gegen einander auf ein Object B wirken, ſo halten ſie einander das Gleichgewicht. Fig. I. Man ſetze, nicht, ſo wird das Object der einen Kraft, z. E. der Kraft A nachgeben, und gegen D fortgedrückt werden. Da nun die Kraft C eben den Druck äuſſert, ſo wird B auch gegen E fortgedrückt. Demnach iſt es in D und E zugleich. Da nun dieſes ungereimt iſt, ſo geht das Läugnen des Schlußſatzes nicht an, demnach halten die beyden Kräfte einander das Gleichgewicht.

II. Die unbiegſame Linie.

§. 14.

Wie man in der Geometrie gerade Linien gebraucht und dabey anfängt, ſo gebraucht man dieſelben in der Static ebenfals, jedoch mit dem Zuſatze, daß ſie unbiegſam (linea inflexilis) ſey. Und da wo man die Kräfte durch Gewichte vorſtellt, fügt man noch bey, daß dieſe Linie ohne Schwere (ex-

pers grauitatis) ſey. Wir könnten allgemeiner ſetzen, daß ſie ohne Maſſe ſeyn müſte, wenn nicht dieſes ſchon mit zu dem Begrif einer mathematiſchen Linie gehörte, als welche, da ſie ohne Breite und ohne Dicke iſt, mit keiner Maſſe ausgefüllt ſeyn kann. Der Grund, warum man ſo ſtrenge verfährt, iſt weil man vermittelſt einer ſolchen Linie die Wirkung mehrerer Kräfte unter einander vergleichen will, und da muß die Linie nicht durch ihre eigene Maſſe oder Schwere ein Hinderniß abgeben. Daß ſie unbiegſam ſeyn müſſe, nimmt man in der Static ebenfalls aus guten Gründen an. Durchgeht man aber die meiſten Staticken, ſo findet man nicht, daß der Einfluß, den dieſe Bedingung in die Beweiſe ihrer Lehrſätze hat, in denſelben behörig ausgedrückt wäre. Ich werde demnach bemüht ſeyn, dieſen Mangel zu erſetzen, um das, was dieſe Unbiegſamkeit auf ſich hat, deutlich zu machen. Der erſte von den dahin gehörigen Lehrſätzen iſt folgender:

§. 15.

Fig. II. **Es ſey A B eine dergleichen unbiegſame Linie, deren Mitte C ein unbeweglicher Punct ſey, oder welches hier einerley iſt, auf einem unbeweglichen Punct liege. Man ſetze nun gegen die beyden Endpuncte A, B drücken zwo gleiche Kräfte nach der perpendiculairen Richtung D A, E B,**

EB, ſo ſage ich, dieſe Kräfte halten einander das Gleichgewicht, das will ſagen, die Linie bleibe in unveränderter Lage. (§. 12.) Wird dieſes geläugnet, ſo ſetze man, die Linie verändere ihre Lage, ſo, daß z. E. der Punct A in G fortgedrückt werde. Da nun aus gleichem Grunde der Punct B in F gedrückt wird, der Mittelpunct C aber, vermög der Vorausſetzung, unbeweglich iſt, ſo wird die Lage der Linie AB nunmehr GCF, demnach die Linie gebogen ſeyn. Dieſes iſt aber der Vorausſetzung zuwider. Demnach geht das Läugnen der Folge nicht an. Und ſo ſind die Kräfte im Gleichgewichte.

§. 16.

Wolte man hiebey die Linie ungebogen ſeyn laſſen, ſo wird eben ſo bewieſen, daß ſie zugleich die Lage GH und die Lage FJ haben, folglich an zweyen Orten zugleich ſeyn müſte. Welches nicht bloß etwann der Vorausſetzung zuwider, ſondern ſchlechthin ungereimt ſeyn würde.

§. 17.

Wolte man endlich um auch dieſem auszuweichen, ſetzen, die Lage der Linie werde GKF ſeyn, ſo wird der Mittelpunct C in K kommen, und folglich, der Vorausſetzung zuwider, bewegt werden.

§. 18.

Ich häufe übrigens dieſen dreyfachen Beweis unter andern auch deswegen hier auf, weil der Lehrſatz, und beſonders der Archimediſche Beweis dem Herrn von Leibnitz Anlaß gegeben, ſeinen zureichenden Grund als ein Principium in der Weltweisheit anzubringen, und dem Grunde des Widerſpruches theils entgegen, theils an die Seite zu ſetzen. Man ſieht aus allen drey Beweiſen, daß das Gegentheil des Satzes auf Widerſprüche gebracht wird, und daher der Satz nicht unter die contingenten Wahrheiten gehört, die man allein aus dem zureichenden Grunde herleiten zu können glaubt.

§. 19.

Dieſe drey Beweiſe beruhen nun ſämtlich auf der Unbiegſamkeit der Linie A C B. Es iſt aber dieſes nicht der einige Gebrauch, den man davon machen kann. Der andere Gebrauch, den wir noch anzugeben haben, iſt ungleich erheblicher. Er gründet ſich darauf, daß, indem die beyden Kräfte in A und B drücken, es eben ſo viel iſt, als wenn eine doppelt ſo groſſe Kraft in C drückete. Dieſes würde nicht ſeyn, wenn die Linie biegſam wäre, weil ſodann von beyden Kräften ein Theil darauf würde verwendet werden, um die Linie zu biegen, oder wenn dieſe, ohn alle Verwendung einiger Kraft, biegſam iſt, ſo

würde

würde dieſelbe gebogen, ohne daß der Punct C den geringſten Druck auszuhalten hätte. Läßt man aber die Linie ſchlechthin unbiegſam, ſo hat der Punct C weder mehr noch minder Druck auszuhalten, als er von einer Kraft auszuhalten hat, welche ſo groß als die Summe beyder Kräfte D, E iſt. Denn ſetzt man mehr, ſo iſt offenbar in der Wirkung etwas, das in der Urſache nicht iſt. Setzt man weniger, ſo geht der Urſache etwas ab, daß auf nichts verwendet wird.

§. 20.

Man ſetze aber, es drücken gegen die unbiegſame Linie GH in A und D zwo gleiche Kräfte, die wir jede = 1 ſetzen wollen, ſo muß denſelben in der Mitte C eine Kraft = 2 entgegen geſetzt werden, um das Gleichgewicht zu halten. Wo dieſes nicht wäre, ſo müſte die Kraft in C entweder gröſſer oder kleiner ſeyn. Wir wollen ſie z. E. kleiner und folglich = 2 — α ſetzen. Wird demnach in C eine Kraft = 2 — α angebracht, ſo iſt, dieſer Hypotheſe zufolge, die Linie in Ruhe, und jeder Punct derſelben ſo gut als unbeweglich. Man nehme nun die Puncte E, F von C doppelt ſo weit entfernt als die Puncte A, D ſind. Wolte man demnach jede der Kräfte A, D halbiren, und in jedem Punct E, F eine Hälfte, in B aber zwo Hälften anbringen, ſo würde, eben der Hypotheſe zufolge, das Gleichgewicht gehoben. Fig. III.

Denn

Denn dieſe ſo vertheilte Hälften wirken nun nicht mehr als wenn in A und D zwo Kräfte $= 1 - \frac{1}{2}\alpha$ wären. Man muß demnach dieſe Hälften um einen Theil, den wir $= \beta$ ſetzen wollen, verſtärken, wenn anders das Gleichgewicht bleiben ſolle. Demnach wird in den Puncten E, F eine Kraft $= \frac{1}{2} + \beta$, und in B eine Kraft $= 1 + 2\beta$ angebracht. Man nehme nun wiederum die Puncte G, H doppelt, ſo weit von C entfernt, als E und F ſind. Und da wird, wenn man die Kräfte in E und F wegnimmt, in den Puncten G, H mehr als ihre Hälfte, und in B mehr als zwo von ihren Hälften angebracht werden müſſen, wenn anders das Gleichgewicht bleiben ſolle. Es seyn demnach in G und H die Kräften $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta + \gamma$ und in B $= \frac{1}{2} + \beta + 2\gamma$, ſo werden nun in B die Kräfte $= (1 + 2\beta) + (\frac{1}{2} + \beta + 2\gamma)$ ſeyn. Da man nun auf dieſe Art immer fortfahren kann, doppelt entferntere Puncte zu nehmen; ſo iſt klar, daß wenn dieſes unendlich fortgeſetzt wird, in B die Kräfte

$$\begin{array}{l} + 1 + 2\beta \\ + \frac{1}{2} + \beta + 2\gamma \\ + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta + \gamma + 2\delta \\ + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \delta + 2\varepsilon \\ + \&c. \end{array}$$

ſeyn werden, deren Summe $= 2 + 4\beta + 4\gamma + 4\delta +$ &c. iſt. Dieſe Summe iſt nun, auch, ohne Rückſicht, auf die äuſſerſten Puncte, an ſich ſchon gröſſer als 2, und um ſo

ſo viel mehr groͤſſer als die in C angebrachte Kraft $= 2 - \alpha$. Demnach koͤnnen beyde einander nicht gleich ſeyn, dafern man nicht $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon =$ &c. $= 0$ ſetzt. Da nun erſteres das Gleichgewicht erfordert, ſo muß auch letzteres ſeyn. Demnach iſt es falſch, daß in C eine kleinere Kraft als $= 2$ erfordert werde. Daß aber auch keine groͤſſere erfordert werde, leitet ſich daher, weil man bey dieſer Vorausſetzung die Gleichung $2 + \alpha = 2 - 4\beta - 4\gamma - 4\delta -$ &c. erhalten wuͤrde, welche ebenfalls nicht angeht, dafern man nicht $\alpha = \beta = \gamma = \delta =$ &c. $= 0$ ſetzt. Auf dieſe Art erhaͤlt man nun den Vortheil, daß, wo an einer unbiegſamen Linie zwo gleiche Kraͤfte angebracht ſind, wie z. E. in A und D, man ſtatt derſelben in der Mitte B eine doppelt ſo groſſe anbringen kann; und hinwiederum, daß man jede Kraft B wegnehmen, und ſtatt derſelben in zween von B gleich entfernten Puncten z. E. in A und D halb ſo groſſe Kraͤfte kann anbringen, ohne daß das Gleichgewicht veraͤndert, oder die Linie GH verruͤckt oder bewegt werde.

III. Die Dimenſionen der Kraft.

§. 21.

Man kann den Druck, den eine Kraft aͤuſſert, in verſchiedenen Abſichten betrachten, je nachdem dieſelben auf einen Punct, oder

auf

auf eine Linie, oder auf eine Fläche, oder endlich auf einen ganzen körperlichen Raum wirkt. Die Wirkungen ſelbſt ſind aber unſtreitig Heterogen, und es gebraucht daher einige Vorſichtigkeit, wenn man ſie unter einander vergleichen will. Man ſetze z. E. eine Kraft wirke auf eine ganze Linie, ſo wirkt ſie unſtreitig auch auf jeden Punct derſelben. Beyde Wirkungen aber ſind der Dimenſion nach verſchieden. Denn wenn man die ganze Wirkung auf die Linie, durch eine Linie ausdrückt, ſo wird die Wirkung auf einen Punct nicht durch eine Linie, ſondern nur durch einen Punct ausgedrückt werden können. Und hinwiederum, wenn man die Wirkung auf einen Punct durch eine Linie vorſtellt, ſo muß die Wirkung auf die ganze Linie durch einen Flächenraum, und aus gleichem Grunde die Wirkung auf eine Fläche durch einen körperlichen Raum, und ſo endlich auch die Wirkung auf einen körperlichen Raum durch die vierte Dignität vorgeſtellt werden. Das will nun ſagen, daß die Dimenſionen der Kraft, zugleich mit den Dimenſionen des Objectes zunehmen, worauf dieſelbe wirkt.

§. 22.

Man kann ſich hiebey ferner gedenken, daß der Druck, den die Kraft auf jeden Punct äuſſert, entweder bey allen durchaus gleich ſey, oder daß ſie nicht durchaus gleich, oder gar

auch bey jedem Punct gröſſer oder kleiner ſey. Man kann zum Unterſchiede im erſten Fall die Kraft **gleich vertheilt**, im andern aber dieſelbe **ungleich vertheilt** nennen. Es iſt für ſich klar, daß der erſte Fall unendlich viel einfacher iſt als der andere, und daß man dabey gewinnt, wenn man bey dem erſten anfängt, und ſodann Mittel findet, den andern auf denſelben zu reduciren.

§. 23.

Ehe wir aber dahin fortſchreiten, müſſen wir noch anmerken, daß wir dieſe verſchiedene Dimenſionen der Kräfte noch auf eine andere Art in Vergleichung bringen können. Es iſt nemlich möglich, daß wir eben die Kraft, die zum Exempel auf eine ganze Linie vertheilt war, als auf einen einigen Punct gerichtet, anſehen können. Und da wird diejenige, ſo vorhin auf eine ganze Fläche vertheilt war, nunmehr auf eine Linie, und die, ſo auf einen körperlichen Raum vertheilt war, nun nur auf einen Flächenraum vertheilt. Dadurch geht aber offenbar an ihren Dimenſionen nichts ab, ungeachtet die Dimenſionen des Objectes, jede um eins, vermindert werden. Denn ſo lange z. E. die Kraft auf die ganze Linie vertheilt war, wirkte ſie zwar auch auf jeden Punct, aber mit einer blos linearen Wirkung. Wird ſie aber ganz auf einen Punct gerichtet, ſo iſt die Wirkung auf denſelben nun nicht mehr linear,

ſondern ſie muß eben ſo, wie vorhin, durch einen Flächenraum vorgeſtellt werden, weil ſie, vor wie nach, von zwoen Dimenſionen iſt. So ſehr ſie nun, als auf einen Punct gerichtet, angeſehen wird, iſt ſie im Grunde betrachtet, dennoch als eine Kraft anzuſehen, die auf eine ganze Linie wirkt, wenn ſie nicht nach dieſen relativen, ſondern nach ihren abſoluten Dimenſionen betrachtet wird. Denn auch nur mit ſolchen Kräften läßt ſie ſich addiren und ſubtrahiren. Wohin aber eine ſolche bloß ideale Reduction dienen könne, wird ſich aus folgenden Lehrſätzen ſehen laſſen.

§. 24.

Fig. IV. Es ſey A B eine unbiegſame Linie, C deren Mitte. Auf die Linie drücke eine durchaus gleich vertheilte Kraft, und der Druck auf jeden Punct P werde durch die Linie P p vorgeſtellt, ſo wird erſtlich der Flächenraum des Rectangels A a b B die ganze Kraft vorſtellen. Sodann, ſage ich, daß, wenn eine gleiche Kraft bey dem Punct C angebracht wird, welche aufwerts drücke, ſo werde die Linie unbewegt bleiben, oder es werde die vertheilte Kraft der auf den Punct C wirkenden das Gleichgewicht halten. Man nehme jede zween Puncten P, Q von C gleich entfernt an, ſo läßt ſich vermög des §. 20. den beyden Kräften P p, Q q in C eine Kraft

$= \mathrm{P\,p}$

$= Pp + Qq = 2 Pp$ entgegen ſetzen, welche denſelben das Gleichgewicht hält. Da nun dieſes für jede Puncte P, Q ſtatt hat, ſo wird die Linie ebenfalls im Gleichgewicht bleiben, wenn eine der ganzen Kraft A a b B gleiche Kraft in C angebracht wird. Es iſt für ſich klar, daß wenn man dieſe ganze Kraft ebenfalls durch eine Linie CD vorſtellen will, dieſe Linie mit den Linien Aa, Pp, Qq, Bb nicht mehr einerley Einheit habe, ſondern erſtere von zwo Dimenſionen, letztere aber von einer Dimenſion iſt. Denn der Kraft A a b B läßt ſich in C keine bloß lineare Kraft, dergleichen Aa, Pp &c. ſind, entgegen ſetzen. Sie würden immer von ungleicher Dimenſion ſeyn.

§. 25.

Man kann auch, um ſich dieſes noch deutlicher zu machen, für jede Puncte P, C die Diſtanz $CM = CP = CQ$ machen, und dadurch jedem Punct M der Linie CD eine Kraft beylegen, welche $= Pp + Qq = 2 Pp$ iſt. Macht man daher durchaus $Mm = Mn = Pp$; ſo wird, wenn $CD = CA = CB$ gemacht worden, das Rectangel EFGH die ganze Kraft der Linie CD vorſtellen, da die Kraft jedes Puncts $M = mn = Pp + Qq$ iſt. Denn man ſieht leicht, daß wenn die ganze Kraft A a b B durch eine Linie CD vorgeſtellt wird, ſodenn jedem Punct M eine lineare Kraft gegeben wird. Da nun Fig. V.

 CD =

CD = CA = CB gemacht worden, ſo entſpricht jeden Puncten P, Q ein Punct M, deſſen Kraft = m M m denen beyden Kräften P p + Q q, ſofern dieſe ihren gemeinſamen Druck in C äuſſern, (§. 20.) das Gleichgewicht hält. Daher hält auch die ganze Kraft EGHF der ganzen Kraft AabB, die ihren Druck in C vereinigt, das Gleichgewicht.

§. 26.

Fig. VI. Man ſetze nun eine rectanguläre Fläche ABDE, deren Mittelpunct C iſt. Auf dieſelbe drücke eine durchaus gleich vertheilte Kraft, ſo läßt ſich derſelben in dem Mittelpunct C eine gleichgroſſe Kraft von gleicher Dimenſion entgegen ſetzen, und beyde werden einander das Gleichgewicht halten. Man ziehe durch C jede beliebige gerade Linie FCG, ſo wird vermög der Natur der Rectangel FC = CG ſeyn. Demnach läßt ſich die auf FG wirkende Kraft, als in C vereinigt, anſehen. (§. 24.) Da nun dieſes für jede Linie FG ſtatt hat, ſo wird auch die auf die ganze Fläche wirkende Kraft, als in C vereinigt, angeſehen werden können. Demnach läßt ſich derſelben in C eine Kraft von gleicher Gröſſe und Dimenſion entgegen ſetzen, und ſo werden beyde im Gleichgewichte ſeyn. (§. 15.)

§. 27.

Es iſt für ſich klar, daß eben dieſes bey jeden Flächen ſtatt findet, die einen Mittelpunct, das will ſagen, einen ſolchen Punct C haben, welcher jede durch dieſelben bis an beyde Ende des Umkreiſes F, G gezogene Linie F C G in zween gleiche Theile theilt, dergleichen z. E. reguläre Vierecke, Sechsecke, Achtecke ꝛc. der Circul, die Ellipſe ꝛc. ſind.

§. 28.

Uebrigens verſteht ſich von ſelbſt, daß ſolche Flächen, eben ſo wie vorhin die Linien als unbiegſam angeſehen werden. Und eben ſo iſt kaum nöthig zu erinnern, daß die Kraft als auf dieſelben ſenkrecht drückend genommen worden, ungeachtet das bisher geſagte auch bey dem ſchiefen Drucke ſtatt findet, ſo lange derſelbe durchaus parallel, und folglich auf jede Puncte der Linien und Flächen gleich ſchief iſt. Denn welcher Unterſchied auch immer zwiſchen dem ſenkrechten und ſchiefen Drucke ſeyn mag, ſo kann man deſſen unerachtet annehmen, daß jede gleiche und gleich ſchief drückende Kraft, gleichen Druck äuſſere, und folglich in den vorhin angeführten Fällen, das Gleichgewicht dennoch bleibe. Indeſſen müſſen wir doch ſagen, daß dieſes als einen Grundſatz nur für den Fall zugegeben werden kann, wo die gleich ſchiefe Richtung der Kraft auf beyden Sei-

Fig. VII. ten A C, C B des Mittelpuncts C nicht parallel, ſondern nach den Linien a A, c C und b B, d C einander entgegen gerichtet ſind. Denn in der That iſt auch nur in dieſem Fall auf beyden Seiten des Puncts C alles einerley. Der einige Fall, der ſich nächſt dieſem noch ohne fernere Umſtände für ſich betrachten läßt, iſt derjenige, wo der Neigungswinkel c C A = o wird; das iſt, wo die Kraft zwar auf jeden Punct der Linie A B, aber durchaus in der Direction der Linie ſelbſt wirkt.

§. 29.

Hiebey iſt erſtlich für ſich klar, daß die Kraft, vor wie nach, von zwoen Dimenſionen bleibt. Sodann kann, um derſelbe das Gleichgewicht zu halten, in jedem Punct der Linie eine Kraft von gleicher Gröſſe und Dimenſion, aber in entgegengeſetzter Richtung angebracht werden, und das Gleichgewicht wird bleiben. Es verſteht ſich für ſich, daß hier die Unbiegſamkeit der Linie zugleich den Begrif in ſich ſchieußt, daß dieſelbe, weder auseinander gedehnt, noch durch das Zuſammendrücken verkürzt werden könne, daß ſie folglich eine abſolute Steifigkeit habe. Denn wird die das Gleichgewicht haltende Kraft in B angebracht, und die Linie lieſſe ſich zuſammendrücken, ſo würde ein Theil der Kraft darauf verwendet. Eben ſo, wenn die das Gleichgewicht haltende Kraft in jedem andern Punct P angebracht

wird,

wird, ſo würde A P zuſammengedrückt, P B aber ausgedehnt, und in beyden Abſichten gienge das Gleichgewicht verlohren. Dieſe Steifigkeit aber vorausgeſetzt, ſo kann der Punct P auch auſſer dem Theil der Linie ſeyn, auf welchen die auf jede Puncte derſelben vertheilte Kraft wirkt. Man ſetze z. E. dieſe Kraft wirke auf jede Puncte der Linie A C, ſo läßt ſich in jedem Punct P eine Kraft von gleicher Dimenſion und Gröſſe, aber in entgegengeſetzter Richtung anbringen, und dieſe wird der auf A C wirkenden Kraft das Gleichgewicht halten.

§. 30.

Man gedenke ſich nun eine ſolide Sphäre, und auf jeden Punct derſelben wirke eine gleich vertheilte Kraft, in durchaus paralleler Richtung; ſo laſſen ſich aus jedem Punct der der Kraft entgegen gekehrten halben Oberfläche der Sphäre, Linien gedenken, die mit der Richtung der Kraft parallel laufen. Und die Kraft, ſofern ſie auf jede Puncte einer ſolchen Linie wirkt, läßt ſich als auf einen einzeln Punct derſelben wirkend gedenken. Man nehme für dieſen Punct denjenigen an, wo die Linie von der Fläche durchſchnitten wird, welche durch den Mittelpunct der Sphäre und ſenkrecht durch die Richtungslinien der Kraft geht. Wo nun dieſer Punct hintrift, da liegt denſelben ein anderer in gleicher Entfernung vom Mittelpunct gegenüber,

in welchem eine gleich groſſe Kraft vereinigt iſt. Da ſich nun ſtatt dieſer beyden Kräfte eine doppelt ſo groſſe im Mittelpunct anbringen läßt, und eben dieſes für jedes Paar correſpondirender Puncte gilt, ſo folgt daraus, daß die ganze Kraft, ſo auf jede Puncte der Kugel wirkt, ſich als ein Mittelpunct derſelben vereinigt gedenken laſſe. Einen ähnlichen Beweis findet man für jede Körper die einen Mittelpunct haben, der nemlich jede durch denſelben beyderſeits bis an den Umkreiß, oder die Oberfläche gezogene Linie in zween gleiche Theile theilt. Ich begnüge mich aber dieſes nur überhaupt anzuzeigen, um dadurch anzugeben, wie weit ſich das Vertheilen und Vereinigen der Kräfte ausdehnen läßt, und wie man dabey der verſchiedenen Dimenſionen Rechnung zu tragen hat.

IV. Der Hebel.

§. 31.

Fig. VIII. Es ſey nun wiederum eine unbiegſame Linie AB. Auf dieſelbe drücken auf beyden Seiten und in entgegengeſetzter Richtung, gleiche und durchaus gleich vertheilte Kräfte, die wir, weil ſie auf jeden Punct $= A\alpha = Aa$ ſind, durch den Flächenraum der Rectangel AabB, $A\alpha\beta B$ vorſtellen können: ſo iſt erſtlich für ſich klar, daß ſie einander das Gleichgewicht

gewicht halten, und die Linie A B unbewegt bleiben werde. Da ſich die auf jeden Punct wirkende Kraft als für ſich wirkend gedenken läßt, ſo können wir z. E. die geſamte herunter drückende Kraft A a b B durch Ziehung einer jeden beliebigen Linie E e als in zwo Kräfte A a e E und E e b B getheilt, oder aus zwo ſolchen Kräften beſtehend anſehen. Man nehme nun zwiſchen A E den Mittelpunct H, und zwiſchen E B den Mittelpunct F, ſo läßt ſich nach Anleitung des vorhergehenden Abſchnittes gedenken, daß anſtatt dieſer beyden auf A E, E B vertheilten Kräfte, zwo denſelben der Gröſſe und Dimenſion nach gleiche Kräfte auf die Puncte H, F wirken, und das Gleichgewicht eben ſo wie vorhin erhalten. Auf eben die Art wird ſich die ganze aufwerts drückende Kraft A α β B als in den Mittelpunct C vereinigt gedenken laſſen.

§. 32.

Nun iſt die Frage, die auf die drey ungleich entfernte Puncte E, C, F drückende und ebenfalls ungleiche Kräfte mit den Entfernungen E C, C F zu vergleichen. Dieſes wird deſto leichter geſchehen können, weil die drey Rectangel A a e E, E e b B, A α β B, deren Raum das Maaß dieſer drey Kräfte iſt, gleiche Höhe haben, und daher ſchlechthin in Verhältniß ihrer Länge ſind. Nun iſt

$$HF = HE + EF = \tfrac{1}{2}AE + \tfrac{1}{2}EB = \tfrac{1}{2}AB = AC$$

Demnach da HF und AC den Theil HC gemeinſam haben, ſo bleibt, wenn man dieſen von beyden wegnimmt,

$$AH = CF$$

Eben ſo wenn man von HF und CB den beyden gemeinſamen Theil CF wegnimmt, bleibt

$$HC = FB.$$

Es ſind aber HC und CF die Entfernungen der Puncte H, F von den Mittelpunct C; hingegen ſind FB und AH die Hälften der auf F und H concentrirten Kräften, die wir Kürze halber F und H nennen wollen. Da demnach

$$\tfrac{1}{2}F = HC$$
$$\tfrac{1}{2}H = CF$$

iſt; ſo iſt

$$HC : CF = \tfrac{1}{2}F : \tfrac{1}{2}H = F : H$$

das will ſagen: **die auf die Puncte H und F drückende Kräfte AaeE, EebB ſind in umgekehrter Verhältniß der Entfernung dieſer Puncte H, F vom Mittelpunct C.**

§. 33.

Hinwiederum, da die aufwerts drückende Kraft A$\alpha$$\beta$B durch die ganze Länge BA vorgeſtellt wird, und die Diſtanz beyder Puncte $FH = AC = CB = \tfrac{1}{2}BA$ iſt; ſo wird, wenn wir die in C vereinigte Kraft $A\alpha\beta B = C$ nennen,

$$\tfrac{1}{2}C = FH$$

ſeyn. **Demnach werden jedesmal drey Kräfte**

Kräfte J H, G F, D C, die auf eine unbiegſame Linie A B einander entgegen drücken, im Gleichgewichte ſeyn, wenn

C:HF=H:CF=F:CH

iſt, das will ſagen: wenn jede Kraft zu der Diſtanz der beyden andern Kräfte einerley Verhältniß hat.

§. 34.

Da nun, wo auf einer geraden Linie drey Puncte angenommen werden, die beyden äuſſerſten nicht nur mehr von einander entfernt ſind, als jeder derſelben von dem Mittlern: ſondern die gröſte Entfernung die Summe der beyden kleinern iſt; ſo iſt klar, daß ebenfalls nicht nur die mittlere Kraft C jedesmal die gröſte, ſondern genau die Summe der beyden kleinern Kräfte H, F iſt, die derſelben entgegen wirken; und daß von dieſen beyden kleinern Kräften jede in Verhältniß ihrer Gröſſe näher bey der gröſten iſt. Alles dieſes folgt für ſich aus der erſt angeführten Proportionalität der Kräfte und ihrer Entfernungen. Denn da jede Kraft in Verhältniß der Diſtanz der beyden andern Kräfte iſt; ſo müſſen die beyden kleinern Kräfte am meiſten voneinander entfernt, und daher die äuſſerſten ſeyn, weil ihre Diſtanz in Verhältniß der gröſten Kraft, und daher die gröſte ſeyn ſolle. Demnach fällt die gröſte Kraft immer zwiſchen die beyden kleinern,

nern, und wirket denſelben entgegen, weil beyde erfordert werden, um ihr das Gleichgewicht zu halten. Eben ſo muß die kleinſte Kraft am meiſten entfernt ſeyn. Denn da ſie in Verhältniß der Diſtanz der beyden andern Kräfte iſt, ſo iſt dieſe Diſtanz am kleinſten, demnach ſind die beyden gröſſere Kräfte einander am nächſten. Endlich da die beyden kleinern Kräfte in umgekehrter Verhältniß ihrer Diſtanz von der gröſten ſind; ſo iſt die Summe von beyden, in Verhältniß der Summe dieſer beyden Diſtanzen, demnach in Verhältniß der Diſtanz der beyden kleinern oder äuſſerſten Kräfte ſelbſt. In eben dieſer Verhältniß iſt aber auch die gröſte Kraft. Demnach iſt dieſe der Summe der beyden kleinern gleich.

§. 35.

Wenn demnach zwo Kräfte auf zween Puncte einer unbiegſamen Linie drücken, und es ſolle ein Gleichgewicht erhalten werden, ſo muß man irgend noch eine dritte Kraft anbringen. Es iſt demnach die Frage, ſowol die Gröſſe dieſer Kraft als den Punct, wo ſie angebracht werden muß, zu beſtimmen. Die Gröſſe der geſuchten Kraft beſtimmt ſich leicht. Denn ſie iſt die Summe der beyden fürgegebenen Kräfte, wenn dieſe auf gleicher Seite angebracht ſind. Widrigenfalls iſt ſie die Differenz derſelben. Im erſten Fall wirkt ſie zwiſchen beyden und denſelben entgegen. Im

andern

andern Fall fällt ſie auf die Seite der kleineren Kraft, um mit derſelben der gröſſeren, welche immer in der Mitte iſt, entgegen zu wirken. Da die gröſte Kraft allemal die Diſtanz der beyden kleinern ſo theilt, daß jede derſelben der gröſten deſto näher iſt, je gröſſer ſie iſt; ſo wird dadurch auch die Diſtanz der geſuchten Kraft leicht gefunden. Denn im erſten Fall, wo der Punct C geſucht wird, hat man immer

$$C:HF = H:CF = F:HC.$$

Und ſo wird CF, oder auch HC gefunden. Im andern Fall, wo der Ort einer der äuſſerſten Kräfte z. E. H geſucht wird, hat man

$$H:CF = F:CH$$

und ſo wird CH gefunden. Und eben ſo findet man CF durch

$$F:HC = H:CF$$

das will nun ſagen: Wie ſich die Kraft deren Diſtanz von einer der gegebenen Kräfte geſucht wird, zu der gegebenen Diſtanz dieſer Kräfte verhält; ſo verhält ſich die andere der gegebenen Kräfte zu der geſuchten Diſtanz. Dieſe wird ſodann immer entweder von der Mitte auswerts, oder von einem der äuſſern Puncte gegen die Mitte getragen, weil ſie allemal entweder CF, oder CH iſt.

§. 36.

Da es bey Beſtimmung der Lage eines Puncts willkührlich iſt, wo man zu zählen anfängt,

fängt, ſo kann man auch jeden beliebigen Punct z. E. B annehmen, um die Lage eines der drey Puncte F, C, H zu beſtimmen. Denn wenn man deren Entfernung von B, f, c, h nennt; ſo wird man

$$C:h-f=H:c-f=F:h-c$$

haben. Und dadurch kann nach Belieben f, oder c, oder h gefunden werden.

§. 37.

Es giebt aber dieſe Analogie noch einen andern Umſtand an, der für ſich betrachtet zu werden verdient. Denn aus

$$C:(h-f)=H:(c-f)$$

erhält man

$$Cc-Cf=Hh-Hf$$

und hieraus

$$Cc=Hh+f(C-H)$$

Nun iſt

$$C-H=F$$

demnach, wenn dieſer Werth geſetzt wird

$$Cc=Hh+Ff.$$

Hier hat man nun jede Kraft mit ihrer Entfernung von dem willkührlich angenommenen Punct B multiplicirt, und die Producte dergeſtallt verglichen, daß die beyden kleinern dem gröſten gleich ſind. Dieſer Umſtand iſt deſto beträchtlicher, weil er in Abſicht auf jeden Punct B ſtatt hat, ſo oft die drey Kräfte C, H, F im Gleichgewicht ſind.

§. 38.

§. 38.

Ferner wird vermittelſt der Gleichung

$$Cc = Hh + Ff$$

die Diſtanz der gröſten Kraft immer gefunden, wenn man

$$c = \frac{Hh + Ff}{C}$$

und daher

$$c = \frac{Hh + Ff}{H + F}$$

macht; das will ſagen: Wenn man jeden der beyden kleinern Kräfte mit ihrer Entfernung von dem willkührlich angenommenen Punct B multiplicirt, und die Summe der Producte durch die Summe der beyden kleinern Kräfte dividirt; ſo wird, was heraus kömmt, die Entfernung der gröſten Kraft von eben dem Punct B ſeyn.

§. 39.

Man ſieht leicht, daß wenn der Punct B zwiſchen den beyden kleinern Kräften angenommen wird, ſodann die eine der Entfernungen h, f negativ werde. Und eben ſo ſieht man, daß eine der Kräfte F, H negativ wird, ſobald ſie nicht auf eben der Seite ſind, ſondern einander entgegen wirken. Denn ſo wird man z. E. wenn mit Beybehaltung des Punets B die Diſtanz h zu ſuchen iſt,

h =

$$h = \frac{Ff - Cc}{F - C}$$

erhalten.

§. 40.

Die beyden kleinern Kräfte H, F äuſſern ihre vereinigte Wirkung H + F in dem Punct C. Denn da C = H + F iſt, (§. 34.) ſo iſt es eben ſo viel, ob man dieſe beyden Kräfte in H und F laſſe, oder ob man ſtatt derſelben ihre Summe auf C der Kraft C entgegen wirken läßt. (§. 13.) Dieſes Umſtandes können wir uns folgendermaſſen bedienen.

§. 41.

Fig. IX. Es ſey AR eine unbiegſame Linie, und auf dieſelbe drücken in beliebigen Entfernungen A, B, C, D &c. jede beliebige Kräfte Aa, Bb, Cc, Dd &c. Dieſen ſolle irgend eine Kraft entgegengeſetzt werden, welche denſelben das Gleichgewicht halte, ſo, daß die Linie AR unbewegt bleibe. Solle nun der Ort dazu gefunden werden, ſo heiſt dieſes eben ſoviel als den Punct finden, wo die Kräfte Aa, Bb, Cc, Dd &c. ihre Wirkung vereinigen. Man mache erſtlich, nachdem man jeden beliebigen Punct R angenommen,

$$R6 = \frac{Aa.AR + Bb.BR}{Aa + Bb}$$

und ſo wird man ſtatt der Kräfte Aa, Bb in dem

dem Punct ϐ ihre Summe anbringen können, und einerley Wirkung erhalten. Wir ſetzen demnach in ϐ mit Weglaſſung der Kräfte Aa, Bb, ihre Summe Aa + Bb. Man mache nun ferner auf eben die Art

$$R\gamma = \frac{R\beta.(Aa+Bb)+RC.Cc}{Aa+Bb+Cc}$$

ſo wird man ebenfalls ſtatt der in ϐ und C angebrachten Kräfte in γ ihre Summe Aa + Bb + Cc anbringen können. Auf eine ähnliche Art läßt ſich in δ die Summe Aa + Bb + Cc + Dd anbringen, wenn man

$$R\delta = \frac{R\gamma.(Aa+Bb+Cc)+RD.Dd}{Aa+Bb+Cc}$$

macht. Kommen noch mehr Kräfte vor, ſo fährt man auf eben die Art fort. Und ſo werden für zwo, drey, vier ꝛc. Kräfte die geſuchten Puncte ϐ, γ, δ &c. ſeyn; ſo, daß in jedem ſich ihre Wirkung vereinigt, und der Summe derſelben gleich iſt. Demnach wird auch in jedem eine dieſer Summe gleiche Kraft derſelben entgegen geſetzt. So z. E. wenn 4 Kräfte Aa, Bb, Cc, Dd ſind, muß eine ihrer Summe gleiche Kraft in δ denſelben entgegen geſetzt werden.

§. 42.

Da demnach der Ordnung nach

$$R\beta(Aa+Bb) = Aa.AR+Bb.BR$$

$$R\gamma.(Aa+Bb+Cc)=R\beta(Aa+Bb)+RC.Cc$$

$$R\delta.(Aa+Bb+Cc+Dd)=R\gamma=(Aa+Bb+Cc)+RD.Dd$$

&c.

iſt; ſo ſieht man ohne Mühe, daß jede dieſer Gleichungen in der nächſtfolgenden kann geſetzt werden; und daß man daher der Ordnung nach

$$R\beta.(Aa+Bb)=Aa.AR+Bb.BR$$

$$R\gamma.(Aa+Bb+Cc)=Aa.AR+Bb.BR+Cc.CR$$

$$R\delta.(Aa+Bb+Cc+Dd)=Aa.AR+Bb.BR+Cc.CR+Dd.DR$$

&c.

erhält. Das will nun ſagen: **Um den Punct zu finden, wo die geſamten Kräfte ihre Wirkung vereinigen, und wo folglich denſelben eine ihrer Summe gleiche Kraft entgegen geſetzt werden muß, um das Gleichgewicht zu erhalten, muß jede Kraft mit ihrer Entfernung von dem nach belieben angenommenen Punct R multiplicirt, und die Summe ihrer Producte durch die Summe der Kräfte dividiret werden. Was heraus kömmt, iſt die Entfernung des geſuchten Puncts von eben dem Punct R.**

§. 43.

§. 43.

Man kann hier ebenfalls die Anmerkung machen, daß wenn die fürgegebenen Kräfte nicht ſämtlich auf gleicher Seite ſind, und daher an ſich ſchon einander entgegen wirken, die entgegen wirkenden negativ müſſen genommen werden: Und daß eben dieſes von den Entfernungen gelte, wenn der Punct R zwiſchen den Kräften angenommen wird. Dabey iſt es nun möglich, daß wenn die Kräfte einander entgegen wirken, ihre Summe = o werde. In dieſen Fällen wird erſtlich die geſuchte Diſtanz unendlich, ſo oft die Summe der Producte nicht ebenfalls = o iſt. Sodann da die Kraft, ſo man um das Gleichgewicht zu erhalten, anbringen wolte, der Summe der Kräfte gleich iſt, ſo wird dieſelbe in dieſen Fällen = o. Demnach müſte man in einer unendlichen Entfernung von R eine Kraft = o anbringen, um das Gleichgewicht zu erhalten. Was dieſes für einen Verſtand habe, müſſen wir auf eine andere Art erörtern. Die Summe der Kräfte iſt nemlich = o, wenn die Summe der aufwerts drückenden Kräfte der Summe der unterwerts drückenden gleich iſt. Nun iſt aus dem Vorhergehenden klar, daß ſowol die erſtern als die letztern ihre Wirkung in irgend einem Punct vereinigen, und daß man ſtatt derſelben ihre Summe in dieſem Punct anbringen kann. Sind nun die Kräfte ſo vertheilt, daß dieſes in einem und eben dem Punct ge-

ſchieht, ſo iſt für ſich klar, daß ein Gleichgewicht ſtatt habe, (§. 13.) weil beyde Summen gleich ſind. Geſchieht es aber nicht in einem und eben dem Punct, ſo iſt ſchlechthin kein Gleichgewicht möglich. Denn wo und auf welcher Seite man noch eine Kraft anbringen wolte, ſo würde die Summe von allen nicht mehr $= 0$ ſeyn, weil die Summe der gegebenen Kräfte an ſich ſchon $= 0$ iſt. Dafern aber eine Kraft $= 0$ als eine Kraft angeſehen wird, die kleiner als jede gedenkbare Kraft iſt, ſo muß ſie in einer Entfernung angebracht werden, die gröſſer als jede gedenkbare Entfernung iſt. Dieſes giebt die Regel für den hier betrachteten Fall an, wenn ſie die Kraft $= 0$, die Entfernung unendlich macht. Denn damit muß die Kraft $= 0$ als unendlich klein angeſehen werden. Da aber eine ſolche Kraft nicht gegeben werden kann, ſo iſt dieſes eben ſo viel, als wenn man ſagt, daß kein Gleichgewicht erhalten werden könne, dafern man nicht mehr als nur eine Kraft, und zwar in entgegengeſetzter Richtung, anbringen will.

§. 44.

Wird aber in einem vorkommenden Fall nicht nur die Summe der Kräfte, ſondern auch die Summe der Producte $= 0$, ſo wird die geſuchte Entfernung $= \frac{0}{0}$, das will ſagen, jede beliebige. Und da die anzubringende Kraft eben-

ebenfalls $=0$ iſt, ſo will dieſes ſagen, es werde ohne irgend eine Kraft anzubringen unter den fürgegebenen Kräften an ſich ſchon ein Gleichgewicht ſeyn. In dieſem Fall läßt ſich z. E. für vier Kräfte die Formel

$$R\delta = \frac{Aa.AR + Bb.BR + Cc.CR + Dd.DR}{Aa + Bb + Cc + Dd}$$

weil ſowol der Nenner als der Zähler $=0$ iſt, allemale in zwo andere vertheilen, wo die negativen Werthe in der einen, die poſitiven in der andern ſind. Man ſetze z. E. B und C negativ, ſo erhalten wir für die herunterdrückende Kräfte der Diſtanz

$$\frac{Aa.AR + Dd.DR}{Aa + Dd}$$

für die heraufdrückende aber die Diſtanz

$$\frac{Bb.BR + Cc.CR}{Bb + Cc}$$

und dadurch finden ſich die Puncte, wo ſtatt der Kräfte ihre Summen $Aa + Dd$ und $Bb + Cc$ angebracht werden können. Nun ſind in dieſen Brüchen die Zähler und ſo auch die Nenner, demnach die Diſtanzen ſelbſt einander gleich. Daher treffen die beyden Puncte, wo die Summen der Kräfte angebracht werden müſſen, in eins zuſammen. Da nun dieſe Summen einander gleich ſind, und einander entgegen wirken, ſo hat allerdings ein Gleichgewicht ſtatt. Iſt aber endlich nur die

Summe der Producte (§. 42.) = o, ſo wird auch ſchlechthin nur die geſuchte Diſtanz = o. Und dieſes zeigt an, daß R ſelbſt der Punct iſt, wo die das Gleichgewicht haltende Kraft muß angebracht werden.

§. 45.

Man ſetze nun, eine Kraft ſey auch eine
Fig. X. ganze Linie A B, aber ungleich vertheilt, ſo, daß z. E. wenn man den auf jeden Punct E wirkenden linearen Druck durch P M vorſtellt, die Gröſſe dieſes Druckes in jedem Punct P durch die Ordinate P M der krummen Linie D M E vorgeſtellt werde. Auf dieſe Art wird nun die ganze Kraft durch den Flächenraum A D E B, und der auf jede Abſciſſe A P wirkende Theil derſelben durch den Raum A D M P vorgeſtellt ſeyn. Sollte nun der Punct der Linie A P gefunden werden, wo dieſe Kraft ihre Wirkung vereinigt, und wo folglich eine andere von gleicher Gröſſe und Dimenſion angebracht werden kann, die derſelben entgegen wirke und das Gleichgewicht halte; ſo kann man eben ſo, wie vorhin, einen beliebigen Punct R annehmen, und indem man jeden linearen Druck M P mit der Entfernung P R multiplicirt, das Product durch eine Ordinate P N vorſtellen, und ſo wird der Raum A F G B durch den Raum A D E B getheilt, die verlangte Entfernung des Puncts geben, wo die der Kraft

A D E B

A D E B gleiche Kraft, zur Erhaltung des Gleichgewichtes, angebracht werden muß.

§. 46.

Wenn man einen Punct der unbiegſamen Linie unbeweglich ſetzt, ſo wird dadurch die Möglichkeit, wie bey nicht vorhandenen Gleichgewichte die Linie bewegt wird, auf eine einige gebracht. Denn ſo kann ſie ſich ſchlechthin nur um dieſen Punct drehen. Eine unbiegſame Linie, die ſich um einen unbeweglichen Punct drehen läßt, nennt man, im engſten Verſtande, einen Hebel, und wenn es eine mathematiſche Linie iſt, einen mathematiſchen Hebel. Denn wird er auf der einen Seite des unbeweglichen Puncts herunter gedrückt, ſo dreht er ſich auf der andern Seite aufwerts, ſo oft eine Uebermucht da, oder das Gleichgewicht nicht da iſt. Ich habe bisher ſowol von dem unbeweglichen Punct, als auch von dem dabey möglichen Herumdrehen, ganz abſtrahirt; theils weil die Bedingungen des Gleichgewichtes nicht ſolten aus der Art hergeleitet werden, wie der Hebel bey unterbleibenden Gleichgewichte ſeine Lage und Stelle ändert, theils auch weil ich ſtatt des unbeweglichen Puncts viel allgemeiner eine Kraft anbrachte, und eben daher die Bedingungen des Gleichgewichts rein und ohne mit eingemengte fremde Umſtände erhielte. An dieſem letztern Endzwecke würde der unbewegliche Punct eine ge-

doppelte Hinderniß geweſen ſeyn. Denn einmal da derſelbe unbeweglich iſt, ſo hält er den Druck jeder möglichen Kraft aus; und weil es ein Punct iſt, ſo läßt ſich dabey auch nicht ſehen, nach welcher Direction derſelbe den Druck der unbiegſamen Linie aufhält. Dieſes muß aus andern Gründen beſtimmt werden, das will ſagen, man thut beſſer, wenn man ſtatt des Puncts eine Kraft anbringt. Sodann ſchränkt ein ſolcher Punct durch ſeine Unbeweglichkeit, die Möglichkeit von der Bewegung der Linie auf eine einige ein. Wenn man daher auch erweiſt, daß ſich die Linie nicht drehen werde, ſo iſt dadurch noch nicht erwieſen, daß ſie nicht auf eine derjenige Arten werde bewegt werden, die der unbewegliche Punct, blos weil er unbeweglich iſt, verhindert oder unmöglich macht. Das will nun wiederum ſagen, daß man beſſer thut, wenn die Linie für ſich ſchlechthin frey iſt, und jede Möglichkeiten, bewegt zu werden, behält. Werden ſodann die Kräfte unter den Bedingungen des des Gleichgewichtes daran angebracht, ſo fordert die weſentlichſte dieſer Bedingungen, daß ſie nach wie vor eben ſo unbewegt bleibe, als wenn ſie durchaus und ſchlechthin unbeweglich wäre. Und ſo iſt jeder Punct daran ſo gut, als wäre er unbeweglich. So unbewegt muß auch jeder bleiben, welche Aenderung man auch immer, mit Beybehaltung des Gleichgewichtes, mit den Kräften vornimmt. So z. E.

wenn

wenn man ſetzt, das anfangs auf die Linie AB Fig. VIII. nur die beyderſeits gleiche, gleichvertheilete und durchaus gleich entgegengeſetzte Kräfte EebB, EfϐB drücken, ſo bleibt ſie nicht nur dadurch eben ſo unbewegt, als wenn ſie für ſich ganz allein in Ruhe wäre; ſondern ſie wird eben ſo verbleiben, wenn zu dieſen Kräften Neue hinzu kommen, die unter eben den Bedingungen auf den Theil AE drücken. Ob nun hiebey, ſo lange nemlich die Linie unbewegt bleibt, ein Punct derſelben, z. E. C, unbeweglich ſey oder nicht, das iſt in ſofern gleichviel. In jeden andern Abſichten aber iſt es nicht mehr gleichviel, weil, ſobald man einen Punct C unbeweglich ſetzt, ſogleich jede Kräfte anfangen eine Beziehung auf denſelben zu haben. Denn ein ſolcher Punct muß immer ſtatt der den übrigen Kräften das Gleichgewicht haltenden Kraft genommen werden, ſo ſehr er auch zuweilen ſchlechthin gar keinen Druck aushält. So wäre auch ein ſolcher Punct in dem §. 31. immer ein Hindernis oder etwas ganz Ueberflüßiges geweſen, da wir die auf AE, EB, AB vertheilte Kräfte AaeE, EebB, AαϐB auf ihre Mittelpuncte H, F, C richteten. Denn man nehme C als den unbeweglichen Punct an, ſo würde die nunmehr auf C gerichtete Kraft AαϐB, juſt auf den Punct der Linie gerichtet ſeyn, der wegen ſeiner Unbeweglichkeit dieſe Kraft, ſo wie jede mögliche Kraft aufhält, und daher ihre Wirkung auf die

Linie = o macht. Und ſo würde man nicht ſehen, ob das Gleichgewicht wegen der Kräfte, oder wegen des unbewegten Puncts C bleibt. Iſt aber die Linie ganz frey, ſo fällt dieſe Verwirrung weg, und da iſt es genug, daß jede lineare Kraft für ſich wirkt, um die Puncte H, F, C, als die Mittelpuncte anzuſehen, in welchen die Kräfte AaeE, EebB, $A\alpha\beta B$ ihre Wirkung vereinigen; dieſe Kräfte mögen jede allein, oder beyſammen angebracht ſeyn.

§. 47.

Es iſt aber noch ein anderer Grund, warum man bey dem Hebel einen unbeweglichen Punct angenommen. Denn auſſer dem daß man in der practiſchen Mechanic immer den eigentlich ſogenannten Hebel auf eine unbewegliche Stütze legt, oder ihn irgend anſperrt, und dabey eigentlich auch nur die Verhältniß zwiſchen der ſogenannten Kraft und Laſt beſtimmen will; ſo hält man ſich ſelbſt in der Theorie dabey auf, die unbewegte Linie, wenn die angebrachten Kräfte im Gleichgewichte ſind, um einen ſelbſt unendlich kleinen Winkel zu drehen, um den Weg, den die durch die Kräfte gedrückte Puncten durchlaufen, mit den Kräften zu vergleichen. Und da findet ſichs, daß, wo nur zwo Kräfte ſind, jede in umgekehrter Verhältniß des Weges iſt. Denn man ſetze den unbeweglichen Punct in C, die beyden Kräfte in H, F. Da die Linie gerade bleibt, ſo iſt der unend-

unendlich kleine Bogen den H durchläuft, zu demjenigen den F durchläuft, wie HC zu CF. Nun ſind die Kräfte umgekehrt wie HC zu CF: demnach ſind ſie auch in umgekehrter Verhältniß durchlaufenen Bögen. Wenn die Kraft in H bleibt, ſo wird die Kraft F deſto kleiner, je gröſſer CF wird. In eben dieſer Verhältniß hat ſie bey dem Herumdrehen einen deſto gröſſeren Weg zu durchlaufen, und deſto geſchwinder läuft ſie auch. Daher, wenn F als die zu bewegende Laſt angeſehen wird, ſo gewinnt man, bey einerley Kraft, an der Zeit und dem Wege, was man an der Laſt vermindert; und hinwiederum wird an der Zeit und dem Wege verlohren, was man an der Laſt vermehrt. Da die Rollen, Räderwerke, Flaſchenzüge ꝛc. ebenfalls auf die Theorie des Hebels reducirt werden, ſo dehnt ſich dieſer Satz ſehr weit aus. Carteſius ſahe denſelben für ſo einleuchtend an, daß er ihn zum erſten Grundſatze ſeiner Static machte. Denen aber, die an Kraft, Zeit und Weg zugleich gewinnen, und dadurch das perpetuum mobile erzwingen wollen, iſt dieſer Satz lange nicht ſo ſehr einleuchtend; und vermuthlicher entweder gar nicht, oder wenigſtens nicht in ſeinem ganzen Umfange und Nachdrucke, bekannt. Es ſind aber noch ganz andere Gründe, warum ich dieſen Satz, und gewiſſermaſſen in Form einer kleinen Ausſchweifung, hier näher betrachten werde.

§. 48.

§. 48.

Ich habe in dem Vortrage deſſelben geſagt: 1°. Daß die Kräfte H, F im Gleichgewichte ſeyn. Und in ſofern iſt die Linie A B in unbewegter Ruhe. 2°. Daß ſodann die Linie gedreht werde, und zwar 3°. daß dieſes nur um einen unendlich kleinen Winkel geſchehen. Nun wird dieſer Winkel deswegen unendlich klein genommen, damit die Direction der Kräfte ſo gut als unverändert bleibe. Dieſe ändert ſich zwar, um es wie im Vorbeygehen zu ſagen, genau ſo viel als der Winkel, aber die Wirkung, welche ſich nach dem Sinu incidentiae richtet, ändert ſich unendlich mal weniger, oder ſo zu reden, nur um einen unendlich kleinen Theil des unendlich kleinen Winkels. Daher kann der Winkel unter jeden unendlich kleinen noch ein merklich gröſſer ſeyn, ohne daß die Wirkung verändert werde. Jedoch, wenn man alles ganz ſtrenge nehmen will, ſo darf man nur das ganze Syſtem, ich will ſagen, die Kräfte zugleich mit der Linie um den Punct C drehen, ſo viel man will. Die durchlaufene Bögen werden genau in umgekehrter Verhältniß des Weges bleiben. So hat es bey Räderwerkern, Rollen und Flaſchenzügen ſtatt, wo man Weg, Zeit und Kraft vergleicht, ohne eben beyde erſtern unendlich klein zu ſetzen.

§. 49.

Dieſes iſt nun aber eigentlich nicht das, woran man ſich aufhält, und ſo werde ich auch nicht dabey verweilen. Die Frage iſt vielmehr, ob man bey dem Gleichgewichte, wo alles in Ruhe iſt, den Begrif einer Bewegung zum Grunde legen können; woher das Umdrehen komme, und was die dabey ſich einfindende Zeit, Geſchwindigkeit und durchlaufener Raum mit den vorhin im Gleichgewichte geweſenen Kräften für eine Verbindung haben? Dieſes muß mit einem gewiſſen Grade von Deutlichkeit und Bewuſtſeyn unterſucht werden. Denn es ſoll daraus, und ſelbſt auch für die Theorie der Bewegung, folgen, daß die Geſchwindigkeit der Laſt, und daher auch der von derſelben in einer beſtimmten gleichen Zeit durchlaufene Weg oder Raum allemal in Verhältniß der Kraft, und umgekehrt, in Verhältniß der Laſt ſelbſt ſey. Es iſt nur zu ſehen, ob, oder wie dieſes daraus folge?

§. 50.

Einmal folgt nun, wenn wir noch von erſt bemeldten Fragen abſtrahiren, ſo viel ganz richtig: Erſtlich, wenn die Kraft in H verſtärkt wird, ſo muß man, um das Gleichgewicht beyzubehalten, die Laſt F in eben der Verhältniß von C weiter wegrücken. Da ſie nun bey dem Herumdrehen

in eben

in eben der Verhältniß geſchwinder bewegt wird, und daher auch einen eben ſo viel gröſſern Weg durchläuft; ſo iſt unſtreitig, daß ſich Weg und Geſchwindigkeit der Laſt in gleicher Verhältniß mit der Kraft vergröſſern. Und dieſes war das erſtere.

§. 51.

Das andere hat eben ſo wenig Anſtand. Die Kraft in H bleibe unverändert; man vergröſſere aber die Laſt, ſo muß dieſe, um das Gleichgewicht zu erhalten, in eben der Verhältniß näher gegen C gerückt werden. Daher bewegt ſie ſich bey dem Herumdrehen in eben der Verhältniß langſamer, und in eben der Verhältniß durchläuft ſie in gleicher Zeit einen kleinern Weg. Alſo ſind Weg und Geſchwindigkeit in umgekehrter Verhältniß der Laſt. Und dieſes war das andere.

§. 52.

Alles dieſes hat demnach keinen Anſtand. Allein die Frage, woher das Umdrehen komme, und welche Verbindung es mit den einander das Gleichgewicht haltenden Kräften habe, bleibt hiebey noch ganz unerörtert. Bis dieſes aber nicht erörtert iſt, kann man immer ſagen, daß, unerachtet allerdings die Geſchwindigkeit der Laſt ſich gerade wie die Kraft, und umgekehrt, wie die Laſt ſelbſt verhalte, dieſelbe dennoch

noch weder von der Kraft noch von der Laſt herrühre, weil dieſe ſich ſchlechthin nur im Gleichgewicht halten, und daher ſich ſelbſt überlaſſen, in Ruhe bleiben, und folglich weder von einer wirklichen Geſchwindigkeit, noch auch nicht einmal von einer Sollicitation, daraus eine erwachſen könnte, die Rede vorkomme.

§. 53.

Da dieſes an ſich ganz offenbar iſt, ſo ſieht man auch wohl, daß um ein Herumdrehen zu verurſachen, eine Ueberwucht da ſeyn müſſe, und ſo verſtärkt man die Kraft um etwas, oder auch nur um einen unendlich kleinen Theil. Dadurch dreht ſich nun die Linie, aber die **Geſchwindigkeiten bleiben in Verhältniß der nicht verſtärkten Kraft**, ungeachtet ſie nicht von derſelben, ſondern ſchlechthin nur von dem hinzugekommenen Theile herrühren. Um aber hiebey das relative mit dem abſoluten nicht zu vermengen, ſo müſſen wir die Anmerkung nicht beyſeite ſetzen, daß in vorhin angeführtem Satze von der abſoluten Geſchwindigkeit gar nicht die Rede ſey; ſondern daß, wenn dieſe nach belieben angenommen worden, ſchlechthin nur erwieſen wird, daß die Laſt ſich geſchwinder oder langſamer bewege, je nachdem ſie von C mehr oder weniger entfernt iſt. Denn man weiß, daß wenn eine Linie ſich um einen Punct dreht, allemal alle Geſchwindigkeit dabey vorkommen. Und daher wächſt die

Geſchwin

Geſchwindigkeit der Laſt in gleicher Verhältniß mit der Entfernung, wie groß oder klein die abſolute oder anguläre Geſchwindigkeit auch immer ſeyn mag.

§. 54.

Indeſſen müſſen wir doch ſagen, daß, unerachtet die abſolute Geſchwindigkeit allein von der Ueberwucht, als ihrer wirkenden Urſache, herrührt, ſie ſich dennoch nach der Kraft und Laſt und deren Entfernung von C richte. Man ſetze z. E. H und F ſeyn Gewichte, welche folglich durch die Kraft der Schwere gedrückt und im Gleichgewichte erhalten werden; um dieſes zu heben, werde die Kraft H um einen, wenn man ſo will, unendlich kleinen Theil x vermehrt; ſo hat man in aller Form ein pendulum compoſitum, welches unendlich langſame Schwürigkeit macht. Rechnet man nach, ſo findet ſichs, daß die wiewol unendlich kleine Geſchwindigkeit ſich, umgekehrt, wie die Quadratwurzel von $(H.HC^2 + F.FC^2)$ und gerade wie die Quadratwurzel von $HC.x$ verhalte, und ſich demnach ſowol nach den Gewichten als auch nach ihrer Entfernung von C, und beſonders auch nach der Quadratwurzel der Ueberwucht x richte. Ich entlehne dieſe, ſonſt hieher nicht gehörende Rechnung, aus der wenigſtens auf Erfahrung gegründeten Theorie der Pendul, weil man ſich öfters auf den mit Gewichten und einer kleinen Ueberwucht beſchwer-

beſchwerten Hebel berufen hat, um die Kraft nach den einfachen geraden Verhältniß der Geſchwindigkeit zu ſchätzen, welche durch dieſelbe verurſacht wird. Denn hier iſt die Kraft x, die Geſchwindigkeit $\sqrt{x}$.

§. 55.

Es giebt andere Fälle, wo, wenn auch Kraft und Laſt im Gleichgewichte ſind, dennoch eine beträchtliche Ueberwucht erfordert wird, um die Maſchine auch nur mit einer langſamen und gemeiniglich gleichförmigen Geſchwindigkeit in Bewegung zu ſetzen und zu erhalten. Es ſind nehmlich alle die, wo eine merkliche Friction oder auch der Widerſtand einer flüßigen Materie zu überwältigen iſt. Allein dieſe Hinderniſſe ſind in Abſicht auf die einander das Gleichgewicht haltende Kraft und Laſt, ganz fremde, ungeachtet ſie ſich zugleich mit beyden vergröſſern, und daher auch eine ſtärckere Ueberwucht fordern, wenn Kraft und Laſt vermehrt werden. Da man faſt immer die Wirkung des Anreibens und des Widerſtandes der flüßigen Materie für geringe geachtet, ſo hat man in der Static und Berechnung der Maſchinen der Ueberwucht wenig Rechnung getragen. In der That iſt auch die Ueberwucht allein nicht zureichend, die Laſt zu bewegen, die Kraft ſelbſt, welche nemlich die Laſt im Gleichgewichte zu halten vermag, muß unſtreitig das ihrige auch dazu beytragen. Allein

die Geſchwindigkeit der Laſt, verhältnißweiſe genommen, richtet ſich nur nach der Kraft. Und ſo kann man auch nicht ſagen, daß die abſolute Geſchwindigkeit der Laſt, entweder der Ueberwucht, oder der Summe der Ueberwucht und der Kraft nothwendig und in allen Fällen proportional ſey. Es läßt ſich aber einiger maſſen begreiflich machen, worin das Blendwerk beſteht, wenn man an Zeit und Kraft zugleich gewinnen will. Denn es ſcheint, als wenn dabey die Kraft und Zeit jede beſonders gerechnet, und beyde in eine Summe gebracht werde. Es ſey die Kraft k, die Zeit t, die Laſt oder die Wirkung w, ſo iſt

$$w = kt$$

Da aber dieſes keine Summe, ſondern ein Product iſt, ſo will man

$$w = k + t$$

zu einem maximo machen. Wenigſtens ſcheint man es ſich dunkel vorzuſtellen. Dagegen iſt aber verſchiedenes zu erinnern: denn einmal ſind Zeit und Kraft heterogene Gröſſen, und ſo laſſen ſie ſich nicht ſo ſchlechthin addiren. Man müßte vorerſt Mittel finden, ſie auf einerley Maaßſtab zu bringen. Setzt man aber vermög der erſten Gleichung

$$t = w : k$$

ſo iſt die zweyte

$$w = k + w : k$$

oder

oder

$$w = \frac{kk.}{k-1} = k + 1 + \frac{1}{k-1}$$

Dieſe Gleichung lieſſe ſich nun differentiiren, und das Differential

$$dw = dk + \frac{dk}{(k-1)^2} = 0$$

ſetzen, und ſo würde

$$k = 2$$

ſeyn. Wenn man nun aber auch verſtünde, was dieſes ſagen will, ſo würde dennoch bey dieſem Werthe von k, die Wirkung w nicht ein maximum, ſondern ein minimum ſeyn. Dieſes iſt nun noch das ſchlimmſte in der ganzen Sache: denn man hatte eigentlich ein maximum in der Wirkung verlangt. Man ſieht alſo, daß ſich mit der Gleichung

$$w = k + t$$

wenn ſie auch einen Verſtand hätte, nichts ausrichten läßt. Man ſetze auch, es ſey k die Anzahl der Arbeiter und t die Tage, w aber ſtelle die Bezahlung, oder die Tagelöhne vor, ſo wird wiederum die Formel

$$w = kt$$

ganz richtig ſeyn. Und die andere Formel

$$w = k + t$$

könnte nun hier ein minimum geben. Allein ſie läßt, als wenn die Arbeiter beſonders, und die Tage beſonders bezahlt würden. So geht es aber in der Welt nicht zu.

§. 56.

Ich werde nun noch dieſen Abſchnitt mit einer kleinen Anmerkung über die in den deutſchen Anweiſungen zur Hebekunſt gebräuchliche Benennungen von zwoen Arten des Hebels machen. Wenn nemlich der unbewegliche Punct in C zwiſchen der Kraft H und der Laſt F iſt; ſo nennt man dieſes einen **Hebel der erſten Art.** Iſt aber der unbewegliche Punct am Ende, ſo, daß Kraft und Laſt auf einer und eben der Seite deſſelben ſind, ſo wird es ein **Hebel der zweyten oder andern Art** genennt, wie z. E. wenn der unbewegliche Punct in F, die Laſt in C, die Kraft in H iſt. Ich kann nicht ſagen, wer dieſe ſo gar nichts bedeutende oder vorſtellende Benennungen im Deutſchen eingeführt hat. Die Griechen verfuhren mit ihrem homodromus und heterodromus viel vernünftiger. Denn dieſe Wörter geben an ſich ſchon an, ob Kraft und Laſt auf einer oder auf beyden Seiten des Unbeweglichen oder Ruhepuncts iſt. Es iſt unſtreitig, daß es im Deutſchen die Wörter **einſeitig** und **doppelſeitig**, oder auch **einärmigt** und **doppelärmigt** eben ſo gut angeben würden, und daß es nur darauf ankömmt, ſie in den Anfangsgründen zur Static ſtatt der vorangeführten und den lernenden unbedeutenden und anſtößigen Benennungen zu gebrauchen.

V. Der

V. Der Druck der Kräfte auf ebene Flächen.

§. 57.

Es ſeyn in drey Puncten einer ebenen Fläche A, B, C drey Kräfte a, b, c angebracht, welche ſenkrecht auf die Fläche drücken, und es ſolle denſelben eine Kraft entgegen wirken, und das Gleichgewicht halten; ſo iſt zu beſtimmen, wo dieſe vierte Kraft angebracht werden, und wie groß ſie ſeyn müſſe? Man nehme erſtlich von dieſen Kräften zwo, z. E. a, b; ſo iſt klar, daß ſich auf der Linie AB ein Punct Q finden läßt, wo ſtatt derſelben ihre Summe angebracht werden kann (§. 40.) und man findet (§. 33.) Fig. IX.

$$(a+b) : AB = a : BQ = b : AQ$$

Setzt man demnach die Kräfte a + b in Q, ſo wird ſich auf der Linie QC ebenfalls ein Punct P finden, wo die in Q und C angebrachten Kräfte a + b + c ihre Wirkung vereinigen. (§. 40.) Und man findet ebenfalls (§. 33.)

$$(a+b+c) : QC = (a+b) : PC : c : QP$$

Da demnach die Fläche gleich gedrückt wird, wenn die drey Kräfte a + b + c in P angebracht werden; ſo wird das Gleichgewicht erhalten, wenn man denſelben in P eine ihrer Summe a + b + c gleiche Kraft p entgegen ſetzt; (§. 13.) und ſo iſt dieſe Kraft und der Punct, wo ſie angebracht werden muß, beſtimmt.

ſtimmt Dieſe Aufgabe läßt ſich folgendermaſſen umkehren:

§. 58.

Wenn auf einen Punct einer Fläche P eine Kraft p ſenkrecht drückt, und es ſollen derſelben in drey beliebigen Puncten A, B, C drey Kräfte entgegen wirken, und das Gleichgewicht halten; ſo iſt zu beſtimmen, wie groß jede der drey Kräfte ſeyn müſſe? Man nenne die drey Kräfte a, b, c; ſo iſt aus dem vorhergehenden §. klar, daß erſtlich

$$a + b + c = p$$

ſeyn müſſe. Sodann ziehe man aus einem der drey Puncte A, B, C, z. E. aus C eine gerade Linie durch P in Q, und ſo muß (§. 33.)

$$(a + b + c) : QC = c : QP$$

ſeyn. Dadurch findet man, weil $a + b + c = p$ iſt,

$$c = p . QP : QC$$

ferner muß (§. 33.)

$$(a + b) : AB = a : BQ = b : AQ$$

ſeyn. Da nun $a + b = p - c$ iſt, ſo findet man hiedurch

$$a = (p - c) . BQ : AB.$$
$$b = (p - c) . AQ : AB.$$

oder wenn man den Werth von c ſetzt

$$a = \frac{p . (QC - QP) . BQ}{QC . AB}$$

$$p = \frac{p . (QC - QP) . AQ}{QC . AB}$$

und

und ſo ſind die drey Kräfte a, b, c gefunden. In der practiſchen Static ſind A, B, C ſehr häufig die drey Puncte, auf welchen ein dreyfüßiges Geſtelle ſteht, welches eine Laſt trägt. Man findet demnach hiedurch, welchen Theil der Laſt jeder Fuß trägt. Ich habe übrigens beyde Auflöſungen ſo angegeben, daß man daraus ſehen kann, was zu thun iſt, wenn auf mehrere Puncte einer Fläche Kräfte drücken. Man wird damit im̃er fortkommen, wenn die Fläche zwar unbiegſam aber weder in einem Punct, noch in einer Linie unbeweglich iſt. Hingegen in practiſchen Fällen, wo man unbewegliche Grundflächen vor ſich hat, da iſt es z. E. möglich, daß bey einem vierfüßigen Geſtelle, der eine Fuß wenig oder nichts trägt, ungeachtet derſelbe der Rechnung nach würde zu tragen haben. Dieſes geſchieht, ſo wenig auch einer der Füſſe zu lang oder zu kurz iſt.

§. 59.

Da der Punct P nothwendig auf der Linie CQ liegen, und

$$(a+b+c) : QC = a : QP$$

ſeyn muß, (§. 57) ſo iſt klar, daß es der einige iſt, der der Bedingung der Aufgabe (§. cit.) Gnügen thut. Ich merke dieſes, da es ſonſt an ſich klar iſt, und aus der Auflöſung der Aufgabe erhellet, hier nur deswegen an, weil die Lage dieſes Punct auf dreyerley Arten gefunden werden kann, weil man die völlige Wahl hat, die Linie

C Q aus C, oder aus A, oder aus B auf die gegenüberſtehende Seite zu ziehen, wenn man eben die Bedingung beobachtet, unter welcher ſie aus C in den Punct Q gezogen worden.

§. 60.

Fig. XII. Man ſetze nun in beliebigen Puncten A, B, C, D &c. einer ebenen unbiegſamen Fläche ſeyn Kräfte angebracht, die ſämtlich ſenkrecht auf dieſelbe drücken; ſo laſſen ſich nach Anleitung der Aufgabe (§. 57.) der Ordnung nach die Puncte P, Q, R &c. finden, wo die zwo, drey, vier ꝛc. erſten Kräfte ihren Druck vereinigen. Man ziehe durch A zwo beliebige Linien AK, AG, und aus den Puncten B, C, D &c. P, Q, R &c. parallele Linien Bb, Cc, Dd &c. Pp, Qq, Rr &c. ingleichem Bβ, Cγ, Dδ &c. Pl, Qm, Rn &c. welche die gezogenen Linien AG, AK durchſchneiden. Nun ſage ich: wenn die in A, B, C, D &c. angebrachten Kräfte, in A, b, c, d angebracht wären, ſo würden p, q, r &c. die Puncte ſeyn, wo die zwo, drey, vier ꝛc. erſten ihre Wirkung vereinigen; und daß eben ſo l, m, n &c. die Vereinigunspuncte ſeyn würden, wenn die Kräfte in A, β, γ, δ &c. angebracht wären. Denn wegen der parallelen Linien hat man

$$AB:AP = Ab:Ap = A\beta:Al$$
$$PC:PQ = pc:pq = l\gamma:lm$$
$$QD:QR = qd:qr = m\delta:mn$$
&c.

Da

Da nun (§. 57.) wenn a, b, c, d ꝛc. die Kräfte vorſtellen

$$AB:AP = (a+b):b$$
$$PC:PQ = (a+b+c):c$$
$$QD:QR = (a+b+c+d):d$$
&c.

iſt; ſo iſt klar, daß auch

$$Ab:Ap = A\beta:Al = (a+b):b$$
$$pc:pq = l\gamma:lm = (a+b+c):c$$
$$qd:qr = m\delta:mn = (a+b+c+d):d$$
&c.

iſt, und folglich die Puncte p, q, r &c. l, m, n &c. diejenigen ſind, wo die in A, b, c, d &c. A, β, γ, δ &c. angebrachten Kräfte ihre Wirkung vereinigen, wenn der Ordnung nach davon die zwo, drey, vier ꝛc. erſten zuſammen genommen werden.

§. 61.

Wenn man demnach anſtatt die Puncte P, Q, R &c. unmittelbar durch die Puncte A, B, C, D &c. zu ſuchen, vorerſt die Puncte p, q, r &c. l, m, n &c. ſucht, ſo kann aus dieſen, welcher von jenen man will, gefunden werden; weil man z. E. um R zu finden, nur die Ordinaten nR, rR ziehen darf. (§. 42.)

§. 62.

Man ſetze nun den Fall, wo die Kräfte nicht in den Puncten A, B, C, D &c. angebracht, ſondern auf den Linien AB, BC, CD &c.

gleichförmig oder ungleichförmig vertheilet ſind, und, der Continuität nach, auf jeden Punct dieſer Linien drücken; ſo laſſen ſie ſich auf eine ähnliche Art auf Ab, bc, cd &c. Aϐ, ϐγ, γδ &c. vertheilt gedenken. Da ſie aber dabey nicht in gleicher Verhältniß dichter werden, ſo hat man allerdings deſſen Rechnung zu tragen, in dem man, um die Dichtigkeit gleichförmig zu erhalten, die Kräfte in eben der Verhältniß ſtärker nimmt, in welcher man ſie dichter nehmen müſte. Man ſetzt z. E. die auf CD vertheilten Kräfte müſſen auf γδ gebracht werden, ſo wird jede lineare Kraft, die nemlich auf einen Punct der Linie CD drückt, mit CD multiplicirt, und durch γδ dividirt, oder, welches einerley iſt, mit der Coſecante des Winkels CDδ multiplicirt. Eben ſo multiplicirt man ſie mit der Coſecante des Winkels CDd, wenn die auf CD vertheilten Kräfte auf cd ſolten gebracht werden. Iſt dieſe Reduction durchaus vorgenommen, ſo kömmt die Auflöſung der Frage nunmehr auf die oben (§. 45.) vorgetragene Aufgabe an, weil, wenn man die Vereinigungspuncte der auf Aδ, Ad angebrachten Kräfte gefunden, ſich der Vereinigungspunct für die auf ABCD angebrachten Kräfte ohne Mühe finden läßt. Aus allen dieſem ſieht man nun, was zu thun iſt, wenn ABCD eine krumme Linie iſt, und die Kräfte auf derſelben, ſo viel man will, ungleich vertheilt ſind. Denn da wird die auf jeden Punct drü-

ckende Kraft mit der Coſecante des Winkels multiplicirt, den die krumme Linie und deren Tangente daſelbſt mit der Ordinate macht. Man ſetze jede Abſciſſe $A d = x$, ihre Ordinate $d D = y$ werde rechtwinklicht genommen. Die lineare auf den Punct D drückende Kraft ſey $= K$; den Bogen AD nenne man $= v$, ſo wird die Kraft, welche auf den Punct d anzubringen iſt $= K . dv : dx$, die ſo auf den Punct δ anzubringen iſt $= K dv : dy$ ſeyn. Iſt nun z. E. R der Vereinigungspunct aller auf den Bogen A D wirkenden Kräften, ſo findet ſich nach Anleitung des §. 45 die Diſtanz

$$A n = \int K y d v : \int K d v$$

und

$$A r = \int K x d v : \int K d v$$

ſo, daß alſo die Beſtimmung des Puncts R von drey Integrationen abhängt. Lieſſe ſich $\int K d v$ nicht integriren, ſondern nur die beyden andern Ausdrücke, ſo würde man auch nur die Lage der Linie AR beſtimmen können, weil

$$\text{tang. } RAr = \frac{Rr}{Ar} = \frac{An}{Ar} = \int K y d v : \int K x d v$$

iſt.

§. 63.

Wenn eine Kraft auf eine ganze Fläche ihren Druck ſenkrecht äuſſert, z. E. auf den Raum der krummen Linie C A B, und dabey durch- Fig. XIII. aus ungleich vertheilt iſt; ſo kann man nach einer beliebigen Richtung A E Parallellinien P M ziehen, und es werden ſich die auf jede dieſer

dieſer Linien drückenden Kräfte, als in einen Punct derſelben N vereinigt gedenken laſſen, welcher nach Anleitung des §. 45. gefunden wird. Dadurch wird der Druck, der auf die ganze Fläche wirkenden Kraft, auf den Druck einer Kraft reducirt, welche auf die krumme Linie AND vertheilt, und von gleicher Gröſſe und Dimenſion iſt. Nur hat man zu merken, daß hier auch der ungleichen Dichtigkeit Rechnung getragen werden muß, weil z. E. die auf das kleine Trapezium pmMP drückende Kraft, wenn daſſelbe gleiche Breite Nq behält, auf Nn deſto weniger dichte vereinigt wird, je ſchiefer dieſes Element des Bogens Nn gegen NP geneigt iſt. Man muß daher, wenn man die auf AND vereinigte Kräfte auf einen Punct R bringen will, in der vorhin (§. 62.) angegebenen Rechnung nicht Nn, ſondern nur Nq gebrauchen. Man ſetze AQ = x, QN = y, die in dem Punct N vereinigte drückende Kraft = K; ſo wird man dahero nun

$$S\bar{R} = \int Kydy : \int Kdy$$

erhalten. Da nun dieſe Formel ſchlechthin nur von der Ordinate y, das will ſagen, von der Diſtanz der Parallele MP von AE abhängt; ſo hat man auch nicht nöthig, den Ort des Puncts N wirklich zu ſuchen, weil es genug iſt, die ganze auf jede Parallele MP drückende Kraft K, durch den Abſtand dieſer Parallele, ausgedrückt zu wiſſen, um die Diſtanz SR vermit-

vermittelſt der Formel

$$SR = \int Kydy : \int Kdy$$

zu beſtimmen. Will man nun mit Beybehaltung eben der Parallelen die Abſciſſe AS finden, ſo wird man, weil die auf Nn vereinigte Kraft nicht Kdv, ſondern nur Kdy iſt, nach Anleitung des §. 62.

$$AS = \int Kxdy : \int Kdy$$

erhalten. Und in dieſer Formel kömmt nun x und y vor, weil dabey ganz andere Umſtände ſind. Denn wenn man für AS eine der erſten ähnliche Formel haben will, ſo muß man Parallelen annehmen, welche auf AE ſenkrecht ſind, und die dieſen neuen Parallelen in Puncte auf derſelben vereinigen, und ſo wird man, wenn die auf die Paralle QN wirkende Kraft = L iſt, für eben den Raum PAM

$$AS = \int Lxdx : \int Ldx$$

erhalten. Man ſieht leicht, daß dieſe Formel mühſamer gebraucht wird, weil ſie eine nochmalige und ganz verſchiedene Berechnung der Kräfte vorausſetzt.

§. 64.

Alles wird hiebey viel einfacher, wenn die Fläche ein geradlinichtes Vieleck, und die auf daſſelbe drückende Kraft durchaus gleich vertheilt iſt. Denn da läßt ſich die Fläche in geradelinichte Triangel vertheilen, und der Vereinigungspunct für jeden Triangel leicht gefunden.

Fig. XIV. den. Es ſey A C B ein ſolcher Triangel, ſo vereinigt ſich die auf A B drückende Kraft in der Mitte P (§. 24.). Und aus gleichem Grunde finden ſich auf der Linie C P die Vereinigungspuncten der auf jede mit A B gleichlaufenden Linien wirkenden Kräfte, weil C P alle dieſe Linien halbirt. Demnach muß auch der Vereinigungspunct der ganzen auf A C B drückenden Kraft auf der Linie C P ſeyn. Da nun eben dieſes von der Linie A Q gilt, welche aus A in der Mitte von C B gezogen wird, ſo iſt nothwendig der Durchſchnittspunct R derjenige, in welchem die ganze auf den Triangel A B C wirkende Kraft ihre Wirkung vereinigt, weil ſonſt kein Punct bey den Linien A Q, C P gemeinſam iſt, und weil es der Vereinigungspuncte nicht mehrere giebt. (§. 59.)

VI. Der Druck der Kräfte auf körperliche Räume.

§. 65.

Wenn eine Kraft auf jede Puncte eines ſoliden Raumes vertheilt iſt, und auf jede nach einer parallelen Richtung drückt; ſo läßt ſich dabey, in gewiſſer Abſicht betrachtet, nicht blos ein Punct, ſondern eine ganze Linie finden, ſo, daß wenn eine Kraft, die der fürgegebenen an Gröſſe und Dimenſion gleich iſt, in entgegengeſetzter Richtung bey einem beliebigen

Punct

Punct dieſer Linie angebracht wird, ein Gleichgewicht erhalten werde. Ich ſage, in gewiſſer Abſicht betrachtet. Denn es wird ſich zeigen laſſen, daß es auf dieſer Linie einen Punct giebt, welcher vorzüglicher, als jeder andere, den Namen des Vereinigungspuncts verdient.

§. 66.

Wir wollen, um dieſe Betrachtungen deutlicher zu machen, die Richtung der Kraft vertical nennen, und uns anfangs nur eine durch den Körper gehende verticale Linie vorſtellen, welche es auch immer ſey. Da die Kraft auf jede Puncte des Körpers wirkt, ſo wirkt ſie auch auf jede Puncte dieſer Linie, und zwar, weil ſie vertical iſt, nach der Richtung der Linie ſelbſt. Da wir dieſer Linie, ſo wie dem Körper ſelbſt eine abſolute Steifigkeit (§. 29.) geben, ſo läßt ſich der ganzen auf jede Puncte derſelben wirkenden Kraft eine Kraft von gleicher Gröſſe und Dimenſion, und in welchem Punct der Linie man will, entgegen ſetzen, ſo, daß dieſe derſelben das Gleichgewicht halten wird. (§. cit.) Wir wollen uns nun der freyen Wahl dieſes Puncts dergeſtallt bedienen, daß wir uns unter dem Körper eine horizontale, und folglich auf die Direction der Kraft ſenkrechte Fläche gedenken, und bemeldten Punct da ſetzen, wo die Linie die Fläche durchſchneidet. Und ſo werden wir für jede durch den Körper gehende Verticallinie auf dieſer Fläche einen

Durchſchnitspunct haben, wo ſich die entgegen wirkende und das Gleichgewicht haltende Kraft anbringen läßt. Dieſe entgegen wirkende Kräfte, werden demnach auf dem ganzen Raum der Fläche, ſo weit nemlich aus dem Körper verticale Linien darauf fallen, und zwar ſo ungleich man es auch ſetzen will, vertheilt. Es erhellet aber aus dem vorhergehenden (§. 63.) daß, ſo ſehr ſie auch ungleich vertheilt ſeyn mögen, ſich mit Beybehaltung des Gleichgewichtes ihrer Summe in einem Punct vereinigt und in gleicher Direction anbringen laſſen. Dieſen Punct gedenke man ſich in der durch denſelben gezogenen ebenfalls abſolute ſteifen Verticallinie, ſo iſt wiederum klar, daß man dieſe Summe in jedem beliebigen Punct dieſer Linie wird anbringen, und immer das Gleichgewicht erhalten können. Dieſes iſt demnach die Linie, von welcher im vorhergehenden §. die Rede war. Und man ſieht zugleich, daß es bey jeder Stellung oder Lage jedes Körpers eine ſolche giebt, weil der Beweis beydes willkührlich ſeyn läßt. Da eine ſolche Linie die Directionslinie (der vereinigten Kraft iſt, ſo werden wir ſie,) Kürze halber, ſo nennen. Es iſt dabey nun allerdings merkwürdig, daß unerachtet es deren bey jedem Körper unzählige giebt, ſie ſich dennoch ſämtlich, jedoch unter gewiſſen Bedingungen, in einem Punct durchſchneiden. Und dieſes iſt nun der Punct, von dem vorhin §. 65.

eben-

ebenfalls die Rede war. Das Vorzügliche davon beſteht darin, daß er allen dieſen Directionslinien gemeinſam iſt, und daß folglich jede ſehr leicht gezogen werden kann, wenn man einmal dieſen Punct weiß. So iſt auch klar, daß wenn dieſer Punct unbeweglich geſetzt wird, ſo, daß ſich der Körper daran auf alle Arten drehen läßt, derſelbe, wie man ihn auch immer gedreht hat, durch die Wirkung der Kraft nicht gedreht wird, ſondern ſchlechthin in Ruh, das will ſagen, auf allen Seiten im Gleichgewichte bleibt. Wir haben aber theils zu zeigen, daß es bey jedem Körper einen ſolchen Punct giebt, und welches die Bedingungen ſind, die wir annehmen müſſen, um dieſe Ausſage nicht allgemeiner anzugeben, als ſie in der That ſtatt finden können. Um demnach alles dieſes auf die deutlichſte Art vorzutragen, werden wir bey dem Einfachſten anfangen, und ſo fortfahren, daß wir nur wenige Schritte bis zum Ziele werden zu thun haben.

§. 67.

Es ſeyn zween Puncte A, B einer unbiegſamen Linie A B; ſo iſt aus dem obigen klar, daß wenn auf dieſelben zwo Kräften a, b ſenkrecht drücken, ein Punct C gefunden werden kann, wo ſtatt der beyden Kräfte ihre Summe a + b in einer gleichfalls auf die Linie ſenkrechten Richtung angebracht werden kann; und daß Fig. XV.

$$(a+b):AB=a:CB=b:AC$$

iſt. (§. 33.) Man ſetze nun, die Kräfte a, b drücken auf eben die Puncte A, B in einer zwar parallelen aber gegen die Linie ſchiefen Richtung DA, EB; ſo nehmen wir hiebey die Bedingung an, daß jeder dieſer Puncte, für ſich betrachtet, eben ſo gedrückt werde, als wenn er für ſich ganz allein wäre, oder, welches einerley iſt, daß wenn keine Kraft entgegen wirkt, die Linie AB ſich in einer immer parallelen Richtung herunter bewegen, und die Puncte A, B zu gleicher Zeit auf Aα, Bϐ eben ſo weit kommen, als wenn jeder für ſich herunter gedrückt würde. Man gedencke ſich in A, B zwo ebenfalls unbiegſame Linien in der Direction DAα, EBϐ befeſtigt, ſo, daß ſie die Linie αϐ unter rechten Winkeln berühren, und gegen dieſelbe den von beyden auf A, B wirkenden Kräften empfangenen Druck äuſſern. Da demnach dieſer Druck a, b iſt; ſo läßt ſich derſelbe in einem Punct γ als vereinigt gedenken, und es wird

$$(a+b):\alpha\beta=a:\gamma\beta=b:\alpha\gamma$$

demnach

$$\alpha\gamma:\gamma\beta=AC:CB$$

demnach die Linie Cγ mit Aα, Bϐ parallel ſeyn, oder, welches einerley iſt, die durch γ ſenkrecht gezogene Linie, wird durch den Punct C gehen. Wird daher eine Kraft $=a+b$ in entgegengeſetzter Richtung auf einen Punct der

der Linie γ C angebracht, ſo bleibt das Syſtem im Gleichgewichte.

§. 68.

Hiebey iſt nun für ſich klar, daß ſich in einem Körper, auf deſſen jede Puncte parallele Kräfte drücken, unzählige ſolcher ſchiefen Linien, dergleichen A B iſt, gedenken laſſen, und daß wir daher, der ſchiefen Lage ungeachtet, den Druck auf die Puncte A, B eben ſo abſolut ſetzen konnten, wie derſelbe in Abſicht auf jede in dem Körper befindliche Puncte genommen wird. Da nun ferner in dem Beweiſe, daß die durch γ ſenkrecht gezogene Linie durch den Punct C geht, der Neigungswinkel D C A gar nicht vorkömmt, folglich dieſer Satz bey jeder ſchiefen Lage der Linie A B ſtatt hat; ſo hat der Punct C vor jeden Puncten der Linie C γ das voraus, daß wenn die Kraft a + b in C angebracht wird, ſie immer in der Linie C γ iſt, und daher der Punct C bey jeder ſchiefen Lage als der Vereinigunspunct der Kraft angeſehen werden kann, jedoch immer auch mit der Vorausſetzung, daß die Kraft a + b den Punct C, ungeachtet derſelbe in der Linie AB genommen wird, eben ſo abſolute herauf drücke, als wenn derſelbe ganz allein wäre.

§. 69.

Man ſetze nun drey unbiegſame Linien A B, B C, C A in Form eines Triangels an einander beveſtigt. Auf die 3 Endpuncten drücken Fig. XI.

die Kräfte a, b, c in beliebiger jedoch parallelen Richtung; ſo erhellet aus erſtgeſagtem, daß ſtatt der Kräfte a, b ihre Summe a + b nach eben der Richtung, mit einerley Erfolg, in dem Vereinigunspunct Q könne angebracht werden, ſo, daß

$$(a+b):AB=a:QB=b:QA$$

iſt. Dieſe Aenderung vorgenommen, ſo erhellet auf eben die Art, daß ſtatt der in Q und C angebrachten Kräfte a + b, c in P ihre Summe a + b + c in eben der Richtung, mit eben dem Erfolge angebracht werden könne, ſo, daß

$$(a+b+c):QC=(a+b):PC=c:QP$$

iſt. Demnach, welche Richtung die Kräfte, ſo jedoch parallel auf die Puncte A, B, C wirken, auch immer haben, ſo wird das Syſtem in Ruhe bleiben, wenn der Punct P unbeweglich, oder die Summe der Kräfte in entgegengeſetzter Richtung auf denſelben angebracht iſt.

§. 70.

Man ſieht nun hieraus ohne Mühe, daß was wir in vorhergehendem Abſchnitte von dem Vereinigungspunct, der auf ebene unbiegſame Flächen ſenkrecht wirkenden Kräfte, erwieſen haben, auch von jeder ſchiefen jedoch parallelen Richtung gelte; immer aber mit der Vorausſetzung, daß jeder Punct der Fläche eben ſo gedrückt werde, als wenn derſelbe für ſich allein wäre. (§. 67. 68.) Gedenkt man ſich demnach

nach in einem Körper unzählige parallele ebene Flächen, ſo hat jede derſelben ihren Vereinigungspunct, auf welchen die auf jede Puncte derſelben wirkenden Kräfte concentrirt angebracht werden können. Dieſe Vereinigungspuncte liegen ſämtlich in einer mehrentheils krummen Linie, und ſo laſſen ſich die auf dieſer Linie von den Flächen concentrirte Kräfte in einen einigen Punct concentriren, welcher, wenn er unbeweglich iſt, bey jeder jedoch parallelen Richtung der Kräfte, den Körper in Ruhe und auf jeden Seiten im Gleichgewicht erhält. Uebrigens iſt klar, daß hiebey vorausgeſetzt wird, daß wenn die auf jeden Punct des Körpers wirkende Kraft, ungleich vertheilt iſt, die auf jeden Punct wirkende bey jeder geänderten Richtung eben die bleibe, oder, wenn ſie gröſſer oder kleiner wird, bey jeden Puncten, auf eine proportionale Art, gröſſer oder kleiner werde. Und dieſes iſt die andere Bedingung, die wir hier, wo ſie deutlicher konnte vorgetragen werden, noch haben beyfügen ſollen.

§. 71.

Die Beſtimmung des Vereinigungspuncts der Kräfte, ſo auf jede Puncten eines Körpers in paralleler Richtung, und überhaupt unter den bereits vorgetragenen Bedingungen wirken, kommt auf die Beſtimmung zwoer Directionslinien der vereinigten Kraft (§. 66.) an, wozu wir die Methode im vorhergehenden

(§. cit.) angegeben haben. Die Berechnung kann in vielen Fällen ungemein weitläuftig werden; ſo wie ſie ſich hingegen ſehr abkürzt, wenn der Körper mit lauter ebenen Flächen umgränzt und die Kraft durchaus gleich vertheilt iſt. Denn da läßt er ſich in trianguläre Pyramiden theilen, und für jede wird der Vereinigungspunct der auf jede Puncte derſelben wirkenden Kraft leicht gefunden. Denn man ſucht denſelben für zwo ihrer Flächen oder Seiten, und zieht aus denſelben in die gegenüberſtehende Ecke gerade Linien; und ſo wird der Durchſchnittspunct dieſer Linien der geſuchte Vereinigungspunct der Pyramide, oder der auf dieſelbe gleich vertheilten Kraſt ſeyn. Der Beweis hievon iſt demjenigen, den wir (§. 64.) für den geradelinichten Triangel gegeben haben, völlig ähnlich.

§. 72.

Da die auf den ganzen Körper vertheilte Kraft ihre Wirkung in einem Punct vereinigt, (§. 70.) ſo läßt ſich der ganze Körper gleichſam als in dieſen Punct concentrirt gedenken, auf welchen die ganze Summe der Kraft wirkt. Zu dieſem Punct kann noch einer oder mehrere andere kommen, nemlich, wenn z. E. der Körper irgend einen unbeweglichen Punct hat, oder auch wenn derſelbe in einem oder mehrern Puncten mit andern Körpern zuſammen hängt, und ein Syſtem ausmacht, deſſen Theile untereinader bewegt werden können. So z. E. kann

kann im erſten Fall A einen Körper, B den Fig. XV.
unbeweglichen Punct vorſtellen, und da wird kein Ruheſtand ſeyn, dafern nicht das Syſtem A B in der Directionslinie der Kraft 6 γ iſt. Denn die auf A wirkende Kraft entfernt den Körper von ſich, oder treibt ihn fort, ſo weit es die Einrichtung des Syſtems zuläßt. Dieſes giebt immer ein maximum. Im andern Fall ſind z. E. B, C Körper, A, D unbeweg- Fig. XI.
liche Puncte, A B, B C, C D Linien, die ſich um die Puncte A, B, C, D drehen laſſen. Die Körper B, C haben auf der Linie B C ihren Vereinigungspunct. Und wirkt die Kraft nach der Direction A K, ſo äuſſert ſie ihre Wirkung auf dieſen Punct durch Forttreiben, bis derſelbe von der Linie A G ſo weit entfernt iſt, als es der Mechaniſmus des Syſtems zuläßt. Und dieſes giebt wiederum ein maximum.

§. 73.

Wird die Figur eines Körpers mit dem Bedinge geändert, daß er von einerley Gröſſe bleibt, und die auf jeden Punct wirkende Kraft, nach wir vor, auf denſelben gleichen Druck äuſſert, ſo bleibt die ganze auf den Vereinigungspunct gerichtete oder concentrirte Wirkung, vor wie nach, eben dieſelbe, nemlich die Summe jeder einzeln Kräfte. Dieſes macht demnach, daß ein Körper ſich unter einer viel allgemeinern Bedingung, als in einen Punct concentrirt, gedenken läßt. Am allgemeinſten

aber iſt dieſe Bedingung, wenn die Summe der auf jede Puncte des Körpers parallel wirkenden Kräfte einerley bleibt, dieſe Kräfte mögen ſich unter ſich verändern, ſo viel man will.

VII. Einige ſtatiſche Definitionen und Sätze.

§. 74.

Wir können nun, ehe wir weiter gehen, das bisher geſagte auf die in der Natur vorkommende Kraft der Schwere anwenden, welche überhaupt die auf der Erdfläche befindliche Körper unterwerts drückt. In dieſer Abſicht wird in jedem Körper oder Syſtem der Punct, wo die Kraft der Schwere ihre Wirkung vereinigt, der **Mittelpunct der Schwere**, centrum grauitatis, genennt. Wir müſſen aber einige Erfahrungen zu Hülfe nehmen, um zu ſehen, was es damit für eine Bewandniß habe?

§. 75.

Die erſte iſt, daß die Richtungslinie der vereinigten Kraft der Schwere allemal unterwerts geht. Man ſieht dieſes, es ſey daß man einen Körper den Druck der Schwere überlaſſe, das will ſagen, fallen laſſe, oder daß man denſelben an einen Faden, das will ſagen, biegſame Linie, hänge. Die Schwere,

oder

oder das Gewicht des Körpers wird nach dem Drucke geſchätzt, den die Kraft der Schwere auf denſelben äuſſert. Da dieſer Druck nach der Richtungslinie der vereinigten Kraft ſich äuſſert, und dieſe Richtungslinie immer vertical, demnach parallel iſt, ſo läßt ſich, um die Gewichte zu vergleichen, der Hebel dazu gebrauchen. Und da giebt die Erfahrung folgendes an:

§. 76.

Der Hebel AB liege auf dem unbeweglichen Punct C, und ſey entweder gar nicht, oder auf beyden Seiten gleich ſchwer, damit derſelbe für ſich im Gleichgewichte ſey. In H, F hängen zween Körper an, welche folglich nach der verticalen Richtung JH, GF herunter gedrückt werden. Halten ſie nun einander das Gleichgewicht, und die Entfernungen CH, CF ſind ungleich, ſo iſt auch das Gewicht beyder Körper in eben der Verhältniß ungleich, weil Fig. VIII.

$$H : F = CF : CH$$

iſt. (§. 35.) Dieſes folgt aus der erſtgegebenen Definition des Gewichtes.

§. 77.

Nun giebt die Erfahrung an, daß ſo viel man die Figur des Körpers ändert, nur daß von ſeiner Materie nichts verlohren gehe, auch wenn man denſelben hohl macht, das Gleich-

gewicht immer bleibe; daß eben dieſes ſtatt habe, an welchem Punct ſeiner Oberfläche man denſelben anhänge. Hingegen aber, daß, man mag inwendig oder auswendig von ſeiner Materie wegnehmen, das Gleichgewicht aufhöre, und der Körper leichter werde. Hieraus folgert man, die Kraft der Schwere drücke nicht auf den leeren Raum, und auch nicht blos auf die Oberfläche, ſondern auf die ſowohl in- als auswendige Materie des Körpers.

§. 78.

Theilt man den Körper in beliebige Stücke, ſo giebt die Erfahrung ebenfalls, daß die Summe der einzeln Gewichte eines jeden Stückes, dem Gewicht des ungetheilten Körpers gleich iſt. Und daraus folgt, daß jeder Theil der Materie der Körper durch die Kraft der Schwere, für ſich gedrückt, und dieſer Druck durch die Verbindung dieſes Theils mit andern weder vermehrt noch vermindert wird. So wird auch daraus begreiflich, daß ſich bey gleichartigen Körpern, das Gewicht mit dem Raum, den ſie einnehmen, in gleicher Verhältniß vergröſſert. Denn man gedenke ſich einen ſolchen Körper in gleich groſſe Theile vertheilt oder zerlegt. Da nun die Summe des Gewichts dieſer Theile, jedes einzeln gewogen, dem Gewichte des ganzen Körpers, zufolg erſterwähnter Erfahrung, gleich iſt, die Theile ſelbſt auch wegen der Gleichartigkeit, gleich viel Materie haben,

haben, und wenn auch ihre Figur nicht gleich ſeyn ſollte; dieſe am Gewichte nichts åndert (§. 77.) ſo folgt hieraus, auch wenn es nicht unmittelbar durch die Erfahrung erörtert werden könnte, daß jeder dieſer Theile gleich viel wågen müſſe, und ſich folglich das Gewicht eines jeden umgekehrt, wie die Anzahl der Theile verhalte, in welche man den Körper zertheilt hat. Da nun die Gröſſe eines jeden Theils ſich, ebenfalls umgekehrt, wie dieſe Anzahl verhålt; ſo iſt nothwendig, daß das Gewicht in Verhåltniß der Gröſſe, und hinwiederum die Gröſſe in Verhåltniß des Gewichts ſey. Das will nun ſagen, daß in einem gleichartigen Körper die Kraft der Schwere durchaus gleich vertheilt ſey. Dieſes nebſt der parallelen Richtung der Kraft macht demnach, daß viele von den in den vorhergehenden Abſchnitten vorgetragenen Såtzen, wenn ſie auf gleichartige Körper und die darauf wirkende Kraft der Schwere angewandt werden, ſehr in die Kürze gezogen werden können. Beſonders wird die Beſtimmung ihres Mittelpuncts der Schwere dadurch ſehr abgekürzt. (§. 71.)

§. 79.

Die Gleichartigkeit, von welcher hier die Rede iſt, erfordert fürnemlich die durchaus gleiche Vertheilung der Materie, aus welcher der Körper beſteht. Iſt dieſe ungleich vertheilt, ſo iſt der Körper ungleich dichte, und daher

auch

auch in ſeinen verſchiedenen Theilen ungleich ſchwer. Dieſes hat nun eben den Erfolg, als wenn die Kraft der Schwere ungleich vertheilt wäre. Da aber dieſe ungleiche Vertheilung auf einerley Theile oder Puncte fällt, wie man immer den Körper umwendet; ſo ſieht man, zufolge des §. 71, daß auch ein ſolcher Körper einen, ich will ſagen, einen einigen Mittelpunct der Schwere habe, in welchem nemlich die Kraft der Schwere bey jeder Lage des Körpers ihre dem Gewicht deſſelben gleiche Wirkung vereiniget. (§. 74. 75.) Da nun eben dieſes von jedem Syſtem von Körpern gilt, die mit einander verbunden ſind, ſo ſieht man aus dem §. 72 ebenfalls, daß, wenn dieſe Theile unter ſich bewegt werden können, das Syſtem nicht in Ruhe ſeyn werde, bis die Kraft der Schwere den Mittelpunct der Schwere des ganzen Syſtems, ſo weit es der Mechaniſmus deſſelben zuläßt, fortgetrieben hat, und folglich, weil die Schwere unterwerts drückt, dieſer Mittelpunct am tiefſten Orte iſt.

VIII. Die Zuſammenſetzung der Kräfte.

§. 80.

Die erſt gemachte Anmerkung von dem tiefſten Orte des Mittelpuncts der Schwere, läßt ſich bey Beſtimmung des Gleichgewichtes

eines Syſtems ſehr vortheilhaft gebrauchen. Es ſey z. E. in einer horizontalen Linie A B zween unbewegliche Puncte. An A werde ein Faden A C B P befeſtigt, an welchem in C ein Gewicht Q herunter hange. Der Faden ſelbſt laſſe ſich über den Punct P wie über einer Rolle ziehen, ſo, daß wenn das anhangende Gewicht P herunter gezogen, oder noch mehr beſchwert wird, das Gewicht Q in die Höhe ſteige, oder hinwiederum ſich noch mehr herabziehe, wenn das Gewicht P erleichtert wird. Läßt man nun das ganze Syſtem frey hangen, ſo werden ſich die beyden Gewicht auf- und herunter bewegen, bis ſie einander das Gleichgewicht halten, oder, welches einerley iſt, bis der Mittelpunct der Schwere am tiefſten iſt. Die Entfernung dieſes Mittel-Puncts der Schwere von der horizontalen Linie A B, welche das Maaß ſeiner Vertiefung iſt, findet ſich nach §. 61, wenn man Q mit Q F, und P mit P B multiplicirt, und die Summe beyder Producte durch die Summe der Gewichte $P + Q$ dividirt. Es ſey demnach Fig. XVI.

$$AB = a \qquad AF = y$$

$$AC = b \qquad CQ = e$$

$$CB + BP = c$$

ſo iſt

$$CF = \surd(bb - yy)$$

$$CB = \surd(aa + bb - 2ay)$$

dem-

demnach

$$FQ = e + \sqrt{(bb - yy)}$$
$$BP = c - \sqrt{(aa + bb - 2ay)}$$

und folglich, wenn die Vertiefung des Mittelpuncts der Schwere = z geſetzt wird,

$$z = \frac{Qe + Q\sqrt{(bb-yy)} + Pc - P\sqrt{(aa+bb-2ay)}}{Q+P}$$

Da nun z ein maximum ſeyn muß, ſo wird $dz = 0$. Und ſo findet man nach geſchehener Differentiation

$$0 = -\frac{Q.y}{\sqrt{(bb-yy)}} + \frac{P.a}{\sqrt{(aa+bb-2ay)}}$$

oder

$$0 = -Qy : CF + Pa : CB$$

und hieraus

$$P:Q = \frac{y.CB}{a.CF} = \frac{AF.CB}{AB.CF}$$

Man ziehe B D mit A C parallel, ſo ſind die Triangel AFC, FBD einander ähnlich, und es iſt

$$AF : CF = AB : CD$$

demnach

$$CD = \frac{CF.AB}{AF}$$

Setzt man dieſen Werth in der gefundenen Formel

$$\frac{P}{Q} = \frac{AF.CB}{AB.CF}$$

ſo

ſo erhält man

$$P:Q = CB:CD$$

Dieſer Analogie werden wir uns nun folgendermaſſen bedienen können.

§. 81.

Der Punct C wird erſtlich von dem Gewichte Q mit einer demſelben gleichen Kraft (§. 75.) herunter gezogen. Sodann, da das Gewicht P über die Rolle B hängt, ſo zieht daſſelbe den Punct C nach der Richtung CB gegen B, wiederum mit einer Kraft = P. Nun läßt ſich in A ebenfalls eine Rolle mit einem herunterhangenden Gewichte p gedenken, welches den Faden AC, ſo viel zieht, als es die Erhaltung des Gleichgewichtes erfordert. Zieht man demnach AE mit CB parallel, ſo wird man

$$p:Q = AC:CE$$

haben. Nun iſt wegen der Aehnlichkeit der Triangel CAE, DBC,

$$AC:CE = DB:DC$$

demnach

$$p:Q = DB:DC$$

§. 82.

Wird nun dieſe Analogie mit der erſtern (§. 80.) verglichen, ſo findet ſich

$$Q:DC = P:CB = p:DB$$

das will nun ſagen, die Kräfte, womit der Punct

C ge-

C gegen Q, B, A gezogen wird, ſind in Verhältniß der Seiten DC, CB, DB des Triangels DCB, oder wenn das Parallelogramm CBDG vollends ausgezogen wird, in Verhältniß der Diagonale CD und der Seiten CB, CG, oder, welches ebenfalls einerley iſt, in Verhältniß der Sinus der Winkel ACB, ACD, DCB; daher jede Kraft in Verhältniß des Sinus des Winkels, den die Directionslinien der beyden andern Kräfte mit einander machen.

§. 83.

Da hiebey jede Kraft den beyden andern das Gleichgewicht hält, und überhaupt jeder Kraft eine gleich groſſe entgegen geſetzt werden kann, ſo iſt klar, daß dieſe entgegengeſetzte eben den Effect thut, den die beyden andern Kräfte thun. Demnach läßt ſich für dieſe jene, und hinwiederum für jene dieſe, ohne Nachtheil des Gleichgewichtes, anbringen. Dieſe Verwechſelung wird die **Zuſammenſetzung und Auflöſung der Kräfte** genennt.

§. 84.

Man ſtellt aus dieſen Gründen, die nach verſchiedenen Richtungen auf einen Punct wirkende Kräfte durch Linien vor, welche den Kräften proportional und in deren Richtung ſind. Fig. XVII. Und da iſt jede der Linien AC, BC, DC der Diagonale des Parallesgramms gleich, welches

welches ſich mittelſt der beyden andern Linien ziehen läßt, z. E. AC = Ca, BC = Cb, DC = CD. Da nun den Kräften CB, CD eine Kraft CA ſubſtituirt werden kann, und dieſe, wenn die Kraft AC nicht da wäre, den Punct C entweder gegen ſich ziehen, oder wenn ſie drückt, gegen A drücken würde, ſo ſieht man, daß eben dieſes auch würde von den ziehenden oder drückenden Kräften BC, DC geſchehen, wenn die Kraft A nicht das Gleichgewicht hielte.

§. 85.

Bey dieſem letzten Satze wird in den meiſten bisher herausgekommenen ſtatiſchen Schriften, der Anfang zum Beweiſe der Zuſammenſetzung der Kräfte gemacht. Man ſetzt nemlich zwo Kräfte BC, DC, die in nicht gerader noch entgegengeſetzter Richtung BC, DC auf den Punct C drücken. Wäre nun jede Kraft allein; ſo würde ſie dieſen Punct in eben der Richtung fortdrücken, in welcher ſie auf denſelben wirkt, demnach CB gegen b, CD gegen D. Aeuſſern aber beyde Kräfte ihren Druck zugleich; ſo kann der Punct C unmöglich nach beyden Richtungen zugleich bewegt werden, weil er ſonſt zweyen Orten zugleich ſeyn müſte. Alles dieſes iſt ganz Sonnenklar. Was aber erfolgen werde, iſt eine ganz andere Frage. In der That könnte man aus erſtbemeldter Unmöglichkeit, daß der Punct C nicht

zugleich an zweyen Orten seyn könne, den Schluß machen, derſelbe müſſe nothwendig in C bleiben. Dieſer Schluß geht aber nur an, wenn die Kräfte gleich und in entgegengeſetzter Richtung angebracht ſind. (§. 13.) Denn Kräfte, die zugleich auf einen Punct wirken, laſſen ſich nicht als jede für ſich wirkend gedenken, wenn man auf das Product beyder Wirkungen ſehen will. Man ſetze z. E. um den leichteſten Fall zu betrachten, zwo gleiche Kräfte ſeyn in gleicher Direction und zugleich auf einen Punct angebracht, ſo will dieſes ſagen, die Summe von beyden, oder eine ihrer Summe gleiche Kraft wirke auf denſelben. Wolte man hier jede für ſich betrachten, ſo könnte man den Schluß machen, daß beyde zuſammen nicht mehr ausrichten, als eine allein. Denn indem die eine den Punct fortdrückt, läßt ſie der andern nichts zu drücken übrig. Oder wenn die eine den Punct C bis in b fortdrückt, ſo drückt denſelben die andere ebenfalls bis in b fort, und ſo würde folgen, der Punct C komme in gleicher Zeit in b, es mögen beyde Kräfte oder nur eine drücken. Es iſt offenbar, daß die Kräfte, gleichſam ehe ſie noch den Druck äuſſern, als ſchon zuſammengeſetzt angeſehen werden müſſen. Denn jeder Druck, für ſich betrachtet, läßt ſich eben ſo gut als nach dem andern angebracht gedenken. Ungeachtet demnach jede der Kräfte CB, DC, jede allein genommen, den Punct C in ihrer Richtung fort-

drücken

drücken würde, ſo kann man aus dieſer Betrachtung keinen Vortheil ziehen, um zu erörtern, was erfolgen werde, wenn dieſe Kräfte zugleich angebracht ſind. Der einige Fall, wo es angeht, iſt wenn die Kräfte gleich ſind, und einander entgegen wirken. Denn man ſieht leicht, daß die Richtung der Kräfte mit in Betrachtung kömmt, ſobald ſie zuſammengeſetzt, das will ſagen, zugleich angebracht werden. Denn da ſieht man bey entgegengeſetzten gleichen Kräften A C, C a ohne Mühe, daß der Punct C, auch wenn er bewegt würde, auf der Linie A C a bleiben muß, weil keine der Kräfte herauf oder herunter drückt. Daß er aber keiner derſelben nachgebe, folgt ſodann, weil er einer wie der andern nachgeben müßte, und ſo an zwey Orten zugleich ſeyn würde.

§. 86.

Man hat aber, um ſich demnach einigermaſſen auszuhelfen, angenommen, daß die Bewegung des Puncts C nach beyden Directionen begreiflich gemacht werden könne, wenn man, indem ſich der Punct C gegen b bewegt, demſelben und der ganzen Linie C b eine Bewegung nach der Direction C d giebt. Sind die Geſchwindigkeiten den Linien C b, C d proportional, ſo läßt ſich allerdings begreifen, daß der Punct b in eben der Zeit in A treffen werde, in welcher C in b kommen würde, wenn derſelbe ſich ſchlechthin nur nach der Direction C b bewegte, und nicht zugleich auch mit der Linie

Cb nach der Direction Cd bewegt würde. Geſchieht aber beydes, ſo durchläuft der Punct C unſtreitig die Linie AC. Dieſe ganze Betrachtung iſt aber ſchlechthin nur phoronomiſch und ideal (§. 2.) dafern man nicht zeigen kann, daß man aus der Zuſammenſetzung der Kräfte berechtigt ſey, die Bewegung der Linie Cb und des darauf ſich bewegenden Puncts C, nach der Richtung Cd anzunehmen. Es iſt klar, daß man, um hiezu berechtigt zu ſeyn, nicht nur der Linie Cb, ſondern ſelbſt auch der Kraft CD eine Bewegung nach der Directon Cb geben müſſe, denn widrigenfalls würde ſich der Druck nicht nach der Direction Cd äuſſern. So z. E. wenn ſich ein Schiff nach der Linie Cb bewegt, und eine Flinte wird nach der Linie Cd gerichtet. Drückt man dieſelbe loß, ſo hat die Kugel, ſo lange ſie in dem Laufe iſt, allerdings eine gedoppelte Bewegung. Denn einmal bewegt ſie ſich nach der Länge des Laufes der Flinte in der Direction Cd; ſodann zugleich mit der Flinte in der Direction Cb. Dieſe beyde Bewegungen aber ſind nur relativ. Man folgert aber richtig daraus, daß wenn die relativen Geſchwindigkeiten Cd, Cb ſind, die abſolute Geſchwindigkeit und zugleich die Direction derſelben CA ſeyn werde. Dieſes würde nicht ſeyn, wenn die Flinte, durch deren Loßbrennen der Kugel die Bewegung nach der Direction Cd gegeben wird, ſich nicht ſelbſt nach Cb bewegte.

§. 87

§. 87.

Wollte man aber ſtatt der wirklichen Bewegung nur die Sollicitation zu derſelben nehmen, wie denn eine ſolche Sollicitation ſelbſt bey dem Gleichgewichte, wo alles in Ruhe iſt, allerdings vorkömmt; ſo iſt es dennoch auch hier nicht genug, zu ſagen, der Punct C werde gegen b und d zur Bewegung ſollicitirt. Denn einmal iſt er es, ſobald die Kräfte wirklich zuſammengeſetzt ſind, in der That nicht, weil ſie ſich nicht mehr ſo, als wenn jede allein wäre, betrachten laſſen. Wenn man aber auch dieſes zugiebt, wie es denn in verſchiedenen Abſichten und unter gehörigen Bedingungen zugegeben werden kann, ſo läßt ſich aus dieſer Sollicitation noch nichts, auf eine der vorigen ähnliche Art ſchlieſſen, dafern man nicht mit annimmt, daß ſelbſt auch die Kraft CD nach der Direction Cb, und ſo auch die Kraft CB nach der Direction Cd ſollicitirt werde. Dieſes ſchiene nun noch zwo neue Kräfte zu erfordern. Sie ſind aber nicht nothwendig. Denn eben darin beſteht nun das, was die eigentliche Zuſammenſetzung der Kräfte ausmacht, und was zugleich der Grund iſt, warum zuſammengeſetzte Kräfte nicht eben ſo, wie wenn jede allein wäre, angeſehen werden können. Denn man kann ſie ſo anſehen, als wenn jede die andere nach ihrer eigenen Richtung ſollicitirte, eben ſo wie ſie bey einerley Richtung ſich ganz in eine Summe vereinigen, bey entgegengeſetzter Richtung

aber ganz oder zum Theil unwirkſam machen. Dieſes hat nun bey ſchiefen Richtungen, dergleichen BC, DC ſind, den Erfolg, daß was jede Kraft auf die Sollicitation der andern verwendet derſelben abgeht. Daß man aber die Sollicitation der einen ganz auf Rechnung der andern ſetzen, und daher z. E. CD ganz auf den Punct C wirkend, BC aber als auf den Punct C und die Kraft CD zugleich wirkend anſehen könne, folgt aus dem bishergeſagten noch nicht. Nimmt man es indeſſen an, und läßt die Bewegung erfolgen, ſo bewegt ſich die Kraft D mit dem Punct C nach Cb, während dem ſie dieſen Punct nach der Direction Dc bewegt, und ſo würde mehr oder minder eine Bewegung des Puncts C nach einer Diagonallinie CA erfolgen.

§. 88.

Dieſes ſind aber noch nicht alle Schwürigkeiten, die bey dem gewöhnlichen Beweiſe von der Zuſammenſetzung der Kräfte vorkommen. Denn es iſt nicht genug, daß man aus den relativen Geſchwindigkeiten CB, CD, die abſolute AC finde. Man muß ferner dabey annehmen, daß dieſe Geſchwindigkeiten in Verhältniß der Kräfte ſind, wenn man ſodann den Schluß machen will, daß AC nicht nur die Direction und Geſchwindigkeit des Puncts C, ſondern zugleich auch das Maaß der zuſammengeſetzten Kraft ſey, daß aber der angenommene Satz

von

von dem Verhälniß der Geſchwindigkeit und Kraft wahr ſey, hat man deswegen fürgegeben, weil es derjenige Satz iſt, den wir bey Betrachtung des Hebels oben (§. 49.) vorgebracht und unterſucht haben. Man ſetze aber, daß derſelbe in gleichem Verſtande (denn mehr iſt noch nicht erwieſen) auch bey dem Gleichgewichte dreyer Kräfte vorkommen; ſo muß der einen Kraft eine Ueberwucht gegeben werden, und da haben wir oben (§. 49. ſeqq.) geſehen, daß die daherrührende Geſchwindigkeit weder in gerader Verhältniß der Ueberwucht, noch der Kraft, noch der Laſt, das will hier ſagen, der beyden andern Kräfte, ſey.

§. 89.

Wir können aus allen dieſem die Folge ziehen, daß wenn man je die Zuſammenſetzung der Kräfte aus der bey Hebung des Gleichgewichtes erfolgenden Bewegung herleiten will, dieſe Bewegung ſelbſt vorerſt auf ihre ächte Gründe gebracht werden müſſe. Und wenn auch dieſes geſchieht, ſo wird ſich bey der Theorie der aus zuſammengeſetzten Kräften erfolgenden Bewegung immer zeigen, daß man vorerſt die Zuſammenſetzung der bloßen Sollicitationen, oder des bloßen Druckes der Kräfte wiſſen müſſe, weil man ſonſt immer auf die Schwürigkeiten der bewegten Linie C b und der zugleich mit bewegten Kraft CD verfällt.

§. 90.

Es haben demnach diejenigen, welche von ſolchen erfolgenden Bewegungen ganz abſtrahirt haben, immer ungleich beſſer und richtiger verfahren. Die Bedingung des Gleichgewichtes fordert ſchlechthin nur, daß der Punct C nicht bewegt werde. Und dabey will man nicht wiſſen, welche Bewegung bey Hebung des Gleichgewichts erfolgen würde, denn es ſoll ſchlechthin gar keine erfolgen. Man betrachtet das Syſtem als in völliger Ruhe, und ſucht nur die Verhältniſſe der Kräfte und ihrer Richtung, die dabey vorkommen, und ohne welche der Ruheſtand oder das Gleichgewicht nicht ſtatt findet. Und ſo läßt ſich die Zuſammenſetzung der Kräfte aus der Theorie des gebogenen oder Winkelhebels, ſo wie aus der Theorie mehrerer anderer ſtatiſchen Syſtemen von Körpern allerdings herleiten. Wir können dahin auch noch folgende Betrachtung rechnen.

§. 91.

Fig. XVIII. Es ſeyn in P, Q, R drey Kräfte, welche den Punct C ſämtlich an den Linien oder Faden PC, QC, RC gegen ſich zu ziehen ſtreben, ſo wird es irgend eine Lage des Puncts C geben, in welcher derſelbe im Gleichgewichte gehalten wird. Dabey muß nun ebenfalls ein maximum oder ein minimum ſtatt haben, und man kann ſich letzteres leicht vorſtellen. Denn

es iſt

es iſt klar, daß in dem Stande des Gleichgewichtes jede Kraft den Punct C, ſo viel es die beyden übrigen zulieſſen, gegen ſich gezogen hat. Wären demnach die Kräfte ſämtlich gleich, ſo iſt klar, daß die Summe der Diſtanzen PC + QC + RC ein minimum ſeyn müſte. Da wir aber die Kräfte P, Q, R ungleich ſetzen, ſo läßt ſich dieſe Summe der Diſtanzen nicht ſo ſchlechthin nehmen. Es iſt aber erweisbar, daß man P.PC + Q.QC + R.RC als ein minimum anſehen könne. Man könnte vielleicht dieſen Satz daher leiten, daß, da jede Kraft den Punct C deſto näher gegen ſich zieht, je gröſſer dieſelbe iſt, in den Producten P.PC, Q.QC, R.RC, jede Diſtanz deſto kleiner heraus komme, je gröſſer die Kraft iſt, mit welcher dieſelbe multiplicirt wird. Ich ſehe aber dieſes nicht klar ein, und ſo werde ich lieber den Satz aus dem **tiefſten Orte des Mittelpuncts der Schwere** herleiten, und in dieſer Abſicht, um die Figur nicht mit Linien und fremden Umſtänden zu überladen, zu der 16ten Figur zurücke kehren. Denn da ſieht Fig. XVI. man leicht, daß wenn das Gewicht P herunter zieht der Punct C um eben ſo viel näher zu B komme, folglich der Theil des Fadens CB um eben ſo viel verkürzt werde, als der Theil BP verlängert wird. Da es nun bey der Beſtimmung des tiefſten Orts des Mittelpuncts der Schwere eigentlich nicht um die abſolute Länge des Fadens, ſondern nur um die

Verlängerung des Theils P B, oder, welches hier einerley iſt, um die Verkürzung des Theils C B zu thun iſt; ſo kann man eben ſo gut $-P.BC$ nehmen, als wir oben (§. 80.) $+P.BP$ genommen haben. Demnach hat, Fig. XVIII. um nun wiederum auf die 18te Figur zu kommen, der Ausdruck

$$P.PC+Q.QC+R.RC$$

poſitiv genommen, als ein minimum betrachtet, allerdings ſtatt, ungeachtet hieraus noch nicht aufgeklärt wird, was derſelbe, ſo erheblich er an ſich iſt, in der Figur noch anders als die bloſſe Summe dreyer Producte bedeute. Da derſelbe indeſſen richtig iſt, ſo werden wir ihn folgendermaſſen gebrauchen.

§. 92.

Man ziehe durch Q eine beliebige Linie Q J, und fälle aus P, R, C auf dieſelbe Perpendicularen PM, CN, RJ. Sodann ſetze man

$$QM=a \qquad QN=x$$
$$MP=b \qquad NC=y$$
$$QJ=c$$
$$JR=e$$

ſo findet man

$$QC=\sqrt{(xx+yy)}$$
$$CP=\sqrt{[(b-y)^2+(x-a)^2]}$$
$$CR=\sqrt{[(y-e)^2+(c-x)^2]}$$

demnach den Ausdruck

$$Q.\sqrt{(xx+yy)}+P.\sqrt{((b-y)^2+(x-a)^2)}$$
$$+R.\sqrt{((y-e)^2+(c-x)^2)}$$

welcher

welcher ein minimum ſeyn muß, es mag ſich x oder y allein, oder beyde zugleich, verändern. Demnach wird derſelbe, ſowol wenn man nach x als nach y differentiirt = o. Nimmt man demnach dieſe beyde Differentiationen vor, ſo erhält man die zwo Gleichungen

$$o=\frac{Q.x}{\sqrt{(xx+yy)}}+\frac{(x-a).P}{\sqrt{((b-y)^2+(x-a)^2)}}$$
$$+\frac{(x-c).R}{\sqrt{((y-e)^2+(c-x)^2)}}$$
$$o=\frac{Q.y}{\sqrt{(xx+yy)}}+\frac{(y-b).P}{\sqrt{((b-y)^2+(x-a)^2)}}$$
$$+\frac{(y-e).R}{\sqrt{((y-e)^2+(c-x)^2)}}$$

Werden dieſe mit der Figur verglichen, ſo ſieht man leicht, daß die Coefficienten von P, Q, R Sinus und Coſinus von Winkeln vorſtellen.

§. 93.

Man ziehe nemlich durch C eine mit QJ gleichlauffende Linie kCh; ſo laſſen ſich dieſe zwo Gleichungen folgendermaſſen ausdrücken:

$$o = Q.\cos kCQ + P.\cos kCP - R.\cos hCR$$
$$o = Q.\sin kCQ - P.\sin kCP + R.\sin hCR$$

§. 94.

Macht man demnach

$$Cp = P$$
$$Cq = Q$$
$$Cr = R$$

und

und fällt aus p, q, r auf k C h die Perpendiculären p n, q m, r h, ſo werden die zwo letztere Gleichungen nochmals ſo ins Kurze gezogen:

$$o = Cm + Cn - Ch$$
$$o = qm - pn + rh.$$

§. 95.

Man ziehe endlich das Parallelogramm q C p g vollends aus; und fälle aus g auf k C h die Perpendiculär g k; ſo iſt vermög der Natur des Parallelogrammes

$$kn = mC$$
$$gk = pn - qm$$

Setzt man dieſe beyden Werthe in den zwo letztern Gleichungen, ſo erhält man folgende:

$$o = kn + Cn - Ch = kC - Ch$$
$$o = -gk + rh$$

demnach

$$Ck = Ch$$
$$gk = hr$$

das will nun ſagen, die Diagonale C g ſey = C r, und beyde liegen in gerader Linie. Und auch dieſes will nun ſagen, man finde zu zwoen Kräften C p, C q die Lage und Gröſſe der dritten C r, welche denſelben das Gleichgewicht hält, wenn man das Parallelogramm q C p g vollendet, und die Diagonale C g gegen r verlängert bis C r = C g wird. Und dieſes iſt nun wiederum der Hauptſatz von der Zuſammenſetzung der Kräfte.

§. 96.

§. 96.

Beweiſe von dieſer Art laſſen ſich leicht noch mehrere finden. Sie zeigen aber alle mehr, daß die Sache ſey, als aber wie ſie ſey? Man müßte die Kräfte, und die Art, wie ſie wirken, genauer kennen, um daraus zu zeigen, wie ſie bey der Zuſammenſetzung einander theils verſtärken, theils hindern. Ueberdies ſieht man leicht, daß in einem Beweiſe, der nicht etwann das ganze Product mit einem male angiebt, ſondern ſtückweiſe zeigt, wie es entſtehe, immer zwo Sachen, und jede beſonders, muß erörtert werden. Man muß nemlich nicht nur zeigen, daß jede der Kräfte in der Direction der Diagonale der beyden andern wirke, ſondern auch daß dieſe Diagonale das Maaß derſelben ſey. Fig. XVII.

§. 97.

Dieſe beyden Sätze ſind nun in einer gegenſeitigen Abhängigkeit von einander. Denn erſtlich, man ſetze, daß die Kräfte in der Richtung der Diagonalen wirken, ſo läßt ſich daraus erweiſen, die Diagonalen ſeyen das Maaß derſelben. Denn man ſetze, die Kräfte ſeyen A C, B C, D C, und ziehe die Parallelogramme A d B C, C B a D, C D b A, nebſt deren Diagonalen C d, C b, C a. Wäre nun z. E. A C nicht = a C, ſo würde d C nicht in gerader Linie mit C D ſeyn. Da nun nach der Vorausſetzung c d die Richtungslinie der Kraft iſt,

iſt, welche man für die Kräfte AC, BC ſetzen kann, ſo wird dieſe, weil ſie mit CD einen Winkel macht, derſelben das Gleichgewicht nicht halten. Da nun dieſes der Vorausſetzung zuwider iſt; ſo kann AC der Diagonale nicht ungleich ſeyn. Demnach iſt AC = Ca, und ſo auch CB = Cb, und CD = Cd. Folglich, wenn die Kräfte in der Richtung der Diagonalen ſind, ſo ſind die Diagonalen das Maaß der Kräfte.

§. 98.

Der andere Satz iſt, daß wenn die Diagonalen das Maaß der Kräfte ſind, die Kräfte in der Richtung der Diagonalen wirken. Es ſey wiederum die Kräfte AC, BC, DC; man vollende die Parallelogrammen ACBd, BCDa, DCAb, und ziehe die Diagonalen Ca, Cb, Cd. Setzt man nun z. E. ACa ſey in gerader Linie, ſo folgt nach geometriſchen Sätzen, daß auch DCd, BCb in gerader Linie ſind, und zwar ſchlechthin nur, weil AC = Ca iſt. Demnach, was von ACa gilt, gilt auch von DCd, BCb. Man läugne nun aber, daß ACa in gerader Linie ſey, und ſetze z. E. AC neige ſich herunterwerts. Da nun Bd mit CA parallel und = CA iſt, ſo neigt ſich auch Bd herunterwerts. Dadurch aber wird Cd verkürzt, oder wenn man Cd = CD laſſen will, ſo iſt entweder ACBd nicht mehr ein Parallelogrammum, oder Cd nicht mehr deſſen Diago-

Diagonale. Alles dieſes aber läuft der Vorausſetzung zuwider. Eben ſo verſtößt man dawider, wenn man ſetzt, A C ſey aufwerts von der Direction a C weggekehrt. Demnach muß A C a in gerader Linie ſeyn, und damit iſt es auch B C b und D C d. Folglich, wenn die Diagonalen das Maaß der Kräfte ſind, ſo ſind die Kräfte in der Richtung der Diagonalen.

§. 99.

Ich bin auf dieſe zween Sätze geleitet worden, als ich von der Zuſammenſetzung der Kräfte einen Beweis ſuchte, der ſich nicht erſt auf die Theorie des Hebels, oder den Mittelpunct der Schwere, ſondern ſchlechthin auf die Natur der Sache ſelbſt gründete, und den ich auch, ſo wie ich ihn gefunden, werde herſetzen. Vielleicht hätte ich keinen geſucht, wenn ich nicht erſt nachher geſehen hätte, daß Herr D. Bernoulli auf eben dieſer Spur geweſen wäre. Die in allen Abſichten vortrefliche Abhandlung, die er ſowol darüber, als auch über die übrigen Grundgeſetze der Mechanic der gelehrten Welt mitgetheilt hat, findet ſich in dem erſten Bande der Comment. Acad. Petropol. Ich hätte ſie ebenfalls ſchon vorhin (§. 85 ſeq.) bey der Unterſuchung des gewöhnlichen Beweiſes der Zuſammenſetzung der Kräfte anführen können, da der ſcharfſinnige Herr Verfaſſer ähnliche Schürigkeiten aufdeckt; und ſo werde ich

ich ebenfalls in folgenden Anläſſe dazu haben, wo ich werde zeigen können, daß das Leibnitziſche Kräftenmaaß, ſo weit es einen Verſtand hat, darin bündig erwieſen worden. Ich zweifle nicht daran, daß der Herr Verfaſſer nicht ſollte gewünſcht haben, den von der Zuſammenſetzung der Kräfte gegebenen Beweis, in die Kürze zu ziehen. Da aber ſeine Abſicht eigentlich nur dahin gienge, zu zeigen, daß dieſe Theorie eine geometriſche Nothwendigkeit habe, ſo hat unſtreitig die Länge oder Kürze des Beweiſes dabey nichts zu ſagen. Es giebt Wahrheiten, deren Beweis man, ohne über die Länge zu klagen, mit Danke annehmen würde, wenn derſelbe mit ſolcher Schärfe geführet würde, wie es Herr Bernoulli gethan. Uebrigens haben nachgehends Herr d'Alembert in ſeinen Opuſcules, und Herr Foncenex in dem zwoten Bande der Mem. de l'Acad. R. de Turin Abkürzungen geſucht.

§. 100.

Ich fange bey dem einfachſten Fall an, um daraus nur überhaupt zu zeigen, daß es eine Zuſammenſetzung der Kräfte giebt. Man weiß aus der Meßkunſt, daß wenn man einen Circul in drey gleiche Theile theilt, und aus dem Mittelpuncte Linien in die Theilungspuncten zieht, jede dieſer Linien mit der andern einen Winkel von 120 Grad macht, und ſo auch

jede

jede gegen die beyden andern gleich inclinirt iſt. Solche drey Linien ſeyen AC, BC, DC, und zugleich die Directionslinien dreyer gleichen Kräfte, welche auf den Punct C wirken, es ſey daß ſie denſelben ziehen, oder drücken. Hier iſt offenbar, daß, da der Punct C einer dieſer Kräfte, wie einer jeden der andern beyden, nachgeben müſte, er keiner nachgeben kann, und daher im Gleichgewichte bleibt. Aber eben dieſes Gleichgewicht bleibt, wenn man z. E. anſtatt der Kräfte DC, BC eine einige gleiche Kraft aC der Kraft AC gerade entgegenſetzt. Demnach iſt offenbar, daß beyde Kräfte DC, BC in der ſchiefen Richtung DCB weder mehr noch minder auswirken als die Kraft aC allein. Nun ſind die Winkel $DCa = BCa = 60$ Gr. Da nun $DC = CB = Ca$ iſt; ſo iſt auch $Da = aB = DC = CB$, demnach CDaB ein Rhombus, und Ca deſſen Diagonale. Für dieſem Fall iſt demnach das Geſetz der Zuſammenſetzung der Kräfte ohne Mühe erwieſen. Fig. XIX.

§. 101.

Man kann ſich auf eine ähnliche Art eine beliebige Anzahl gleicher Kräfte gedenken, die auf einen Punct in ſolchen Directionen angebracht ſind, die einen Circul in eben ſo viele gleiche Theile theilen als Kräfte ſind. Daß ſie einander das Gleichgewicht halten, erhellet ohne Schwürigkeit, weil der Punct, auf den ſie angebracht ſind, einer jeden nachgeben

müſte. Von ſolchen Kräften wirkt jede ſoviel als die übrigen zuſammen. Eben ſo laſſen ſich, welche man will, zuſammennehmen, und ihre vereinigte Wirkung wird der vereinigten Wirkung der übrigen gleich ſeyn. Denn in allen dieſen Abſichten betrachtet, bleibt das Gleichgewicht. So z. E. wenn auf den Punct C fünf gleiche und im Circul herum gleich vertheilte Kräfte AC, BC, DC, EC, FC wirken, ſo zieht AC den Punct eben ſo viel gegen ſich, als die übrigen vier Kräfte BC, DC, EC, FC denſelben gegen G ziehen. Die Wirkung dieſer vier Kräfte iſt demnach diejenige, die eine Kraft GC allein haben würde. Auf eine ähnliche Art wirken die drey Kräfte AC, BC, FC nicht mehr als die zwo Kräfte DC, EC, wei ſonſt der Punct C gegen A würde gezogen werden. Man ſieht hieraus, wie man auch die von mehreren Kräften herrührende Wirkung zu betrachten hat. Zugleich ſieht man hier, wie bey dem vorhin (§. 100.) betrachteten Fall, den an ſich klaren Satz bekräftigt, daß die gemeinſame Wirkung zwoer gleichen Kräfte ſich in derjenigen Richtung äuſſert, welche mitten zwiſchen ſie fällt. Denn ſo ziehen die beyden Kräfte BC, FC den Punct C gegen A, ſo wie ihn die beyden Kräfte DC, EC gegen G ziehen. Letztere beyde unſtreitig viel ſtärker als die erſtern, weil ſie nicht nur dem Zug der Kräfte BC, FC, ſondern noch überdies dem Zug der Kraft AC das Gleichgewicht

Fig. XX.

gewicht halten. Daß aber gleiche Kräfte, z. E. DC, EC den Punct C gegen G ziehen, folgt ſchlechthin aus deren Gleichheit. Denn welche von beyden denſelben näher gegen ſich zöge, ſo würde es auch von der andern geſchehen. Und beydes zugleich kann nicht ſeyn. Wären hingegen die Kräfte ungleich, ſo läßt ſich, überhaupt betrachtet, gedenken oder vermuthen, daß die ſtärkere den Punct C näher gegen ſich ziehen werde. Ich ſage, vermuthen, denn wir werden bald ſehen, daß die wahre Direction der zuſammengeſetzten Kräften nicht ſo leicht zu beſtimmen iſt, und daß man die Gröſſe derſelben findet, ehe man von ihrer Direction noch nichts ſchlieſſen kann.

§. 102.

Ich fange bey dem Satze an, daß wenn drey Kräfte, ſo auf einen Punct wirken, im Gleichgewichte ſind, das Gleichgewicht bleibe, wenn jede Kraft in einerley Verhältniß gröſſer oder kleiner genommen, die Direction aber nicht verändert wird. Denn eine doppelte, drey, vier ꝛc. n fache Kraft gilt was zwo, drey, vier ꝛc. n einfache, und ſo bleibt der Punct zwey, drey, vier ꝛc. n fach unbewegt; das will ſagen, er bleibt unbewegt, man mag jede Kraft doppelt, drey, vier ꝛc. n fach nehmen. Demnach auch wenn man jede m fach nimmt. Demnach auch wenn jede $\frac{m}{n}$ fach genommen wird.

§. 103.

Fig. XXI. Es ſeyn nun zwo Kräfte AC, BC, welche in ſenkrechter Direction auf den Punct C wirken, ſo giebt es irgend eine Kraft EC, welche denſelben das Gleichgewicht halten kann, ſo, daß demnach die vereinigte Wirkung der Kräfte AC, BC ſich in der entgegengeſetzten Richtung CD äuſſert, und = CD = CE iſt. Die Frage iſt nun, deren Gröſſe und Richtung zu beſtimmen. Man ſetze CD ſtelle beydes vor, und ziehe δCd auf CD ſenkrecht, ſo iſt wegen der beyden rechten Winkel ACB, DCd, der Winkel δCB = DCA, und ſo auch dCA = DCB. Da demnach BC gegen DC, Cδ und AC gegen dC, DC eben die Lage hat, wie DC gegen BC, AC; ſo läßt ſich die Kraft BC auf die Richtungen DC, δC, und die Kraft AC auf die Richtungen dC, DC eben ſo vertheilen, wie die Kraft DC auf die Richtungen BC, AC vertheilt iſt. Man mache demnach (§. 102.)

$$DC : BC = BC : \varepsilon C$$
$$DC : AC = BC : \delta C$$
$$DC : BC = AC : dC$$
$$DC : AC = AC : \alpha C$$

ſo werden die Kräfte δC, εC anſtatt BC, und die Kräfte dC, αC anſtatt AC geſetzt werden können, ohne daß das Gleichgewicht mit CE gehoben werde. Nun geben dieſe vier Analogien folgende vier Werthe

εC

$$\beta C = BC^2 : DC$$
$$\delta C = AC . BC : DC$$
$$d C = AC . BC : DC$$
$$\alpha C = AC^2 : DC$$

Demnach haben wir erſtlich $\delta C = d C$. Da nun dieſe beyde Kräfte in entgegengeſetzter Richtung ſind, ſo halten ſie an ſich ſchon einander das Gleichgewicht. (§. 13.) Und dieſes iſt eben ſo viel, als wenn ſie nicht da wären, weil ſie den Punct C eben ſo unbewegt laſſen (§. 46). Da demnach die Kräfte $C\alpha$, $C\beta$ allein der Kraft $CE = CD$ das Gleichgewicht halten, und in eben der Richtung ſind, ſo haben wir

$$C\alpha + C\beta = CD$$

demnach

$$\frac{AC^2 + BC^2}{DC} = DC$$

oder

$$AC^2 + BC^2 = DC^2$$

Da nun dieſes der Pythagoriſche Lehrſatz, und ACB ein rechter Winkel iſt, ſo haben wir

$$CD = AB$$

und dadurch iſt die Gröſſe der Kraft CE gefunden, ſo wenig wir noch von ihrer Direction wiſſen.

§. 104.

Es giebt auch hiebey ein einiger Fall, wo ſich dieſe Direction für ſich finden läßt, nemlich derjenige, wo $BC = AC$ iſt. Denn da theilt

DC den Winkel BCA in zween gleiche Theile, (§. 102) und ſo iſt ſie nicht nur der Diagonale des Quadrats gleich, ſondern ſie wirkt auch in derſelben Richtung.

§. 105.

Hingegen wo die Kräfte BC, AC ungleich ſind, wiſſen wir nur noch die Gröſſe der Kraft EC = DC, von ihrer Lage oder Richtung aber noch nichts. Wir können dabey nur ſo viel annehmen, daß wenn eine Kraft DC in zwo rechtwinklichte Kräfte AC, BC ſolle aufgelöſt werden, dieſe ſo angenommen werden müſſen, daß AB = CD werde. Wenn wir demnach den Winkel CBA = φ ſetzen, ſo folgt überhaupt, daß

$$BC = CD \cos \varphi.$$
$$AC = CD \sin \varphi$$

ſeyn müſſe. Da nun aber noch der Winkel BCD eigentlich zu ſuchen iſt, weil dieſer die Richtung der Kräfte beſtimmt, ſo wollen wir denſelben = ω ſetzen, und ſo werden wir

$$BCD = \omega$$
$$ACD = 180° - \omega$$

haben. Nun iſt zu ſehen, ob zwiſchen φ und ω ein Verhältniß gefunden werden kann. Und dahin dient folgender Lehrſatz:

§. 106.

Fig. XXV. Es ſeyen zwo gleiche Kräfte CD, Cd auf den Punct C gerichtet, und jede nach den Rich-

Richtungen BC, AC in rechtwinklichte Kräfte aufgelöſt, nemlich

$$CD \text{ in } CA \text{ und } CB$$
$$Cd \text{ in } Ca \text{ und } Cb$$

Die Winkel ſeyen

$$DCA = \omega$$
$$dCA = \omega'$$

ſo laſſen ſich die Kräfte

$$CD = 1 \quad CA = \text{coſ.}\,\varphi \quad Ca = \text{coſ.}\,\varphi'$$
$$Cd = 1 \quad CB = \text{ſin.}\,\varphi \quad Cb = \text{ſin.}\,\varphi'$$

ſetzen. Endlich mache man den Winkel

$$\delta CD = dCA$$

und $C\delta = 1$

ſo wird

$$\delta CA = \omega + \omega'$$

ſeyn. Und wenn die Kraft $C\delta$ in die rechtwinklichten $C\alpha$, und $C\beta$ aufgelöſt wird, ſo ſage ich, es werde

$$C\alpha = \text{coſ.}\,(\varphi + \varphi')$$
$$C\beta = \text{ſin.}\,(\varphi + \varphi')$$

ſeyn. Um dieſes zu beweiſen, ſo ziehe man Ce auf CD ſenkrecht. Ferners mache man

$$C\varepsilon = Ca = \text{coſ.}\,\varphi'$$
$$Ce = Cb = \text{ſin.}\,\varphi'$$

und ſetze die Kraft $C\varepsilon$ in die zwo rechtwinklichten Ck, $C\kappa$, und die Kraft Ce in die zwo rechtwinklichten Cg, $C\gamma$ aufgelöſt. Da nun der Winkel

$$eCB = DCA = \omega$$

und $\delta C\varepsilon = dCA = \omega'$

ſo iſt

$$C\kappa = C\varepsilon.\cos\varphi = Ca.\cos\varphi = \cos\varphi.\cos\varphi'$$
$$C\gamma = Ce\sin\varphi = Cb\sin\varphi = \sin\varphi.\sin\varphi'$$

demnach

$$C\alpha = C\kappa - C\gamma = \cos\varphi.\cos\varphi - \sin\varphi.\sin\varphi$$
$$= \cos(\varphi. + \varphi')$$

Eben ſo iſt

$$C\varkappa = C\varepsilon\sin\varphi = Ca\sin\varphi = \sin\varphi.\cos\varphi'$$
$$Cg = Ce.\cos\varphi = Cb.\cos\varphi = \cos\varphi.\sin\varphi'.$$

Demnach

$$C\beta = C\varkappa + Cg = ſ\varphi.\cos\varphi' + \cos\varphi.ſ\varphi'$$
$$= \sin(\varphi + \varphi')$$

§. 107.

Hieraus folgt nun, daß wenn gleiche Kräfte unter dem Winkel

ω in zwo rechtwinklichte $\sin\varphi$, $\cos\varphi$

ω' - - - - - - - $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$

aufgelößt werden, eine gleiche Kraft unter dem Winkel $(\omega + \omega')$ in zwo rechtwinklichte $\sin.(\varphi + \varphi')$, $\cos.(\varphi + \varphi')$ aufgelößt werde.

§. 108.

Dieſes zeigt demnach überhaupt an, daß in der That die Winkel φ, φ' eine Function der Winkel ω, ω' ſind, und jene mit dieſen gröſſer werden. Daß ſie aber in gleicher Verhältniß gröſſer werden, läßt ſich nun folgender maſſen erweiſen. Man ſtelle die Winkel ω, Fig. XXIII. ω', $(\omega + \omega')$ durch die Abſciſſen AP, AQ, AR vor, ſo, daß

AP

$$AP = \omega$$
$$AQ = \omega'$$
$$AR = \omega + \omega'.$$

ſey, ſo iſt auch

$$AQ = PR, \text{ und } AP = QR$$

Ferners ſey

$$PM = \varphi$$
$$QN = \varphi'$$
$$RL = \varphi + \varphi'$$

ſo iſt auch wenn LK mit AR parallel gezogen wird,

$$PM = TN, \text{ und } SM = QN.$$

Hieraus folgt aber, daß AMLN keine krumme Linie ſeyn könne, ſondern gerade ſeyn müſſe. Denn zieht man durch A, L eine gerade Linie AmnL, ſo iſt wegen AP = TL, auch

$$Pm = Tn \text{ und } Sm = Qn.$$

Und ſo muß M in m, N in n treffen, wie man auch immer die Abſciſſen AR, AQ, AP dergeſtallt annimmt, daß

$$AP + AQ = AR$$

ſey. Demnach iſt auch

$$AP : PM = AQ : QN = AR : RL$$

oder

$$\omega : \varphi = \omega' : \varphi' = (\omega + \omega') : (\varphi + \varphi')$$

§. 109.

Wenn wir demnach

$$\varphi = n\omega$$

ſetzen, ſo iſt auch

$$\varphi' = n\omega'$$
$$\varphi'' = n\omega''$$
&c.

und

$$\varphi + \varphi' = n(\omega + \omega')$$
$$\varphi + \varphi' + \varphi'' = n(\omega + \omega' + \omega'')$$
&c.

§. 110.

Nun laſſen ſich drey Winkel ω, ω', ω'' immer ſo annehmen, daß ihre Summe $= 90°$ wird. In dieſem Fall aber wirkt die Kraft unter dem Winkel $\omega + \omega' + \omega''$ rechtwinklicht, und ſo wird

$$\sin. (\varphi + \varphi' + \varphi'') = 1.$$
$$\cos. (\varphi + \varphi' + \varphi'') = \omega$$

das will ſagen

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' = 90°. = \omega + \omega' + \omega''$$

demnach

$$n = 1.$$

Es ſind alſo nicht nur die Winkel φ in Verhåltniß der Winkel ω, ſondern ſie ſind einander durchaus gleich. Demnach iſt BCD
Fig. XXI. = CBA, und folglich CD die Diagonale des auf BCA zu beſchreibenden Rectangels.

§. 111.

Fig. XXIV. Hieraus ergiebt ſich nun der Fall für die Kråfte CA, CB die unter jedem ſchiefen Winkel auf einen Punct C wirken. Denn man vollende das Rectangel CbBб, ſo wird die

Kraft

Kraft CB in Cb und Cβ aufgelöſt. Ferners trage man Cβ aus A in δ, ſo ſind die Kräfte CB, CA in Cb, Cδ aufgelöſt. Vollendet man nun das Rectangel CbDδ, ſo wird die Diagonale CD die Kraft ſeyn, welche aus Cb, Cδ demnach aus CB, CA zuſammengeſetzt iſt. Es iſt aber CD ebenfalls die Diagonal des Parallelogramms CBDA, und damit iſt die Lehre von der Zuſammenſetzung der Kräfte auf das allgemeinſte erwieſen. Ich werde indeß noch folgenden Satz beyfügen.

§. 112.

Es ſeyen 3 Kräfte CA, CD, CB auf den Punct C gerichtet, im Gleichgewichte. Man verlängere AC in Cα = AC, und BC in CE = BC. Sodann ziehe man dCb durch C auf AC ſenkrecht, und ſetze die Kraft CD in die zwo rechtwinklichten Cd, Cδ, ingleichem die Kraft CB in die zwo rechtwinklichten Cb, Cβ aufgelöſt; ſo iſt Fig. XXII.

$$Cb = Cd$$
$$CA = C\beta + C\delta$$

Nun ſetzt man die Winkel

$$BC\alpha = \omega$$
$$DC\alpha = \omega'$$
$$ECD = \omega''$$

ſo iſt

$$\omega + \omega' + \omega'' = 180^\circ$$

Ferner

Ferners wird

$$C\beta = CB \operatorname{coſ}. \varphi \quad Cb = CB \operatorname{ſin}. \Phi$$
$$C\delta = CD \operatorname{coſ}. \varphi' \quad Cd = CD \operatorname{ſin}. \Phi'$$

und demnach

$$CB.\operatorname{ſin}\Phi = CD.\operatorname{ſin}\Phi'$$
$$CA = CB.\operatorname{coſ}\Phi + CD.\operatorname{coſ}\Phi'$$

ſeyn. Aus dieſen beyden Gleichungen findet ſich

$$\operatorname{coſ}\varphi = \frac{CA^2 + CB^2 - CD^2}{2.CA.CB}$$
$$\operatorname{coſ}\varphi' = \frac{CA^2 + CD^2 - CB^2}{2.CA.CB}$$

und auf eben die Art erhält man

$$\operatorname{coſ}\varphi'' = \frac{CB^2 + CD^2 - CA^2}{2.CB.CD}$$

Es ſind demnach φ, Φ', Φ'' die Winkel eines aus den drey Kräften AC, BC, DC formirten Triangels, und folglich

$$\Phi + \Phi' + \Phi'' = 180^\circ.$$

Wenn man demnach auch (§. 109.)

$$\Phi + \Phi' + \Phi'' = n(\omega + \omega' + \omega'')$$

ſetzen wollte, ſo ſieht man leicht, daß

$$180^\circ = n.180^\circ$$

folglich

$$n = 1$$

und damit

$$\Phi = \omega, \; \Phi' = \omega', \; \Phi'' = \omega''$$

herauskömmt. Damit aber ſind auch ω, ω', ω'' die Winkel eines aus AC, BC, DC gebildeten

deten Triangels. Und das will nun ſagen, dieſe Kräfte ſind Diagonalen und liegen in deren Direction.

Erſte Gründe der Dynamic.

XI. Das Entſtehen der Bewegung.

§. 113.

Die erſtgegebenen Beweiſe von der Zuſammenſetzung der Kräfte ſind ſo unmittelbar aus der Natur der Sache ſelbſt hergeleitet, daß ſie von allem, was wir in den vorhergehenden Hauptſtücken von dem Hebel und den daraus folgenden Bedingungen und Umſtänden des Gleichgewichtes erwieſen haben, ſchlechterdings unabhängig ſind, ungeachtet die Sache ſelbſt, nemlich die Zuſammenſetzung der Kräfte, allerdings auch daraus hergeleitet werden kann. Da ſich hinwiederum auch die Theorie des Hebels aus der Zuſammenſetzung der Kräfte erweiſen läßt, ſo hätten wir die ganze Abhandlung bey den erſtbemeldten Beweiſen anfangen und ſodann die Theorie des Hebels darauf gründen können. Und dieſes wäre in verſchiedenen Abſichten ganz natürlich geweſen, weil man die bey dem Hebel, und beſonders bey dem gebogenen oder Winkelhebel angebrachte Kräfte, ungeachtet ſie nicht auf einen und eben

den Punct unmittelbar wirken, dennoch als zuſammengeſetzt anſehen kann. Ja, man kann ſagen, die Zuſammenſetzung dabey ſey noch weniger einfach als da, wo die Kräfte auf einen Punct angebracht ſind.

§. 114.

Ich werde mich aber hiebey nicht länger aufhalten, ſondern zu denjenigen Wirkungen der Kräfte fortſchreiten, wo die Frage: ob, oder wieferne ſie ſich a priori und auf eine geometriſch nothwendige Art erweiſen laſſen, ungleich ſchwerer wird. Denn, wie wir bisher geſehen haben, geht die Static oder Lehre des Gleichgewichtes mit der Geometrie zu gleichen Schritten; und wo immer Kräfte vorkommen, können ſie keine andere Bedingungen des Gleichgewichtes haben. Was aber hingegen erfolge, wo eine Ueberwucht vorkömmt, oder kein Gleichgewicht ſtatt hat, oder wo Kräfte wirken, ohne von andern Kräften im Gleichgewichte gehalten zu werden, das ſcheinen Fragen von ganz anderer Art zu ſeyn. Wollten wir uns hier nur an das halten, was die Erfahrung lehrt, und was folglich in der gegenwärtigen Welt ſtatt findet, ſo wären dieſe Fragen bald erörtert, und dieſes würde auch zum Gebrauche der Mechanic hinreichend ſeyn, wo man ein Pfund Bley als ein Pfund annimmt, ohne zu unterſuchen, ob es nicht hätte ſchwerer oder leichter ſeyn können?

§. 115.

Die bereits oben (§. 3. 9.) gemachte Anmerkung, daß die Kräfte nicht ſichtbar, ſondern nur empfindbar ſind, kann uns begreiflich machen, warum wir ſie, wenn wir ſie aufſuchen wollen, leicht mit ihren Wirkungen confundiren, und ſie bald in der Materie, bald in ihrer Bewegung ſuchen. Die Bewegung ſetzt Kräfte voraus, dadurch ſie verurſacht wird; und hinwiederum ſcheint es, als ob ſich ohne Bewegung keine Kraft gedenken laſſe. Und ſo kann man richtig den Schluß machen, daß entweder Bewegung oder Kraft von Ewigkeit her ſeyn müſſe. Solle eines von beyden ſeyn, ſo wird es die Kraft, und zwar in einem weit allgemeinern Sinn genommen, ſeyn, weil noch zu mehreren andern Kräfte erfordert werden, als nur zur Bewegung.

§. 116.

Ohne uns aber in ſolche Unterſuchungen ferner einzulaſſen, ſo können wir bey den Begrif der Kraft bleiben, der uns in dem vorhergehenden zur Beſtimmung der Geſetze des Gleichgewichtes gedient hat, und wozu derſelbe klar genug, und man kann ſagen, eben ſo klar war, als in der Geometrie der Begrif des Raumes (§. 12); der Begrif der Bewegung iſt es nicht minder (§. 1. 2). Und ſo müſte man auch den Kräften den bey dem Gleichgewichte betrachteten Druck abſprechen, wenn man

man anſtehen wollte, ob bey Aufhebung des Gleichgewichtes eine Bewegung erfolgen werde? Darüber kann man nicht anſtehen. Und eben ſo iſt es für ſich einleuchtend, daß die Bewegung nach eben der Direction erfolgen werde, nach welcher die Kraft, ſie mag nun einfach oder zuſammengeſetzt ſeyn, ihren Druck äuſſert. Wie es aber um die Dauer und Geſchwindigkeit ſtehe, das muß etwas umſtändlicher unterſucht werden, weil Zeit, Raum, Kraft, und das, was bewegt wird, oder die Materie, heterogene Gröſſen ſind, wobey das Abſolute von dem Relativen, und das, was in der gegenwärtigen Welt wirklich vorkömmt, von dem, was ebenfalls darin hätte vorkommen können, genau zu unterſcheiden iſt.

§. 117.

Sollen wir hiebey a priori gehen, ſo haben wir nur abſolute Möglichkeiten und Unmöglichkeiten zu betrachten, und einander entgegen zu ſetzen, und bey dem Zuſammenſetzen der Möglichkeiten zu ſehen, welche einander ausſchlieſſen, oder nicht beyſammen ſeyn können? So z. E. können wir, in Anſehung der Geſchwindigkeit, ohne Bedenken, feſte ſetzen, daß ſie linear iſt, und daher nur eine Dimenſion habe; das will ſagen, daß das Quadrat, der Cubus, das Biquadrat ꝛc. der Geſchwindigkeit, keine Geſchwindigkeit ſey, ſondern wenn dadurch je etwas vorgeſtellt werden kann, etwas ganz anders vorgeſtellt werde. Hiedurch

laſſen

laſſen ſich diejenigen Fälle ausſchlieſſen, wo die Geſchwindigkeit mehr als eine Dimenſion haben würde.

§. 118.

Wir haben ferners das, was in Bewegung geſetzt werden ſolle, **Materie** genennt (§. 116), theils um es durch eine Benennung von der bewegenden Kraft zu unterſcheiden, und in ſo fern wäre jeder andere Name dazu dienlich geweſen; theils auch weil in der wirklichen Welt in der That das, ſo in Bewegung geſetzt wird, den Namen Materie hat. Ein Körper bewegt ſich, ſo viel wir wiſſen, nur ſofern er Materie iſt. Denn der Raum, den er einnimmt, bewegt ſich nicht mit demſelben, weil eben dadurch Bewegung Bewegung iſt, daß der Körper aus einem Raum oder Orte in einen andern kömmt. Ob in dem Körper noch immaterielle Subſtanzen ſind, können wir hier dahin geſtellet ſeyn laſſen, ungeachtet man Gründe hat die Kräfte, und beſonders die elaſtiſche, als ſolche anzuſehen.

§. 119.

Man hat ferners demjenigen, ſo durch Kräfte in Bewegung geſetzt wird, oder der Materie, eine Art von **Trägheit**, (inertia) oder **Kraft der Trägheit**, (vis inertiae) zugeeignet, wodurch die Materie der Bewegung widerſteht, ſo, daß ſie ohne wirkliche Anwendung der Kraft nicht bewegt wird. In dieſem

Begriffe liegt etwas verwirrtes, wir mögen denſelben nach Anleitung der Erfahrung a poſteriori, oder nach der Abzählung der Möglichkeiten a priori betrachten. A poſteriori betrachtet, kann man nemlich dieſe Trägheit der Materie der Wirkung der Kraft nicht ſo entgegen ſetzen, daß ſie für ſich zureichend wäre, dem Drucke einer Kraft das Gleichgewicht zu halten. Darüber iſt man, nach Anleitung der Erfahrung ganz einig, daß die kleinſte Kraft die gröſte Maſſe in Bewegung ſetzen kann. Die Erfahrung giebt, daß der Unterſchied nur auf die Geſchwindigkeit ankömmt, als welche bey gröſſerer Kraft gröſſer, bey gröſſerer Maſſe kleiner ausfällt.

§. 120.

Hiebey kann man nun, a priori betrachtet, ſo viel einräumen, daß bey einer gröſſern Kraft eine gröſſere Geſchwindigkeit gewirkt werde, als bey einer kleinern, wenn nemlich einerley Materie fortzudrücken iſt. Denn ſonſt würde aus ungleichen Urſachen gleiche Wirkung erfolgen, und daher in der Wirkung bald mehr, bald minder ſeyn, als in der Urſache. So kann auch eine gleiche Kraft eine und eben dieſelbe Materie nicht mit jeder Geſchwindigkeit fortdrücken, denn ſo müßten alle Geſchwindigkeiten zugleich vorkommen, und dieſes gäbe demnach eine zweyte Dimenſion der Geſchwindigkeit,

welches

welches nicht angeht (§. 117). Demnach iſt die Geſchwindigkeit beſtimmt, ſobald Materie und Kraft beſtimmt iſt. Drückt nun eine Kraft k eine Materie m mit der Geſchwindigkeit g fort, ſo thut eine andere Kraft k bey einer andern Materie m, und daher eine Kraft 2 k bey einer Materie 2 m eben dieſes. Hingegen wird eine Kraft k dieſe Materie 2 m mit geringerer Geſchwindigkeit fortdrücken, als die Kraft 2 k. Daher kann man allerdings annehmen, daß ſich die Geſchwindigkeit vermindert, wenn bey gleicher Kraft die Materie vermehrt wird.

§. 121.

Dadurch wird nun noch nicht erörtert, was es mit dieſer Geſchwindigkeit für eine Bewandniß habe. Es laſſen ſich aber dabey, ohne Mühe, drey Fälle gedenken. Denn einmal könnte die Materie ſo ſehr träge ſeyn, daß ſie, ſobald die Kraft aufhört fortzudrücken, liegen bleibe. Ich werde mich hiebey nicht auf die Erfahrung berufen, welche uns täglich Beyſpiele von einem ſolchen Fortſchleppen aufweiſt. Denn dieſe Beyſpiele gehören nicht hieher, weil man längſt weiß, daß theils das Anreiben, theils das Fallen der Körper der Grund davon iſt, weil ſolche Körper ſich in paraboliſchen Bögen bewegen, die ſich kaum über die Erde erheben. Ich werde demnach, und zwar als etwas Widerſinniges ſagen, daß, ſo viel

ich mir die Sache vorſtellen kann, eine ſolche abſolute Trägheit der Materie in dem völlig leeren Raume ſtatt habe. Ich ſage nicht, in dem von aller Materie leeren, ſondern in dem völlig, das will ſagen, von jeden, auch immateriellen Subſtanzen, leeren Raume. In dem von jeder Materie leeren Raume gebe ich zu, daß ein einmal bewegter Körper mit gleicher Geſchwindigkeit und in gleicher Direction fortfahren könne bewegt zu werden. In dem völlig leeren Raume kann ich mir dieſe Möglichkeit nicht vorſtellen, ſo wie ich mir in demſelben auch nicht vorſtellen kann, daß nicht eine gleiche Kraft, jede Materie mit gleicher Geſchwindigkeit ſollte fortdrücken können. Denn ſolle überhaupt die Materie eine Trägheit, und demnach mehr Materie mehr Trägheit haben (§. 119. 120), ſo muß jede Materie an dem Orte, wo ſie iſt, dergeſtalt haften, daß eine Kraft erfordert wird, um ſie wegzubringen. Dieſes iſt für ſich klar. Nun ſtelle ich mir wenigſtens eben ſo klar vor, daß dieſes haften in einem völlig leeren Raume keine Bedeutung oder keinen Verſtand hat. Nemlich die Materie mag darin in Ruhe ſeyn, aber dieſe Ruhe an ſich, oder ſchlechthin als Ruhe betrachtet, hat keine Dimenſion oder Gröſſe, ſo, daß ein gewiſſer Grad der Kraft erfordert würde, um ſie wegzunehmen. Ich will damit ſagen: die Trägheit der Materie, wenn ſie etwas mehr als nicht in Bewegung

ſeyn,

ſeyn, vorſtellen ſolle, rührt nicht von der Materie allein, ſondern zugleich auch von etwas auſſer derſelben her. Und dieſes Etwas muß machen, daß die Materie nicht anderſt als mit Anwendung, und, ſo zu reden, mit Aufopferung der Kraft in Bewegung geſetzt wird. Und eben dieſes Etwas ſtelle ich mir als das Vehiculum zur Fortſetzung der Bewegung vor, ſollte dieſe auch auf keine andere Art, als durch eine fortgepflanzte Undulation möglich ſeyn, vermittelſt welcher die bewegte Materie fortgeführt wird. Ohne ein ſolches Vehiculum ſehe ich auch nicht, wie die Materie ſich weiter fortbewegen würde, als ſo weit ſie von der Kraft getrieben wird; und ebenfalls ohne ein ſolches Vehiculum ſehe ich auch nicht, wie in einem ganz leeren Raume ein motus progreſſivus entſtehen könnte, weil ſelbſt die Kraft, um fortdrücken zu können, ſich irgend muß können anſperren.

§. 122.

Indeſſen da dieſe Betrachtung mehr in die Metaphyſic als in die Mechanic gehört, ſo werde ich mich hier begnügen, die vorhin bemeldte abſolute Trägheit der Materie, als eine bloße Möglichkeit anzuſehen. Und in ſofern macht ſie den erſten von denen drey Fällen aus, die wir hier vorzuzählen haben. Der andere Fall iſt, wenn die Kraft ihren Druck auf die Materie, ſobald ſie angebracht, oder das Gleich-

gewicht gehoben iſt, ohne allen Verfluß einiger Zeit, dergeſtalt äuſſert, daß die Materie ſogleich mit der völligen, aus der Aeuſſerung des Druckes entſtehenden, Geſchwindigkeit wegfährt. In dieſem Fall hat der Druck, der Dauer nach, keine Dimenſion, weil man ſonſt auf eine zweyte Dimenſion der Geſchwindigkeit verfallen würde, welches nicht angeht (§. 117). Es läßt ſich daher zwar gedenken, daß nach dem erſten Drucke p, welcher die Geſchwindigkeit c herfürbringt, ein zweyter, dritter ꝛc. angebracht, und dadurch die Geſchwindigkeit 2c, 3c, n c &c. erhalten werden. Dieſes ſind aber numeri diſcreti und nicht quantitates continuae, dergleichen das Integrale ſcdt angeben würde, wenn in jeder unendlich kleinen Zeit dt ein neuer Grad der Geſchwindigkeit c hinzukäme.

§. 123.

Dieſes klärt uns nun den dritten Fall auf, wo wir ſetzen, daß die Geſchwindigkeit nicht mit einem male, oder ohne allen Zeitverluſt erwachſe. Denn da muß in jeder unendlich kleinen Zeit dt ein unendlich kleiner Theil dc der ganzen Geſchwindigkeit c entſtehen, weil wir ſonſt entweder den zweyten Fall, oder eine zweyte Dimenſion der Geſchwindigkeit haben würden.

§. 124.

Die zween letztere Fälle (§. 122. 123.) grenzen gewiſſermaſſen an einander, weil man ſich

ſich die Zeit t, in welcher die ganze Geſchwindigkeit c erwächſt, ſo klein gedenken kann, als man will. Bey dem zweyten Fall gedenkt man t = o. Und ſoll dieſes abſolute ſeyn, ſo verſtößt man wieder das Geſetz der Continuität, daferne man nicht auch die Intenſität der Kraft unendlich annimmt. Iſt hingegen t von einer Dauer oder endlichen Gröſſe, ſo muß man ſich allerdings vorſtellen, daß die Kraft ihren Druck nicht mit einem male auf das Herfürbringen der Geſchwindigkeit verwende, weil in der Zeit dt nur dc herfürgebracht wird. Dieſes iſt nun aus einem gedoppelten Grunde gedenkbar. Denn einmal muß die Geſchwindigkeit jeden Theilchen der Materie mitgetheilt, und daher auf alle vertheilt werden. Wenn ſie demnach auch bey dem erſten Theilchen = c ſeyn würde, ſo würde ſie, eben wegen dieſer Vertheilung, auf dc reducirt. Man ſieht hieraus zugleich, daß die Menge der Theilchen, oder die Menge und Gröſſe der Materie, die Geſchwindigkeit dc vermindert, je gröſſer ſie iſt. Und eben ſo iſt auch begreiflich, daß dieſes Vertheilen der Geſchwindigkeit eine Zeit dt fordert. Sodann kann man auch annehmen, daß ſelbſt die Kraft ihren Druck auf eine ſo vertheilte Art äuſſert, und derſelbe daher auch nur nach und nach aufgewandt wird. Ueberdies laſſen ſich bey der Kraft zwo Dimenſionen, nemlich die Gröſſe und die Stärke, unterſcheiden, weil eine Kraft ſowol mehrern

Theilchen der Materie eine gleiche Geſchwindigkeit, als jedem Theilchen eine gröſſere Geſchwindigkeit geben kann; ſo, daß demnach beyde Dimenſionen, oder die ganze Kraft k ſich nach mdc ſchätzen läßt, und demnach dcvk : m, oder, wenn wir die Zeit noch mitnehmen, dc=kdt: m iſt.

§. 125.

Die Nothwendigkeit dieſer Formel gründet ſich demnach darauf, 1°. daß jedes Theilchen der Materie eine Trägheit hat, und ſich gleichſam an etwas anſperrt, um nicht anders als durch die wirkliche Anwendung der bewegenden Kraft bewegt werden zu können. 2°. Daß dieſe Trägheit der Menge der Materie proportional iſt, oder daß ſich jedes Theilchen der Materie gleich anſperrt, und dadurch zur Bewegung gleich träge iſt. Hiebey läßt ſich anmerken, daß wir die Materie und ihre Menge nicht anders als aus dieſer Trägheit kennen, und daß wir uns demnach darüber ſehr irren würden, wenn das vorhin (§. 121) erwähnte Vehiculum eine an verſchiedenen Orten verſchiedene Intenſität hätte. Auf die Formel ſelbſt hätte aber dieſes dennoch keinen Einfluß, weil wir das, was von dieſer Intenſität herrührt, theils auf die Materie, theils auch auf die Kraft ſelbſt ſchieben. 3°. Daß der Druck der Kraft ſich auf die Materie vertheilt, und in Anſehung der Kraft ſelbſt, wegen einer ähn-

lichen

lichen Vertheilung, nur nach und nach aufgewandt wird.

§. 126.

Wie nun immer hiebey die Dimenſionen, die ſich ſowol bey der Kraft als bey der Materie gedenken laſſen, müſſen genommen werden, ſo liegt allemal dabey zum Grunde, daß die Fälle an ſich unmöglich ſind, wo eine mehr als lineare Geſchwindigkeit herauskommen würde (§. 117). Um dieſe Bedingung deutlich zu machen, werde ich ſie durch Beyſpiele aufklären, die wirklich vorkommen. So z. E. haben wir oben (§. 77. 78.) geſehen, daß die Kraft der Schwere auf jede Theilchen der Materie, und zwar auf jedes directe und beſonders drücke. Sie theilt demnach ihren Druck nicht erſt den äuſſern Theilchen, noch vermittelſt dieſer den innern mit, ſo, daß ſie erſt communicationsweiſe vertheilt würde. Drückt man hingegen eine geſpannte Feder gegen einen Körper loß, ſo verhält ſich die Sache ganz anders; weil die Feder ihren Druck nur denjenigen Theilchen des Körpers unmittelbar mittheilt, welche ſie berührt, und erſt von dieſen geht der Druck ſodann in die innern Theile des Körpers, und breitet ſich in demſelben ganz aus. Hiebey iſt nun offenbar, daß man die Kraft der Feder ganz anders nehmen müſſe, als die Kraft der Schwere. Letztere hat für jedes Theilchen ein abſolutes Maaß, und der Druck

der Schwere wird mit der Anzahl der Theilchen weder ſtärker noch ſchwächer, ſondern nur gröſſer. Hingegen hat der Druck der Feder, an ſich betrachtet, eine abſolute Stärke, welche aber, wenn ſich derſelbe auf den ganzen Körper vertheilt, in umgekehrter Verhältniß der Maſſe, in jedem Theilchen ſchwächer wird. Da die Geſchwindigkeit, die in beyden Fällen erwächſt, bloß linear oder von einer Dimenſion ſeyn muß (§. 117), ſo läßt ſich allerdings gedenken, daß, ſo verſchieden auch die Dimenſionen dieſer beyden Arten von Kräften ſind, ſie ſich dennoch, wenigſtens mittelſt behöriger Coefficienten, welche die Heterogeneität der Dimenſionen aufheben müſſen, können vergleichen laſſen.

§. 127.

Man ſieht zugleich hieraus, daß die Bedingung der bloß linearen Geſchwindigkeit ſehr weit reicht, wenn man a priori die Möglichkeiten bey den bewegenden Kräften und der daraus entſtehenden Bewegung beſtimmen, und das, was dabey willkührlich und contingent ſcheinen möchte, behörig einſchränken will. So erhellet auch zugleich, daß, wenn eine Maſſe mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit bewegt werden ſolle, jedes Theilchen derſelben einen Druck von beſtimmter Stärke erhalten müſte, wie auch immer die drückende Kraft dabey angebracht ſeyn mag. Das Zufällige oder Willkührliche

führliche mag darin geſucht werden, daß da Zeit, Raum, Geſchwindigkeit, Maſſe, Kraft ꝛc. keine abſolute Einheit haben, ſondern von 0 bis ins Unendliche gehen können, ſie dennoch, wo ſie exiſtiren, eine beſtimmte Gröſſe haben müſſen. Da iſt nun allerdings die Frage, ob nicht alles in gleicher, oder wenigſtens in behöriger Verhältniß hätte gröſſer oder kleiner ſeyn können, ſchwerer zu entſcheiden.

§. 128.

Da ſichs demnach gedenken läßt, daß der Druck, den eine Kraft äuſſert, entweder unmittelbar auf jedes Theilchen der Materie wirkt, oder ſich nur bey einigen unmittelbar äuſſert, oder endlich ſich bey jedem Theilchen ungleich äuſſert, ſo wird derſelbe, wegen der Solidität und der Bebindung dieſer Theilchen, auf alle gleich vertheilt, oder, welches hier einerley iſt, die ganze Maſſe erhält einen mittlern Grad der Geſchwindigkeit, welcher ſich nach den auf jedes Theilchen der Materie vertheilten Drucke proportionirt. Wird hingegen dieſer Druck von einem gleich groſſen und gleich vertheilten Drucke in entgegengeſetzter Richtung aufgehalten, ſo findet ein Gleichgewicht ſtatt. Hieraus wird begreiflich, wie ſich ganz verſchiedene Kräfte, wie z. E. der Druck der Schwere, der ſtählernen Federn, der zuſammengepreßten Luft ꝛc. vermittelſt des Gleichgewichtes auf ein gemeines Maaß bringen, und ſelbſt auch in Abſicht auf die erfolgende Bewegung vergleichen

laſſen.

laſſen. Erſteres geht ſchlechthin an, letzteres fordert, daß man die Art der Kraft, oder die Art, wie ſie ihren Druck äuſſert und mittheilt, genauer kenne. Denn da die Theorie a priori mehrere ſolche Arten als möglich angiebt, ſo muß, in beſondern Fällen, a poſteriori gefunden werden, welche davon vorkömmt. Das vorhin (§. 126) gegebene Beyſpiel von der Schwere und elaſtiſchen Federn, mag auch hier zur Erläuterung dienen. Es iſt für ſich klar, daß ſolche mehrere Möglichkeiten der Nothwendigkeit der dynamiſchen Lehrſätze eben ſo wenig Abbruch thun, als die Möglichkeit mehrerer Figuren der Nothwendigkeit der geometriſchen Lehrſätze. In beyden iſt fürnemlich die Frage zu ſehen, was aus geſetzten Möglichkeiten folge, und wiefern ſie beyſammen ſeyn können. Und dieſes iſt auch der Leitfaden, dem wir in dem Vortrage der dynamiſchen Grund- und Lehrſätzen zu folgen haben.

§. 129.

So z. E. können wir nun ferners feſte ſetzen, daß, wenn eine Kraft ihren Druck gleichförmig, parallel und unmittelbar bey jedem Theilchen der Materie äuſſert, dadurch weder die Figur der ganzen Maſſe, noch die relative Lage der Theilchen unter ſich geändert werde, es ſey denn, daß ungleich entgegenwirkende Kräfte, oder ungleich angebrachte Hinderniſſe machen, daß einige Theile mehr als die andere, oder auch

auch einige gar nicht nachgeben. Denn ſo lange die Materie dem Drucke der durchaus gleich angebrachten Kraft allein überlaſſen iſt, da erhält, wegen des gleichen und parallelen Druckes, jedes Theilchen in einerley Direction einerley Geſchwindigkeit. Da ſich demnach die ganze Maſſe, oder das ganze Syſtem nach dieſer Richtung und mit dieſer Geſchwindigkeit bewegt, ſo bleibt die relative Lage jeder Theilchen unter ſich unverändert, und daher auch die ganze Figur ebenfalls. Daß dieſes hingegen bey den angeführten Hinderniſſen anders ſeye, iſt für ſich klar.

§. 130.

Iſt hingegen die Kraft entweder ungleich, oder nach verſchiedenen Richtungen, oder auch nur bey einigen Theilchen angebracht, ſo ſieht man ebenfalls, daß die ganze Maſſe eine abſolute Feſtigkeit haben müſte, wenn an der Figur und der relativen Lage der Theilchen nichts ſollte verändert werden. Die Feſtigkeit, und überhaupt die Verbindung der Theilchen, wodurch ſie nicht bloß wie ein Haufen Staubes an- und aufeinander liegen, ſondern zuſammen hängen, ſo, daß ſie, ohne Kraft anzuwenden, nicht getrennt werden können, rührt offenbar von Kräften her, die nicht die Materie ſelbſt, ſondern von derſelben verſchieden ſind. Oder, um dieſes a priori vorzutragen, ſo können wir erſtlich ſagen: der Begriff der Materie, für

ſich

ſich betrachtet, enthalte keine ſolche Verbindung, hingegen bringe es der Begrif der Kraft mit ſich, daß die Theilchen der Materie dadurch in Verbindung gebracht werden können, und zugleich auch, daß dieſes immer in gewiſſen Grad geſchehe, ſo, daß jede von einer gegebenen Kraft herrührende Verbindung, durch eine gröſſere Kraft gehoben, durch eine kleinere wenigſtens vermindert werden könne, und zwar auch ſo, daß erſtere wiederum ganz wirkt, wenn letztere weggenommen, oder anders angewandt wird. In der Natur geben die elaſtiſche und nicht elaſtiſche Körper eben ſo viele Beyſpiele. Man kann auch leicht zeigen, daß die Elaſticität nirgends ganz abſolut, ſondern nur relativ iſt. So iſt es zum Sprichwort geworden, daß ein ſtets geſpannter Bogen ſeine Elaſticität, wo nicht verleurt, doch merklich ſchwächt; und eine bleyerne Kugel wird bey geringer Geſchwindigkeit eine Elaſticität zeigen, die ſie bey gröſſern Geſchwindigkeiten ganz verleurt.

§. 131.

Wenn eine Kraft nur auf einige Theilchen, oder auch nur auf einen Punct eines feſten oder harten Körpers ihren Druck äuſſert, und dieſer Druck ſodann ſich auf jede Theilchen verbreitet; ſo wird der Körper, ohne ſich zu drehen, bewegt werden, ſo oft die Direction des Druckes durch den Vereinigungspunct der einzeln Kräfte, oder den ſogenannten Mittelpunct

der

der Schwere geht (§. 74). Denn man ſetze in entgegengeſetzter Richtung ſey eine gleich vertheilte und gleich groſſe Kraft angebracht; ſo wird eine Linie, welche in gleicher Richtung durch den Mittelpunct der Schwere, oder den Vereinigungspunct der Kraft geht, diejenige ſeyn, von welcher §. 65 die Rede war. Demnach wird ein Gleichgewicht ſtatt haben. Und welche von beyden Kräften man wiederum wegnimmt, ſo wird ſich der Körper nach dieſer Linie bewegen. Wäre die angebrachte Kraft der Druck einer Feder, ſo kann die Bedingung des Satzes nur alsdann erfüllt werden, wenn dieſer Druck da angebracht wird, wo die aus dem Mittelpunct der Schwere gezogene gerade Linie die Oberfläche des Körpers ſenkrecht durchſchneidet. Denn der Druck der Feder iſt immer auf die Fläche ſenkrecht, und folglich kann deſſen Richtung nur nach den Mittelpunct der Schwere gehen, wo erſtbemeldte Linie die Oberfläche des Körpers ſenkrecht durchſchneidet.

§. 132.

Wir haben den Beweis des erſtangeführten Satzes dadurch abgekürzt, daß wir denſelben auf den in den vorhergehenden Abſchnitten gegebenen reducirten. Der Grund dieſer Reduction liegt darin, daß man ähnliche Schlüſſe zu machen hat, es ſey, daß man für eine vertheilte Kraft den Vereinigungspunct ſucht, oder aus dieſem auf die vertheilte Kraft ſchließt.

Man

Fig. IV. Man ſetze z. E. eine unbiegſame Linie, und eine Kraft drücke nach der ſenkrechten Richtung CD auf den Punct C, ſo kann dieſe Kraft als auf jeden Punct A, B, P, M &c. vertheilt angeſehen werden, weil man in jeden dieſen Puncten entgegengerichtete Kräfte anbringen kann, ſo, daß C deren Vereinigungspunct, und die Summe dieſer Kräfte der in C angebrachten gleich ſey (§. 20). In einem Körper laſſen ſich unzählige ſolcher Linien gedenken, und, in Abſicht auf die Vertheilung der Kraft, eben ſo betrachten, wie wir ſie in den vorhergehenden Abſchnitten, in Abſicht auf die Vereinigung derſelben betrachtet haben. Bey wirklich materiellen Körpern ſetzt jedes Theilchen dem Druck der Kraft ſeine Trägheiten entgegen, und da wir dieſe bey jedem gleich ſetzen (§. 125. No. 2); ſo wird dadurch die Kraft auf alle gleich vertheilt, ſobald die Richtung der Kraft durch den Mittelpunct der Schwere, oder den Vereinigungspunct gleich vertheilter paralleler Kräfte geht. Denn die Trägheit eines jeden Theilchen läßt ſich als eine ſolche Kraft gedenken, welche ſich in paralleler Richtung der angebrachten Kraft entgegenſetzt. Und dieſes iſt auch der Grund warum erſtbemeldter Vereinigungspunct, der Mittelpunct der Trägheit, centrum inertiae, genennt werden kann.

§. 133.

Man ſetze nun hingegen die Richtung der auf einen Punct des Körpers angebrachten Kraft,

gehe

gehe nicht durch dieſen Mittelpunct der Trägheit, ſo iſt für ſich klar, daß ſich der Körper drehen muß, weil der Widerſtand, den der Körper der Kraft entgegen ſetzt, nicht auf beyden Seiten der Richtungslinie gleich iſt.

§. 134.

Setzt man endlich der Körper ſey nicht abſolute hart, ſo laſſen die vorhin bemeldten unbiegſamen Linien (§. 132.) in demſelben nicht gedenken; und aus gleichem Grunde fällt auch die Vertheilung der Kraft ganz anders aus, weil die Theilchen, wo die Kraft unmittelbar angebracht iſt, wo nicht ganz allein, wenigſtens mehr nachgeben, als die entferntern. Hiebey kommt nun alles auf die Beſchaffenheit der Kräfte an, womit die Theilchen des Körpers zuſammenhängen (§. 130). Und in ſo fern läßt ſich nichts allgemeines darüber ſagen, weil man vorerſt die verſchiedenen Möglichkeiten dabey in Claſſen bringen, und ſodann jede für ſich betrachten muß. So viel ſieht man leicht, daß, ſo lange die Theilchen ihre relative Lage ändern, keine gemeinſame Bewegung des ganzen Körpers ſtatt hat, daß der Mittelpunct der Trägheit ſelbſt ſeinen relativen und auch ſeinen wahren Ort ändert, und daß nur alsdann die gemeinſame Bewegung erfolgt, wenn die Figur nicht ferner mehr geändert werden kann. Denn alsdann kommen die unbiegſamen Linien wieder vor.

X. Die Beſtimmung der Geſchwindigkeit.

§. 135.

Da wir nun in der Dynamic a priori zu gehen, eigentlich nur Möglichkeiten zum Grunde zu legen, und die Folgen derſelben zu erörtern haben (§. 128), ſo iſt es zum Behuf ihrer Anwendung auf die in der Natur vorkommenden Kräfte, immer gut, daß dieſe Folgen ſo weit getrieben werden, bis man auf ſolche kömmt, die ſich allgemein umkehren laſſen, und wo ſie vorkommen, leicht kenntlich ſind. Denn auf dieſe Art läßt ſich ſodann auf die in der Welt wirklich angebrachte Möglichkeit in jedem Fall, und mit Ausſchlieſſung der übrigen, der Schluß machen, weil ſolche Folgen, im eigentlichſten Verſtande, zu Kennzeichen werden. So iſt die Geſchwindigkeit eines bewegten Körpers ſichtbar, ſo unſichtbar auch die Kraft und die Art ihrer Wirkung iſt (§. 115. 128). Läßt ſich demnach aus dem Geſetze, wie die Geſchwindigkeit anwächſt, auf die Art ſchlieſſen, wie die Kraft wirke, ſo hat man dabey immer ein vieles gewonnen, weil in vorkommenden Fällen die Erfahrung erſteres leichter als letztere angiebt. Dieſe Betrachtung wird uns demnach hier zum Leitfaden dienen. Sie iſt der ächte und eigentliche Weg, das ſo man a priori findet,

findet, auf das anzuwenden, was a poſteriori gefunden wird.

§. 136.

Wir fangen zu dem Ende bey dem einfachſten Fall an, welcher bey dem allmähligen Entſtehen der Geſchwindigkeit und der Bewegung (§. 123. 124) vorkommen kann. Wir ſetzen nemlich erſtlich, der Körper ſey hart, und dieſes macht, daß wir denſelben eben ſo wie die Wirkung der Kraft, als in den Mittelpunct der Trägheit concentrirt anſehen können (§. 72. 132). Sodann ſetzen wir, die Richtung der Kraft auf dieſen Punct bleibe, ſo lange die Wirkung dauert, eben dieſelbe; und dieſes macht, daß die entſtehende Bewegung geradelinicht bleibt, und demnach auch in Abſicht auf die Richtung einfach iſt. Endlich ſetzen wir, daß ungeachtet dieſer Punct ſich nach und nach geſchwinder bewegt, dieſe Geſchwindigkeit auf die fernere Wirkung der Kraft keinen Einfluß habe, ſo, daß ſie auf den bewegten Körper eben ſo drücke, als wenn derſelbe noch in Ruhe wäre. Man kann aus dem §. 129 ſeqq. ſehen, wo die erſte dieſer Vorausſetzungen, nemlich die abſolute Härtigkeit des Körpers nicht unumgänglich nöthig iſt, und wo ſie hingegen, wenn man einerley Erfolg haben will, nicht wegbleiben kann. In Anſehung der beyden andern Bedingungen begnügen wir uns hier damit, daß ſie gedenkbar ſind, ohne auf die ver-

ſchiedenen Arten des mechaniſmi zu ſehen, wodurch ſie in der That erhalten werden können. Da auch jede dieſer Bedingungen, für ſich betrachtet, die beyden andern ganz unbeſtimmt läßt, ſo iſt die Möglichkeit, daß ſie in einem Syſtem beyſammen ſeyn können, ebenfalls gedenkbar. Wir haben daher nur zu ſehen, was in dem Syſtem daraus ferner folge.

§. 137.

Einmal da die Geſchwindigzeit nur nach und nach anwächſt, ſo ſeye ſie zu jeder Zeit t, = c. Und ſo wird ihre Zunahme in der Zeit dt, = dc ſeyn (§. 123). Nun iſt in dem erſten Zeittheilchen dt, da der Körper noch in Ruhe iſt, die Wirkung der Kraft dieſe, daß ſie demſelben die Geſchwindigkeit dc durch ihren Druck mitheilt. Da nun vermög der dritten Vorausſetzung die Kraft auf den bewegten Körper eben ſo, wie auf den noch ruhenden wirkt, ſo theilt ſie demſelben in jedem gleich groſſen Zeittheilchen dt, eine gleiche Zunahme der Geſchwindigkeit dc mit. Demnach verhalten ſich nach jeder Zeit t die Summe aller dc, wie die Summe aller dt. Da nun die Summe aller dt = t, die Summe aller dc = c iſt, ſo iſt c in beſtändiger Verhältniß von t, und daher

$$c = mt$$

Es ſey nun der in der Zeit t durchlauffene Raum = x, ſo iſt der in der Zeit dt mit der Geſchwin-

ſchwindigkeit c durchlaufene Raum $= cdt = dx = mtdt$. Dieſe Formel integrit, giebt

$$x = \frac{1}{2}mt^2 = \frac{1}{2}c^2 : m$$

und auf dieſe Art haben wir nun Zeit, Raum uud Geſchwindigkeit mit einander verglichen. Der Raum wächſt wie das Quadrat der Zeit, und ſo auch wie das Quadrat der Geſchwindigkeit, und Zeit und Geſchwindigkeit nehmen in gleicher Verhältniß zu.

§. 138.

Die gefundenen drey Formeln

$$c = mt$$
$$x = \frac{1}{2}mtt$$
$$x = \frac{1}{2}cc : m$$

ſind nun in ſolcher Verbindung unter ſich, daß wo eine derſelben ſtatt findet, auch die übrigen ſtatt finden. Da wir die beyden letztern aus der erſten hergeleitet haben, ſo iſt dieſer Fall bereits erwieſen. Es ſey demnach

$$x = \frac{1}{2}mtt$$

ſo iſt $dx = mtdt$

demnach $mt = dx : dt = c$

Und ſo folgt die erſte, und damit auch die dritte Formel aus der zweyten. Wiederum ſey

$$x = cc : 2m$$

ſo iſt $dx = cdc : m$

demnach $dc = mdx : c$

Es iſt aber

$$dx : c = dt$$

folglich $dc = m\,dt$

welches integrirt

$$c = mt$$

die erſte Formel giebt. Da nun dieſe die zweyte giebt, ſo folgen auch beyde erſten Formeln aus der dritten. Demnach, wo eine derſelben ſtatt findet, da finden die beyden andern auch ſtatt.

§. 139.

Dieſe Abhänglichkeit der drey Formeln von einander macht, daß wir uns in folgender Betrachtung an die erſte, als die einfachſte, halten können, wo wir ſie mit den drey Bedingungen vergleichen werden, aus welcher ſie hergeleitet ſind (§. 136). Ich ſage demnach, daß, wo in einem fürgegebenen Fall die zwo erſten dieſer Bedingungen ſtatt finden, und die bemeldten Formeln finden ſtatt; ſodann auch die dritte Bedingung ſtatt finden werde. Man ſetze, ſie haben nicht ſtatt, ſo wirkt die Kraft auf den bewegten Körper ſtärker oder ſchwächer, als auf den ruhenden (§. 136. No. 3). Demnach iſt dc für jedes gleiche Zeittheilchen dt nicht mehr von einerley Gröſſe, ſondern muß als eine Function der bereits erlangten Geſchwindigkeit c angeſehen werden, ſo, daß wenn dieſe Function $= g$ iſt,

$$dt = g\,dc$$

und daher

$$t = \int g\,dc$$

ſey.

ſey. Nun aber iſt, vermög der Voraus-
ſetzung $t = mc$
demnach $mc = \int g dc$
$mdc = gdc$
demnach $m = g$, das will ſagen, g iſt beſtändig. Da nun g eine Function von c iſt, ſo müſte auch c beſtändig ſeyn, demnach die Geſchwindigkeit nicht anwachſen. Da nun dieſes der Bedingung zuwider iſt, ſo hat die Ausſage des Satzes nothwendig ihre Richtigkeit.

§. 140.

Da in dem hier betrachteten Fall (§. 136 ſeq.) die Geſchwindigkeit wie die Zeit anwächſt, das Anwachſen der Zeit aber gleichförmig iſt, ſo iſt auch das Anwachſen der Geſchwindigkeit gleichförmig. Und dieſes iſt der Grund, warum man den hier betrachteten Fall, den Fall der **gleichförmig beſchleunigten Bewegung** motus uniformiter acceleratus, nennet. Demnach, wo eine ſolche Bewegung in geradlinichter Richtung vorkömmt, und der Körper als in ſeinen Mittelpunct der Trägheit concentrirt angeſehen werden kann, da folgt der Schluß nothwendig, daß die beſchleunigende Kraft, vis acceleratrix, dem Körper in jeden gleichen Zeittheilchen dt eine gleiche Zunahme der Geſchwindigkeit mittheile, und auf den bewegten Körper eben ſo wirke, als wenn derſelbe noch in Ruhe wäre. Wir

werden im folgenden ſehen, daß dieſer Umſtand bey dem durch die Kraft der Schwere verurſachten Körper vorkommt.

§. 141.

Ungeachtet wir nun bey dem erſtbetrachteten Fall Zeit, Raum und Geſchwindigkeit in Vergleichung gebracht haben, ſo bleibt doch deren Verhältniß zu der Kraft ſelbſt noch unerörtert. Wir haben demnach zu erweiſen, daß ſich die Geſchwindigkeit nach der Gröſſe der Kraft richtet, oder in gleicher Verhältniß mit derſelben gröſſer oder kleiner iſt, immer unter der Vorausſetzung, daß die einmal erlangte Geſchwindigkeit des Körpers in die fernere Wirkung der Kraft keinen Einfluß habe, oder daß die Kraft auf den bewegten Körper eben die Wirkung äuſſere, als auf den noch ruhenden. Dieſer Umſtand macht nun, daß wenn der Körper, anſtatt von einer Kraft gedrückt zu werden, zugleich von zwo, drey ꝛc. n gleichen Kräften gedrückt wird, jede von dieſen Kräften ihre Würkung eben ſo äuſſert, als wenn ſie allein wäre, weil die Bewegung des Körpers, die aus der Wirkung der übrigen erfolgt, vermöge der Vorausſetzung, daran nichts ändert; und weil hier eben ſo wie oben (§. 102) eine Kraft n deswegen $= n$ iſt, weil ſie für n einfache Kräfte geſetzt werden kann. Wenn demnach die Kraft 1 in der Zeit 1 die Geſchwindigkeit 1 herfürbringt, ſo bringen n Kräfte in

eben

eben der Zeit 1 die Summe der Geſchwindigkeiten, oder die Geſchwindigkeit n herfür, und zwar deswegen in der Zeit 1, weil ſie zugleich wirken, und jede ihre Wirkung, das will ſagen, eine Geſchwindigkeit = 1, herfürbringt. Da nun jede Geſchwindigkeit von einer Kraft herrührt, und der Druck von n Kräften eben der iſt, wie der Druck von einer Kraft n, ſo bringt eine Kraft n die Geſchwindigkeit n herfür, wenn in gleicher Zeit die Kraft 1 die Geſchwindigkeit 1 herfür bringt. Demnach wird die Geſchwindigkeit in gleicher Verhältniß mit der Kraft gröſſer oder kleiner.

§. 142.

Hieraus folgt nun ferner, daß, da vermög des vorhin erwieſenen, eben die Geſchwindigkeit n von der Kraft 1 in der Zeit n herfürgebracht wird, man an der Zeit gewinnt, was man an der Kraft vermehrt, und daß einerley Geſchwindigkeit erhalten werde, wenn die Kraft in umgekehrter Verhältniß der Zeit iſt. Demnach haben wir wenn die Zeit = t, die Kraft = k, die Geſchwindigkeit = g geſetzt wird, die Formel

$$g = ntk$$

wo n eine Gröſſe bedeutet, die bey gleicher Maſſe des Körpers, und da wo die Kraft unmittelbar auf jedes Theilchen wirkt, für ſich beſtändig iſt. Wirkt aber die Kraft nicht unmittelbar auf jedes Theilchen, ſo, daß ſie erſt

communicationsweiſe vertheilt wird, ſo haben wir oben ſchon geſehen, daß dieſelbe in umgekehrter Verhältniß der Maſſe ſchwächer wird (§. 132). Setzt man demnach für dieſe Fälle k ſey die abſolute Kraft, ſo wird n in umgekehrter Verhältniß der Maſſe kleiner, wenn die Maſſe des Körpers gröſſer genommen wird. Setzt man demnach für dieſe Fälle die Maſſe $= m$, ſo wird man

$$g = \frac{tk}{m}$$

haben.

§. 143.

Nach der bisher angeſtellten Unterſuchung des einfachſten Falls (§. 136 ſeq.) werden ſich nun diejenigen beurtheilen laſſen, die zuſammengeſetzter ſind. Hieher gehören nun erſtlich diejenigen, wo die Kraft ſich während der Wirkung verändert. Für dieſe Fälle müſſen wir ſtatt der Formel

$$g = \frac{tk}{m}$$

die Differentialformel

$$dg = \frac{kdt}{m}$$

nehmen, weil ſich nicht g nach k, ſondern in jedem Zeittheilchen dt, die Zunahme der Geſchwindigkeit nach k . dt proportionirt. Denn obgleich ſich während dieſem Zeittheilchen k in $k + dk$ verändert, ſo ſieht man leicht, daß,

weil

weil k nur dg herfürbringt, dk nur ddg herfürbringen könne, und demnach durch die ganze Summe von allen dk nur dg herfür gebracht werde, welche Gröſſe neben g, ſo durch $\int \frac{k\,dt}{m}$ herfür gebracht wird, verſchwindet.

§. 144.

Es kömmt aber bey der Formel

$$dg = \frac{k\,dt}{m},$$

wo nunmehr auch k als veränderlich angeſehen wird, darauf an, daß man wiſſe, nach welchem Geſetze ſich k verändere. Mir iſt kein Fall bekannt, wo k ſchlechthin nur, der Zeit nach, oder bloß deßwegen, weil die Wirkung dauert, gröſſer oder kleiner werde. Ich ſage, ſchlechthin nur der Zeit nach. Denn da k nicht zugleich verſchiedene Gröſſe haben kann, ſo iſt für ſich klar, daß, aus welchen Urſachen auch immer k gröſſer oder kleiner wird, dieſes nach und nach geſchehe, und ſich folglich allemal auch ein Verhältniß zwiſchen k und t gedenken läßt. Hingegen kann k viel unmittelbarer von dem Raume abhängen, und dies geſchieht, ſo ofte die Kraft nicht aller Orten gleich wirkt. Man ſetze demnach den durchlaufenen Raum $= x$, ſo iſt $g\,dt = dx$, demnach $dt = dx : g$. Wird dieſer Werth geſetzt, ſo verwandelt ſich die Formel in

$$dg = \frac{k\,dx}{mg}$$

oder

oder $gdg = kdx : m$.

Da nun k eine Function von x iſt, ſo darf man nur x durch k, oder k durch x beſtimmt haben, und es wird

$$\tfrac{1}{2} mgg = \int kdx$$

ſeyn. Da man ſich leicht gedenken kann, daß zwiſchen k und x unzählige Verhältniſſe möglich ſind, ſo muß in jedem Fall aus Betrachtung der Sache, ihrer Umſtände und Folgen erörtert werden, welche davon wirklich vorkömmt.

§. 145.

Endlich kann man ſich auch gedenken, daß k ſich nach der Geſchwindigkeit g richte, und dieſes hat nothwendig ſtatt, ſo oft die Kraft in einen bewegten Körper ſtärker oder ſchwächer wirkt, als in einen ruhenden. In dieſen Fällen iſt k eine Function von g, und demnach

$$t : m = \int dg : k$$

$$x : m = \int gdg : k$$

Man ſieht leicht, daß auch hier die Verhältniß zwiſchen g und k aus den Umſtänden, Natur und Folgen der Sache beſtimmt werden muß. Eigentlich betrift die Aenderung, die k von der Geſchwindigkeit des Körpers leiden kan, mehr die Wirkung der Kraft, als die Kraft ſelbſt. Da aber in dieſen Formeln k wegen der Wirkung vorkömmt, ſo kann der Werth davon allerdings, in dieſer Abſicht, als veränderlich angeſehen werden, weil es in ſofern ei-

nerley

nerley iſt, ob ſich die Kraft, oder nur ihre Wirkung ändert. Der Erfolg iſt einerley, und der Unterſchied iſt nur, daß ſodann k die relative Wirkung vorſtellt, weil eigentlich die Wirkung der Kraft auf einen ruhenden Körper abſolut iſt.

XI. Anwendung der Dynamic auf die Schwere.

§. 146.

Die Verſuche, die von Galilaeo und ſeit demſelben über den Fall der Körper theils in freyer Luft, theils in luftleeren Raume ſind angeſtellt worden, geben überhaupt an, daß ein Körper deſto tiefer fällt, je gröſſer das Quadrat der Zeit iſt. Demnach zeigen dieſe Verſuche, daß $x = \frac{1}{2} mtt$ iſt. Und hieraus folgt, daß die (§. 138) angegebenen drey Formeln bey dem Fall der Körper ſtatt habe, und daher derſelbe eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung ſey (§. 140). Nun haben wir oben (§. 77. 78) geſehen, daß die Kraft der Schwere, in verticaler Richtung, unmittelbar auf jedes Theilchen der Materie ihren Druck äuſſere, und folglich allemale als in dem Mittelpunct der Schwere vereinigt angeſehen werden kann (§. 79). Dieſer Punct kann nun um deſtomehr ſtatt des ganzen Körpers genommen werden, da deſſen relative Lage in dem

Körper,

Körper, auch wenn er fällt, unverändert bleibe (§. 129).

§. 147.

Hieraus folgt nun aber, daß die Geſchwindigkeit, die der Körper im Fallen erreicht, der fernern Wirkung der Schwere keinen Abbruch thut, oder, daß die Kraft der Schwere auf fallende Körper eben ſo, und weder mehr noch minder als auf ruhende wirkt. Wir haben, um dieſes zu beweiſen, nunmehr weiter nichts zu thun, als den vorhergehenden §. 146 mit dem §. 139 zu vergleichen, um ohne Mühe zu finden, daß die im §. 139 geforderten Bedingungen bey dem Falle der Körper ſtatt finden. Dieſe Bedingungen ſind

1°. Die drey Formeln des §. 138. oder, wegen ihrer eben daſelbſt erwieſenen Abhänglichkeit, auch nur eine.

2°. Daß der Körper als in dem Mittelpunct der Trägheit concentrirt angeſehen werden könne.

3°. Daß die Richtung der Kraft auf dieſen Punct eben dieſelbe bleibe, ſo lange die Wirkung dauert.

Nun iſt (§. 146) bey dem Fall der Körper

1°. Die Formel $x = \frac{1}{2} mtt$, demnach auch die beyden anderen (§. 138).

2°. Vereinigt ſich die Wirkung der Schwere in deſſen Mittelpunct der Schwere, oder der Trägheit (§. 79. 132).

3°. Iſt

3°. Iſt die Richtung ſowohl der Kraft als des fallenden Körpers eine verticale Linie (§. 77. 78).

Da demnach dieſe drey Bedingungen erfüllt werden, ſo folgt auch der Schlußſatz, den wir in angeführtem §. 139 daraus gezogen, ſo nothwendig, daß das Gegentheil deſſelben mit dieſem Bedingungen nicht beſtehen kan (§. 139). Demnach wirkt die Schwere auf fallende Körper eben ſo wie auf ruhende.

§. 148.

Da wir ferner (§. 78) geſehen haben, daß die Kraft der Schwere ihren Druck unmittelbar bey jedem Theilchen äuſſert, ſo wird dieſelbe nicht erſt von einigen derſelben auf alle vertheilt, noch durch eine ſolche Vertheilung bey jedem Theilchen ſchwächer. Und hieraus wird begreiflich, daß die Gröſſe des Körpers oder ſeine Maſſe, oder die Menge der Theilchen die Geſchwindigkeit des Fallens nicht ändert, wie dieſes geſchieht, wo die Kraft erſt in den Körper vertheilt wird (§. 142). Man hat auch wirklich gefunden, daß in luftleerem Raume jede Körper mit gleicher Geſchwindigkeit fallen.

§. 149.

Die leichteſte Art, wodurch die Richtung des Falls eines Körpers geändert wird, iſt, wenn derſelbe auf einer ſchiefliegenden Fläche

F. XXVI. ſich herunter bewegt. Es ſey AB eine ſolche Fläche, die unter dem Winkel BAD gegen den Horizont AD geneigt iſt. Der Körper befinde ſich in C, und die Kraft der Schwere, wodurch er würde nach H herunter gedrückt werden, wenn die Fläche AB nicht wäre, werde durch die verticale Linie CE vorgeſtellt. Man ziehe EF mit AB parallel, EG, CF aber auf AB ſenkrecht, ſo iſt CE die Diagonale des Rectangels CFEG. Da es nun vermög des §. 107 gleichviel iſt, wenn man ſtatt der Kraft CE, die zwo ſenkrechten Kräfte CF, CG auf C drücken läßt, ſo wollen wir dieſes ſetzen. Und da ergiebt ſich von ſelbſt, daß, da die Kraft FC den Körper ſenkrecht gegen die Fläche AB drückt, dieſe Kraft den Körper ſchlechthin nur in Ruhe erhalten würde, wenn ſie allein wäre. Demnach kömmt alle Bewegung, die der Körper erhält, von der Kraft GC her. Und da dieſe Kraft in gleicher Richtung mit CA wirkt, ſo drückt ſie den Körper ſchlechthin und ohne andere Hinderniß nach dieſer Richtung herunter. Da nun CE, ohne Rückſicht auf die Bewegung des Körpers, immer einerley bleibt, und der Winkel CEG, CGE ebenfalls ihre Grösſe behalten, ſo bleibt auch CG beſtändig, und theilt daher den Körper C in iedem Zeittheilen dt eine gleiche Zunahme der Geſchwindigkeit dc mit. Da aber CG kleiner iſt als CE, ſo iſt auch dc in gleicher Verhältniß kleiner als dg, oder die

Zunah-

Zunahme der Geſchwindigkeit, welche die abſolute Kraft der Schwere C E dem Körper in eben der Zeit mittheilen würde (§. 141). Demnach haben wir

$$CE : CG = dg : dc$$

oder

$$1 : \cos ACH = dg : dc$$

und hieraus

$$dc = dg . \cos ACH.$$

$$c = g . \cos ACH$$

oder wenn man H J auf A B ſenkrecht zieht

$$c : g = CJ : CH$$

Da nun die Geſchindigkeit g wie die Zeit zunimmt (§. 147), c aber derſelben proportional iſt, ſo nimmt auch die Geſchwindigkeit c wie die Zeit zu. Daher ſind auch die in gleicher Zeit durchlaufenen Räume den Geſchwindigkeiten proportional, weil

$$\int g\,dt : \int c\,dt = CH : CJ$$

wird. Demnach wird C J und C H in gleicher Zeit durchlaufen. Endlich folgt daraus, daß c in gleicher Verhältniß wie t zunimmt, daß der Körper auch auf der ſchiefliegenden Fläche mit gleichförmig beſchleunigter Geſchwindigkeit herunterläuft (§. 140) und der durchlaufene Raum, ſowohl in Verhältniß des Quadrats der Zeit, als auch in Verhältniß des Quadrats der erlangten Geſchwindigkeit ſey (§. 137). Wenn man demnach die Zeit, in welcher der Körper vertical durch C H fallen würde = 1,

und die in H erlangte Geſchwindigkeit ebenfalls = 1 ſetzt, ſo iſt die Zeit, in welcher CJ durchlaufen wird ebenfalls = 1, hingegen die in J erlangte Geſchwindigkeit nur = coſ JCH. Man ſetze nun die Zeit um CA zu durchlaufen ſeye = τ, die Geſchwindigkeit in A ſeye = γ, ſo haben wir

$$CJ : CA = 1 : \tau^2 = \text{coſ}\, ACH^2 : \gamma^2$$

demnach

$$1 : \tau = \text{coſ}\, ACH : \gamma = \surd CJ : \surd CA$$

Es iſt aber

$$\surd CJ : \surd CA = CH : CA = \text{coſ}\, ACH : 1$$

demnach

$$1 : \tau = \text{coſ}\, ACH : \gamma = \text{coſ}\, ACH : 1$$

und hieraus

$$\tau = \text{ſec}\, ACH$$
$$\gamma = 1.$$

Das will nun ſagen, wenn der Körper aus C bis auf die Horizontallinie AD kömmt, es ſey daß er durch CH gerade, oder nach jeder ſchieſen Fläche CA herunter falle, ſo erhält er in H oder in A einerley Geſchwindigkeit, hingegen gebraucht er deſtolängere Zeit, je länger der Raum CA als CH iſt. Da die Erfahrung dieſes ebenfalls bekräftigt, ſo könnte man hieraus, wiewohl a poſteriori, den Schluß ziehen, daß

$$dc : dg = CG : CE$$

ſeye. Da aber dieſer Schluß unter eben der Bedingung, daß die Schwere auf bewegte, wie auf ruhende Körper einerley Druck äuſſere,

gezo-

gezogen wird, aus welcher wir denſelben im vorhergehenden (§. 141) a priori gezogen haben, ſo halten wir uns hier damit nicht länger auf.

§. 150.

Wäre AB nicht eine ebene, ſondern gebogene Fläche, ſo würde der Winkel ACH von veränderlicher Grösſe ſeyn, und damit hätten wir nicht

$$c = g . \cos ACH$$

ſondern nur

$$c = \int dg . \cos ACH$$

oder

$$c = \int \frac{CG}{CE} . dg$$

Da nun (§. 143)

$$dg = \frac{kdt}{m}$$

iſt, ſo iſt

$$c = \int \frac{CG . k}{CE . m} . dt = \int \frac{k . dt}{m} . \cos ACH$$

Hier kann man nun k = CE ſetzen, weil CE die abſolute Kraft der Schwere vorſtellt, und ſo wird

$$c = \int \frac{CG . dt}{m}$$

ſeyn. Wir werden uns aber hier nicht aufhalten, dieſe Formel auf einige krumme Linien oder gebogene Flächen anzuwenden, theils weil dieſes ſchon zur Genüge geſchehen iſt, fürnemlich aber weil unſere Abſicht mehr auf die deutlichere Entwickelung der dynamiſchen Grund-

ſätze als auf die Betrachtung deſſen geht, was daraus folgt, wenn ſie einmal in Richtigkeit ſind. Der Anſtand und die Streitigkeiten, ſo man darüber geführt hatte, betreffen auch fürnemlich nur dieſen letztern Punct.

XII. Anwendung der Dynamic auf die Federkraft.

§. 151.

Ich werde hier, ohne zu unterſuchen, durch welchen Mechaniſmus eine geſpannte Feder eine Kraft hat zu drücken, ſchlechthin nur annehmen, daß ſie eine ſolche Kraft habe, und um nicht Nebenumſtände einzumengen, werde ich dieſe Kraft vollkommen ſetzen; das will ſagen, die Feder ſolle, wenn ſie loßgeſchnellt wird, oder auch nachdem ſie ihren Druck auf einen Körper geäuſſert hat, vollkommen wiederum ihre vorige Figur erhalten. Denn bliebe ſie mehr gebogen, als ſie vor dem Spannen ware, ſo würde von ihrer Kraft etwas abgegangen ſeyn; und eben dieſes iſt es, warum man ſie in ſolchem Fall unvollkommen nennt.

§. 152.

So viel nun immer die Feder geſpannt iſt, iſt ſie mit derjenigen Kraft, wodurch ſie geſpannt erhalten wird, im Gleichgewichte, und

daher iſt die Kraft der Feder der ſpannenden Kraft gleich. Da nun eine Feder durch Gewichte geſpannt werden kann, ſo läßt ſich dadurch ihre Kraft, bey jedem Grade der Spannung mit der Kraft der Schwere vergleichen, weil ſie das angehängte Gewicht eben ſoviel in die Höhe drückt, als daſſelbe von der Schwere herunter gedrückt wird. Da ſich nun die Kraft der Feder auf jedes Theilchen der Materie des Gewichtes eben ſo vertheilt, als die Kraft der Schwere wirklich vertheilt iſt (§. 126) ſo wird auch jedes Theilchen von beyden Kräften gleich viel gedrückt, und demnach erhält es, welche von beyden Kräften weggenommen wird, in dem erſten Zeittheilchen d t, einerley Geſchwindigkeit d g. Denn das Gewicht iſt, ſowol in Abſicht auf die Kraft der Schwere, als in Abſicht auf die Kraft der Feder, ſchlechthin nur Materie, und ſetzt daher beyden nur die ſogenannte Trägheit entgegen (§. 119 ſeqq.)

§. 153.

Solle nun die Vergleichung weiter können fortgeſetzt werden, ſo kömmt es darauf an, wiefern man ſetzen kann, die Feder äuſſere auf einen bewegten Körper eben den Druck, den ſie bey gleicher Spannung auf eben denſelben äuſſert, wenn er in Ruhe iſt? Solle dieſe Frage a priori und nach aller Schärfe erörtert werden, ſo müſſen wir die Feder immateriel ſetzen, und zwar aus einem ähnlichen

Grunde, aus welchem wir oben (§. 14 ſeqq.) eine immaterielle unbiegſame Linie angenommen haben. Denn eine materielle Feder hat, wegen eigener Trägheit, eine Kraft nöthig, ſich ſelbſt fortzudrücken. Man könnte zwar auch die der Feder eigene Materie mit zum Gewichte nehmen, dadurch würde aber die Erörterung der Frage nur weitläuftiger. Setzen wir demnach die Feder immateriel, oder wir betrachten ſie als eine elaſtiſche Linie, ſo iſt für ſich klar, daß ſie ihren Druck nicht deswegen äuſſert, weil ſie durch das Loßſchnellen eine Geſchwindigkeit erhält. Denn dieſer Druck iſt da, auch wenn ſie im Gleichgewichte erhalten wird. Demnach ändert die Bewegung an dieſem Drucke nichts. Da nun dieſer Druck ſich deswegen äuſſern kann, weil der Körper währendem Fortdrücken immer an der Feder anliegt, ſo muß auch nothwendig die Geſchwindigkeit d g eben dieſelbe ſeyn, es ſey daß die Bewegung erſt anfange, oder ſchon erfolgt ſeye.

§. 154.

Man kann ſich dieſes auch ſo vorſtellen: Der Körper hat, in Abſicht auf die Feder, keine relative Bewegung, weil beyde einander immer berühren, und folglich mit gemeinſamer Geſchwindigkeit fortbewegt werden. Da nun die Feder, weil ſie immateriel iſt, keine Kraft braucht, ſich ſelbſt fortzudrücken, ſo kann ſie immer ihre ganze Kraft auf den Körper wenden.

§. 155.

Es ſey nun ein elaſtiſcher Ring AB in dem Punct A befeſtigt. Der gegenüberſtehende Punct B werde gegen A gedrückt, und dadurch der Diameter AB verkürzt. Die krumme Linie BE ſeye von der Art, daß bey jeder Verkürzung AP, die Ordinate PM die Kraft vorſtelle, welche den Ring bis in P zuſammen drücken kann. Nun ſey der Ring bis in D zuſammengedrückt, und nachdem in D ein Körper, z. E. eine harte Kugel an denſelben gelegt worden, ſchnelle der Ring loß, und treibe die Kugel gegen B fort; ſo iſt die Frage, nach welchen Geſetzen dieſes geſchehen werde? Um dieſes zu finden, ſetze man die Kugel ſey nach einer Zeit t, aus D bis in P gekommen, und BP = x, PM = k die Maſſe der Kugel = m, die Geſchwindigkeit = g, ſo haben wir vermög des §. 143 Fig. XXVII.

$$dg = kdt : m$$

und eben ſo vermög des §. 144, weil hier x rückwerts genommen wird,

$$-gdg = kdx : m = PMmp : m$$

demnach

$$\tfrac{1}{2}gg = -\int\frac{kdx}{m} = \frac{DEMP}{m}$$

Wird nun die gröſte Geſchwindigkeit in B, = G geſetzt, ſo ſieht man leicht, daß

$$GG = \frac{2DEB}{m}$$

iſt.

§. 156.

Nun ſtellt der Raum, wiewohl nach einer zweyten Dimenſion, die Summe aller einzelnen Kräfte vor, mit welchen der Ring auf die Kugel gedrückt hat. Wird demnach dieſer Raum durch die Linie D C dividirt: ſo iſt DEB : DD die mittlere Kraft, womit die Kugel iſt gedrückt worden. Und dieſe mittlere Kraft iſt von der Art, daß, wenn der Ring die Kugel durch die ganze Linie D B beſtändig mit dieſer Kraft fortgedrückt hätte, ſie in B eben die Geſchwindigkeit G würde erreicht haben, welche ſie durch die nach und nach verminderte Kraft R erreicht hat.

§. 157.

Setzen wir demnach dieſe mittlere Kraft

$$DEB : DB = P$$

ſo iſt

$$DEB = P . DB$$

und demnach (§. 155)

$$GG = 2 . P . DB : m$$

Alſo iſt das Quadrat der zuletzt erhaltenen Geſchwindigkeit G im Verhältniß der mittleren Kraft P, wenn dieſe vorerſt mit dem von der Kugel durchlaufenen Raum D B multiplicirt, und durch die Maſſe der Kugel dividirt wird. Demnach iſt dieſes Quadrat nicht abſolute in Verhältniß der mittlern Kraft P; und noch weni-

weniger iſt es in Verhältniß der gröſten angewandten Kraft DE. Denn wäre dieſes, ſo würde

$$DE \backsim \frac{DEB}{m}$$

ſeyn. Demnach würde ſich, bey verſchiedenen Kugeln und einerley Ring, DE nach der Maſſe der Kugel richten, welches ungereimt iſt, weil DE das abſolute Maaß der Kraft des Ringes vorſtellt, die derſelbe bey der Zuſammendrückung AD hat. Und wenn auch m immer beſtändig von gleicher Gröſſe wäre, ſo würde

$$DE \backsim DEB$$

ſeyn, welches nicht angeht, dafern nicht EB eine logarithmiſche Linie iſt. Sollte aber dieſes ſeyn, ſo wäre die Ordinate in B nicht $= 0$, und überhaupt nirgends $= 0$, das will ſagen, der Ring wäre kein Ring, weil er ſeinen Diameter AB immer verlängern würde. Man ſieht leicht, daß dieſe letztere Ungereimtheit auch vorkommt, wenn man gleich

$$m . GG \backsim DE$$

oder das Product aus dem Quadrat der Geſchwindigkeit in die Maſſe der Kugel der gröſten angewandten Kraft DE proportional ſetzen wollte. Dieſe Anmerkung trägt ſehr viel dazu bey, wenn man das Leibnitziſche Kräftenmaaß, welches eben $= mGG$ iſt, beleuchten will. Denn man ſieht aus der Formel

$$mGG = P . DP$$

daß mGG theils keine Kraft vorſtellt, und der Kraft P nur unter ſehr veränderlichen Bedingungen proportional iſt, weil DP bey jedem Ringe nach Willkühr angenommen werden kann, je nachdem man denſelben, mehr oder minder, zuſammendrucken will.

§. 158.

Um nun die Formeln (§. 155)

$$dg = kdt : m$$

$$gdg = kdx : m$$

auf bekannte Maaſſe zu bringen, ſo kann man erſtlich ſowohl k als m durch Gewichte ausdrücken, weil das Gewicht, in Abſicht auf k, eine der Federkraft gleiche Kraft der Schwere, in Abſicht auf die Maſſe m aber derſelben Trägheit vorſtellt, als welche ſich der Schwere eben ſo wie der Kraft der Feder widerſetzt (§. 152). Sodann wendet man dieſe Formeln auf den Fall der Körper an, um die Geſchwindigkeit durch die Höhe auszudrücken, durch welche ein Körper fallen muß, um dieſe Geſchwindigkeit zu erreichen. Bey dieſer Anwendung ſtellt nun k die Kraft der Schwere vor, und wird dem Gewichte m gleich geſetzt, weil dieſes Gewicht von der Schwere herrührt. Auf dieſe Art erhält man

$$g = t$$

$$\tfrac{1}{2}gg = x = \tfrac{1}{2}tt$$

Will man nun die Zeit in Secunden, die Höhe x in rheinländiſchen Fuſſen, und die Geſchwindigkeit

digkeit durch den Raum vorſtellen, den der Körper, vermittelſt der Geſchwindigkeit g, in einer Secunde Zeit durchlaufen kann; ſo giebt die Erfahrung, daß

$$x = \frac{1000}{64} . tt$$

demnach

$$dx = \frac{1000}{32} . tdt$$

und

$$g = dx : dt = \frac{1000}{32} t$$

$$\frac{1}{2} gg = \frac{1}{2} \left(\frac{1000}{32}\right)^2 . tt = \frac{1000}{16} x$$

iſt. Da demnach hier, wegen der angenommenen Einheiten, Coefficienten vorkommen, ſo werden wir

$$\frac{32}{1000} . g = \int \frac{kdt}{m}$$

$$\frac{16}{1000} . gg = \int \frac{kdx}{m} = v$$

erhalten, und da iſt v diejenige Höhe, von welcher ein Körper fallen muß, um die Geſchwindigkeit g zu erhalten.

XIII. Der Stoß elaſtiſcher Körper.

§. 159.

Es ſeyn zween elaſtiſche Ringe AC, CB in dem gemeinſamen Berührungspunct C befeſtigt, von ungleicher Gröſſe, aber von gleicher Schnellkraft. Das Maaß der Schnell- Fig. XXVIII.

Schnellkraft werde, wie vorhin (§. 155) durch die Ordinaten PN, pn der krummen Linien AE, Be vorgeſtellt, ſo iſt PN = pn, wenn AP und Bp in Verhältniß der Diameter AC, BC ſind. Denn dieſes verſtehen wir durch die angenommene Gleichheit der Schnellkraft. Man ſetze nun der Ring AC ſey in DC, und der Ring BC in dC zuſammengedrückt, ſo, daß AC : DC = BC : dC ſey, und indem man in D und d Kugeln legt, deren Maſſen m, M ſich umgekehrt wie die Diameter AC, BC verhalten, ſo laſſe man beyde Ringe loß-ſchnellen. Die Geſchwindigkeit der Kugel m in A ſey = C, die Geſchwindigkeit der Kugel M in B ſey = c, ſo iſt (§. 155)

$$CC = 2 AED : m$$
$$cc = 2 Bed : M$$

demnach

$$CC : cc = \frac{AED}{m} : \frac{Bed}{M}$$

Nun iſt aber das Verhältniß der Räume

$$AED : Bed = AD : Bd = AC : BC$$

das Verhältniß der Maſſen aber

$$m : M = BC : AC$$

demnach

$$\frac{AED}{m} : \frac{Bed}{M} = \frac{AC}{BC} : \frac{BC}{AC} = AC^2 : BC^2$$

und folglich

$$CC : cc = AC^2 : BC^2$$

oder

oder $C:c = AC:BC = M:m$

Das will ſagen, die Geſchwindigkeiten verhalten ſich umgekehrt wie die Maſſen, oder directe wie die durchlaufenen Räume, weil

$$AC:BC = AD:BD$$

iſt. Demnach werden die Räume AD, Bd, und ſo auch jede Räume PD, pd in gleicher Zeit durchlaufen, weil, was wir von den ganzen Räumen AED, Bed geſagt haben, von jeden zwiſchen gleiche Ordinaten fallenden Räumen PNED, pned gilt.

§. 160.

Um nun aus dieſem Satze den daraus entſpringenden Vortheil zu ziehen, ſo folgt erſtlich daraus, daß die beyden Kugeln m, M nicht nur anfangs da ſie in D und d gleich gedrückt werden, ſondern da ſie in gleicher Zeit in P und p kommen, wo $PN = pn$ iſt, ſie in jedem Augenblicke mit gleicher Kraft fortgedrückt werden. Nun wird der Punct C in jedem Augenblicke von jedem Ringe ſo viel als die Kugel gedrückt, die der Ring forttreibt. Da nun jede Kugel gleich gedrückt wird, ſo wird auch der Punct C von jedem Ringe gleich gedrückt. Da ferner die Richtungen einander entgegengeſetzt ſind, ſo ſieht man leicht, daß ein Gleichgewicht da iſt, und folglich der Berührungspunct beyder Ringe, auch wenn er nicht beveſtigt wäre, dennoch in Ruhe bleiben würde. Da nun allemale

CP

$$CP : Cp = M : m$$

iſt, ſo läßt ſich der Punct C als der Mittelpunct der Schwere beyder Maſſen m, M anſehen (§. 32. 74).

§. 161.

Man laſſe nun die beyden Kugeln jede mit der erlangten Geſchwindigkeit gegen die Ringe laufen, m mit der Geſchwindigkeit C gegen A, und M mit der Geſchwindigkeit c gegen B, ſo, daß ſie zu gleicher Zeit in A und B an die Ringe ſtoſſen; ſo werden ſie ihre Geſchwindigkeit eben ſo verlieren, wie ſie ſie vorhin erhalten haben; ferners werden ſie in jeden gleichnahmigten Puncten P, p in gleicher Zeit eintreffen; und endlich werden ſie die Ringe bis wiederum in D und d zuſammendrücken. Denn da der Druck eines jeden Ringes ſich, ohne Rückſicht, auf die Bewegung der Kugel gleich äuſſert (§. 153. 154), ſo theilt der Ring AB der Kugel m in jedem Punct P eben die Geſchwindigkeit dg mit, die Kugel mag ſich von P gegen A oder gegen C bewegen. Der Unterſchied beſteht demnach nur darin, daß, weil die Geſchwindigkeit dg die Kugel in beyden Fällen von C gegen A entfernt, ſie im erſtern Fall die Geſchindigkeit der Kugel vermehrt oder dazu addirt wird, im andern Fall aber dieſelbe vermindert oder davon ſubtrahirt wird. Da demnach für jeden Punct P in beyden Fällen

$$-gg = \frac{2}{m}\int k\,dx + \text{const.}$$

iſt; ſo haben wir für den erſten Falle, wie §. 155

$$gg = \frac{2.DENP}{m}$$

im andern aber

$$C^2 - g^2 = \frac{2ANP}{m}$$

Nun iſt vermög der Vorausſetzung

$$C^2 = \frac{2AED}{m}$$

demnach im andern Fall

$$\frac{2AED}{m} - gg = \frac{2ANP}{m}$$

oder

$$gg = \frac{2(AED - ANP)}{m} = \frac{2DENP}{m}$$

das will nun ſagen, daß die Kugel in jedem Punct P, in beyden Fällen, einerley Geſchwindigkeit habe. Der Unterſchied iſt demnach nur, daß g im erſten Fall die erlangte, im andern aber die noch übrigbleibende Geſchwindigkeit iſt. Demnach iſt im andern Fall die Geſchwindigkeit eben ſo wie im erſten Fall = 0, wenn die Kugel in D iſt. Endlich aus eben dem, daß in jedem Punct P in beyden Fällen einerley Geſchwindigkeit g iſt, folgt, daß auch in beyden Fällen gleichnahmigte Räume PD, PA in einerley Zeit durchlaufen werden. Da nun alles dieſes auch für die Kugel M gilt, ſo wird auch deren Geſchwindigkeit c = 0, wenn

ſie

ſie bis in d kömmt; und in beyden Fällen gebraucht ſie nun einerley Räume p d, p B zu durchlaufen einerley Zeit, weil ſie ebenfalls in jedem Punct p in beyden Fällen einerley Geſchwindigkeit hat. Nun ſind in dem erſten Fall für beyde Kugeln die Zeiten gleich (§. 159), demnach ſind ſie es für beyde Kugeln auch in dem andern Fall.

§. 162.

Man ſetze nun, anſtatt daß die Kugeln m, M mit den Geſchwindigkeiten C, c gegen die Ringe laufen, die Ringe ſeyen ſelbſt an die Kugeln befeſtigt, und laufen mit den Kugeln gegen einander, ſo wird, wenn die Ringe in C aneinander ſtoſſen, der Punct C in Ruhe bleiben, und die Zuſammendrückung eben ſo wie vorhin erfolgen. Denn ſobald in vorhergehendem Fall die Kugeln in A, B anfangen die Ringe zu berühren und zuſammen zu drücken, ſo haften ſie an dieſen Punct eben ſo, wie wenn ſie daran befeſtigt wären, und der Punct C bleibt in Ruhe. Da nun die gemeinſame Bewegung der Kugeln und Ringe, ſo lange ſie nicht zuſammenſtoſſen, an ihrer Figur nichts ändert; ſo ſieht man leicht, daß es gleichviel iſt, ob die Ringe durch die Bewegung in die Lage A C B kommen, oder ob ſie bereits darin geweſen ſind, weil der Druck erſt anfängt, wenn die Ringe in C einander berühren.

§. 163.

§. 163.

Endlich ſieht man auch, daß es gleichviel iſt, ob man die Kugeln, vermittelſt elaſtiſcher Ringe, an einander ſtoſſen läßt, oder ob man ſetzt, die Kugeln ſelbſt ſeyn elaſtiſch und ſtoſſen unmittelbar an einander. Die Folgen werden immer uoch gelten, wenn der Diameter der Kugeln = AC, CB, ihre Maſſen = m, M, die Elaſticität gleich, und die Geſchwindigkeiten umgekehrt, wie die Maſſen ſind. Die Kugeln werden nemlich in Verhältniß ihrer Diameter zuſammengedrückt, der Punct C bleibt in Ruhe, und nach dem Zuſammendrücken treiben ſich die Kugeln wieder von einander und erlangen ihre Geſchwindigkeiten eben ſo wieder, wie ſie dieſelben bey dem Zuſammendrücken verlohren haben.

§. 164.

Wollte man hingegen beyde Ringe an eine Kugel befeſtigen, und die Kugeln mit eben den Geſchwindigkeiten gegeneinander laufen laſſen, ſo würde das Zuſammendrücken eben ſo erfolgen. Denn da die Bewegung an der Kraft der Ringe nichts ändert, ſo iſt der Erfolg immer dieſer, daß in jedem Zeittheilchen jeder Kugel ein Theilchen der Geſchwindigkeit benommen wird, welches in gerader Verhältniß der Kraft, und in umgekehrter Verhältniß der Maſſe iſt. Nun iſt die Kraft der Ringe gegen ſich ſelbſt und gegen jede Kugel immer gleich.

Demnach verleurt jede Kugel von ihrer Geſchwindigkeit ein Theilchen, welches umgekehrt wie ihre Maſſe iſt. Da nun die anfängliche Geſchwindigkeiten ebenfalls umgekehrt wie die Maſſen ſind, ſo geht die Geſchwindigkeit von jeder Kugel auf eine proportionale Art verlohren. Demnach kommen die Kugeln in gleicher Zeit aus A in P, und aus B in p. Da nun alsdann die Zuſammendrückungen CP, Cp ſind, ſo bleibt der Punct C währendem Zuſammendrücken in Ruhe.

§. 165.

Man ſieht nun überhaupt, daß ſo viel auch immer zween elaſtiſche Körper ſich währendem Stoſſe zuſammendrücken, und nach dem Stoſſe wieder voneinander treiben, die relative Geſchwindigkeit eben ſo wieder hergeſtellet wird, wie ſie währendem Stoſſe verlohren gienge. Ferner, daß weil die elaſtiſche Kraft von der Bewegung nicht geändert wird, und ſich gegen den einen Körper wie gegen den andern äuſſert, die relative Geſchwindigkeit auf beyde Körper in umgekehrter Verhältniß ihrer Maſſe vertheilt wird, und ſich demnach immer ein Punct C gedenken läßt, von welchem ſie ſich in eben dieſer Verhältniß der Geſchwindigkeit entfernen. Sind nun die abſoluten Geſchwindigkeiten dieſen relativen vor dem Stoſſe gleich, ſo ſind ſie es auch nach dem Stoſſe, und der Punct C bleibt in Ruhe.

§. 166.

§. 166.

Aus dieſem Fall läßt ſich nun leicht herleiten, welche Aenderung in der abſoluten Geſchwindigkeit eines jeden Körpers vorgeht, wenn dieſelbe nicht in umgekehrter Verhältniß der Maſſe iſt. Denn da die beyden Körpern gemeinſame Geſchwindigkeit in dem Erfolge des Stoſſes nichts ändert; ſo ſey die Geſchwindigkeit des Körpers $M = V$, die Geſchwindigkeit des Körpers m, $= v$, und zwar beyde in gleicher Richtung, ſo, daß weil $V > v$ iſt, der Körper M den Körper m erreicht, indem er ſich demſelben mit dem Ueberſchuſſe oder der relativen Geſchindigkeit $V - v$ nähert, und mit eben derſelben ſich nach dem Stoſſe wieder entfernt. Vertheilt man nun die relative Geſchwindigkeit in umgekehrter Verhältniß der Maſſen, ſo nähert und entfernt ſich M mit der Geſchwindigkeit $m.(V - v) : (M + m)$, hingegen m mit der Geſchwindigkeit $M.(V - v) : (M + m)$. Da nun vor und nach dem Stoſſe die gemeinſame Geſchwindigkeit $= v + \frac{M.(V - v)}{M + m}$ iſt, weil der Punct, dem ſie ſich nähern und von dem ſie ſich entfernen, als ruhend betrachtet wird; ſo iſt nach dem Stoſſe die Geſchwindigkeit des Körpers M

$$C = v + \frac{M.(V - v)}{M + m} - \frac{m.(V - v)}{M + m} = \frac{2mv + V(M - m)}{M + m},$$

und die Geſchwindigkeit des Körpers m

$$c = v + \frac{M.(V-v)}{M+m} + \frac{M.(V-v)}{M+m} = \frac{2VM - v(M-m)}{M+m}$$

§. 167.

Wenn man nun hiebey nachrechnet, ſo findet ſichs, daß

$$M.V^2 + m.v^2 = M.C^2 + mc^2$$

demnach die Summe der Producte aus den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeit, vor und nach dem Stoſſe, eben dieſelbe iſt. Es kann dieſes auch nicht fehlen, weil die eine Summe wie die andere den Raum $2\int k\,dx$ gleich iſt (§. 155).

§. 168.

Sind nun die Körper nicht vollkommen elaſtiſch, ſo iſt die relative Geſchwindigkeit $V-v$ nach dem Stoſſe geringer. Man ſetze ſie demnach $= n(V-v)$. Da nun dieſelbe ebenfalls in umgekehrter Verhältniß der Maſſen vertheilt wird, und die gemeinſame Geſchwindigkeit eben dieſelbe bleibt; ſo finden ſich die abſoluten Geſchwindigkeiten nach dem Stoſſe

$$C = v + \frac{M.(V-v)}{M+m} - \frac{n.m(V-v)}{M+m} = \frac{MV + mv - n.m(V-v)}{M+m}$$

$$c = v + \frac{M(V-v)}{M+m} + \frac{n.M(V-v)}{M+m} = \frac{MV + mv - n.M(V-v)}{M+m}$$

§. 169.

§. 169.

In dieſen Formeln wird nun n = 1, wenn die Elaſticität beyder Körper vollkommen iſt, und hingegen n = 0, wenn ſie gar keine Elaſticität haben. Für ſolche Körper iſt demnach

$$C = \frac{M \cdot V + m\,v}{M + m}$$

$$c = \frac{MV + m\,v}{M + m}$$

demnach $C = c$

§. 170.

Für jede andere Fälle, wo die Elaſticität weder vollkommen noch = 0 iſt, wird n durch einen Bruch ausgedrückt, der < 1 und > 0 iſt. Der Werth dieſes Bruches hängt nicht nur von der Elaſticität der Körper, ſondern mit dieſer zugleich auch von der relativen Geſchwindigkeit V — v ab (§. 130).

§. 171.

Ueber den ſchiefen Stoß elaſtiſcher Körper, werde ich nur ſo viel anführen, als nöthig ſeyn wird, um zu zeigen, daß eine deutlich auseinandergeſetzte Theorie deſſelben ungleich ſchwerer und weitläuftiger iſt, als man ſie gewöhnlich vorträgt. Der einfachſte Fall iſt, wenn eine elaſtiſche Kugel ſchief gegen eine unbewegliche und ebenfalls elaſtiſche Fläche läuft. Der Erfolg wird folgendermaſſen gezeigt. Gegen

F. XXIX. die Fläche GH laufe die Kugel C nach der ſchiefen Richtung AC. Es ſtelle AC die Kraft vor, womit die Kugel mit eben der Geſchwindigkeit ſenkrecht auf die Fläche drücken würde; ſo läßt ſich dieſe Kraft, vermittelſt des Rectangels ADCF, in die zwo ſenkrechte Kräfte DC, FC auflöſen. Dieſes iſt vermög des §. 107. ganz richtig. Nun iſt DC mit der Fläche GH parallel, demnach drückt die Kraft DC nicht gegen die Fläche, ſondern nur die Kraft FC, welche gegen dieſelbe ſenkrecht gerichtet iſt. Dieſe Kraft wird nun ganz aufgewandt, um die Kugel bis auf einen gewiſſen Grad zuſammen zu drücken. Wenn dies aber geſchehen iſt, ſo wird die Kugel, wegen ihrer Schnellkraft, wieder gegen F von der Fläche weggedrückt, und die Kraft, ſo die Kugel dadurch erhält, iſt eben ſo wie die Geſchwindigkeit eben dieſelbe, die ſie vor dem Anſtoſſen hatte. Da nun die Kraft DC die Kugel ſchlechthin nur gegen E drückt, ſo macht man CE = CD, und ſetzt die Kräfte CF, CE vermittelſt des Rectangels CFBE zuſammen. Demnach iſt die Diagonale CB nach dem Stoſſe die Richtung und Gröſſe der Kraft der Kugel. Da nun CB = CA iſt, ſo iſt auch die Geſchwindigkeit der Kugel nach dem Stoß eben dieſelbe, wie vor dem Stoſſe, und der Reflexionswinkel BCE dem Einfallswinkel DCA gleich.

§. 172.

§. 172.

In dieſem Vortrage habe ich davon abſtrahirt, daß AC, DC, CF, CE, CB, nicht nur Kräfte, ſondern zugleich auch die Geſchwindigkeiten vorſtellen ſollen. Letzteres iſt bloß phoronomiſch (§. 2), weil es nicht die Zuſammenſetzung der Kräfte, ſondern ſchlechthin nur der Bewegung betrift. Man gedenkt ſich nemlich, die Kugel bewege ſich auf der Linie AF mit der Geſchwindigkeit AF, während dem ſich dieſe Linie ſelbſt mit der Geſchwindigkeit AD der Fläche GH nähert. Denn ſo wird, wenn die Kugel in den Punct der Linie F kömmt, dieſer Punct zugleich mit der Kugel in C ſeyn, und ſich folglich in der That durch AC bewegen. Sie hat demnach wirklich weder die Bewegung AD noch die Bewegung AF; und man kann ſie ſich auch nicht als zwo Kugeln vorſtellen. Sodann wird in dem Vortrage auch nicht angegeben, was man durch die Kräfte AC, DC, FC, EC, BC eigentlich verſteht. Denn was man hiebey Kraft nennen kann, fängt erſt an ſich zu äuſſern, wenn die Kugel an der Fläche C anſtößt. Denn alsdann iſt der Berührungspunct entweder in gar keiner, oder wenigſtens in langſamerer Bewegung als der Mittelpunct der Kugel; und eben dieſes macht, daß die Kugel zuſammengedrückt wird. Durch dieſes Zuſammendrücken fängt ihre elaſtiſche Kraft, welches hier die einige gedenkbare Kraft iſt, an, ſich

zu äuſſern, und zwar immer ſtärker, bis die Zuſammendrückung am gröſten iſt. Will man demnach dieſe Schnellkraft durch eine Linie AC vorſtellen, ſo wird AC von veränderlicher Gröſſe, oder wenn man die Gröſſe beybehalten will, von veränderlicher Bedeutung, weil ſie eine immer gröſſer werdende Kraft vorſtellt. Löſt man dieſe Kraft in DC, CF auf, ſo iſt die Bedeutung von DC, CF eben ſo veränderlich wie die von AC. Daß aber die Verhältniß zwiſchen denſelben, oder der Winkel DCA bleibe, muß erſt erwieſen werden. Der Berührungspunct fängt unſtreitig an, nach der Richtung FC die elaſtiſche Fläche GH einwärts zu drücken, alldieweil die Bewegung des Mittelpuncts noch ſehr merklich nach der Richtung AC geht. Da er ſich indeſſen, wegen des Zuſammendrückens der Kugel, dieſer Fläche nähert, ſo bleibt er nicht auf der Linie DE, ſondern durchläuft inner derſelben eine kleine krumme Linie, wobey AC, CB die äuſſerſten Tangenten ſind. Sodann kann man nur ſagen, daß die Kugel auf das Zuſammendrücken ihre Geſchwindigkeit, nicht aber ihre Kraft verwende. Denn die Kraft derſelben, welche eigentlich die Schnellkraft iſt, äuſſert ſich bis zur gröſten Zuſammendrückung immer ſtärker, und nachgehends immer ſchwächer. Daß die Kugel nach der Richtung CB und mit der anfänglichen Geſchwindigkeit wieder wegfahre, läßt ſich, überhaupt betrachtet, begrei-

begreifen. Man ſieht aber aus erſtgeſagtem, daß der deutliche und richtig auseinandergeſetzte Beweiß davon ganz anders vorgetragen werden muß, und weder leicht noch einfach iſt. So viel ſieht man wohl, daß wenn A C die Geſchwindigkeit vorſtellt, und $= g$ geſetzt wird, in jedem Zeittheilchen dt ſodann

$$g\,dg = k\,dx : m$$

$$dg = k\,dt : m$$

und folglich

$$dt . dg = k\,dt^2 : m = ddx$$

ſeyn werde (§. 155). Da nun hier die Maſſe der Kugel m beſtändig bleibt, und dt ebenfalls beſtändig angenommen wird, ſo iſt dg und ſo auch ddx in Verhältniß von der Schnellkraft k. Alles dieſes aber dient nur, wenn die Kugel mit der Geſchwindigkeit g ſenkrecht gegen die Fläche G H läuft. Will man demnach ſetzen, die Geſchwindigkeit A C könne in zwo andere D C, F C aufgelöſt werden, und man nennt die Geſchwindigkeit $CF = \gamma$, ſo wird man ebenfalls

$$\gamma\,d\gamma = \varkappa\,d\xi : m$$

haben. Demnach wird

$$gg : \gamma\gamma = \int k\,dx : \int \varkappa\,d\xi$$

ſeyn. Sollen nun hiebey A C, F C zugleich auch die Kräfte k, ϰ vorſtellen, ſo wird dieſes nicht durchaus angehen, daferne man nicht

$$k : \varkappa = x : \xi$$

demnach in der 27. Figur B E eine gerade Linie iſt (§. 155). Ich habe vermittelſt eines ſtäh-

lernen Ringes die Krümmung dieſer Linie unterſucht, und gefunden, daß ſie von B bis in M, und noch weiter, von einer geraden Linie ſehr unmerklich verſchieden iſt. Dieſes hieſſe aber die Sache a poſteriori erörtern, wozu es mehrere Mittel giebt. Ich werde mich demnach dabey nicht aufhalten, ſondern noch folgende Betrachtungen herſetzen.

§. 173.

Durch das Anſtoſſen der Kugel an die Fläche wird ſie in eine ovale Figur zuſammengedrückt, deren kürzere Axe immer gegen die Fläche ſenkrecht iſt. Denn wenn man den Druck auch ſchief ſetzen wolte, ſo würde ſichs durch die Auflöſung deſſelben in DC, CF zeigen, daß nur der ſenkrechte CF wirkſam iſt. Nun kömmt durch das Zuſammendrücken der Mittelpunct C der Fläche näher, und wenn man den Abſtand = x ſetzt, ſo iſt die elaſtiſche, oder eigentlich drückende Kraft k deſto gröſſer, je kleiner x iſt, ſo, daß man k als eine Function von x anſehen kann, die ſchlechthin nur von x abhängt, weil die Bewegung der Kugel an derſelben nichts ändert, und die Maſſe der Kugel einerley bleibt. Die Richtung dieſer Kraft k iſt nun immer auf der Fläche ſenkrecht, und der Erfolg davon iſt, daß ſie in jedem Zeittheilchen dt der Kugel eine Geſchwindigkeit dg mittheilt, wodurch die Kugel von der Fläche weg getrieben wird. Es iſt daher eben ſoviel, als wenn

wenn die Fläche eine zurücktreibende Kraft k hätte, welche als eine Function von der Diſtanz x iſt. Da nun dieſe Kraft in beyden Fällen ihre Wirkung in dem Mittel-Punct der Kugel vereinigt, ſo läßt ſich die ganze Maſſe der Kugel, als in ihren Mittelpunct concentrirt anſehen. Dadurch wird nun die Aufgabe von der Bewegung dieſes Mittelpuncts auf folgende reducirt.

§. 174.

Es ſey A B eine ebene, K L eine mit derſelben parallellaufende Fläche, die Fläche A B habe eine zurücktreibende Kraft k deren Wirkung innert der Fläche K L ſich äuſſere, und aller Orten eine Function der Diſtanz $QN = x$ ſey. Nun bewege ſich ein materieller Punct D nach der Richtung D E, ſo wird derſelbe, ſobald er in E kömmt, durch die Kraft k von der geradlinichten Richtung D E abgelenkt, und daher eine krumme Linie E F G durchlaufen, bis derſelbe in G von der Wirkung der Kraft k weiter nicht mehr abgelenkt, ſondern in gerader Linie G H fortbewegt wird. Dieſes iſt nun, überhaupt betrachtet, der Erfolg. Um denſelben näher zu beſtimmen, ſetze man der Punct ſey in N gekommen, und würde, ohne die fernere Einwirkung der Kraft k nach der tangentialen Richtung N v fortbewegt werden. Da nun die Kraft k denſelben immer ablenkt, Fig. XXX.

ſo

ſo durchläuft er nicht N v, ſondern das Element des Bogens N r. Demnach iſt die Wirkung der Kraft dieſe, daß der Punct anſtatt in v zu ſeyn in r iſt. Die Zeit, in welcher dieſe Wirkung vorgeht, und in welches ebenfalls N r durchlaufen wird, ſey $= dt$. Da nun die Bewegung des Puncts an der Wirkung der Kraft nichts ändert, ſo ſieht man leicht, daß v r eben die Gröſſe haben würde, wenn der Punct ſich nicht durch N v, ſondern durch n v, ohne die Einwirkung der Kraft *k*, in eben der Zeit d t bewegt hätte. Denn n v ſtellt vor, wie viel ſich der Punct der Fläche genähert hätte; und eben ſo ſtellt v r vor, um wie viel weniger ſich derſelbe genähert hat. Es ſey demnach

$$EN = w \quad Nr = dw$$
$$QN = x \quad nr = -dx \quad vr = ddx$$

die Maſſe des Puncts $= m$, ſeine Geſchwindigkeit nach der Richtung N v ſey $= \gamma$, die nach der Richtung n v, oder die Geſchwindigkeit der Näherung $= g$, ſo haben wir (§. 172)

$$ddx = kdt^2 : m$$

Ich fange bey dieſer Formel an, weil ſie von der Geſchwindigkeit nicht abhängt, ſondern die abſolute Wirkung der Kraft vorſtellt. Da aber dieſe Kraft ſchlechthin nur die Geſchwindigkeit des Annäherens vermindert, ſo haben wir allerdings auch

$$dg = kdt : m$$

weil

weil $ddx : dt = dg$ iſt. Und demnach auch

$$gdg = kgdt : m = kdx : m$$

folglich

$$gg = \frac{2}{m} \int kdx + const.$$

Hieraus läßt ſich nun eben ſo wie §. 161 herleiten, daß der Punct ſich von der Fläche in gleichen Zeiten und gleichen Geſchwindigkeiten wieder entfernt, wie er ſich derſelben genähert hat. Nun ſieht man leicht, daß, indem ſich der Punct, ohne die Wirkung der Kraft, durch Nv, oder mit dieſer Wirkung durch Nr bewegt, er in beyden Fällen von der Linie QN auf die Linie qn, und demnach der Linie CJ, in beyden Fällen, um gleich viel näher kommt. Demnach läßt ſich Nn als das Maaß der Zeit dt anſehen. Man ſetze, F ſey der Punct der gröſten Näherung, ſo ſtellt demnach NR die Zeit vor, in welcher der materielle Punct aus N in F kömmt, und ſich folglich der Fläche um RF nähert. Nun entfernt er ſich in einer gleichen Zeit RM wiederum eben ſo viel, demnach muß er, nach Verfluß dieſer Zeit, irgend auf der Linie RM ſeyn. Es iſt aber die Näherung deſſelben gegen die Linie CJ, und eben ſo auch ſeine Entfernung den Zeiten proportional. Da nun die Zeit MR = RN iſt, ſo muß der materielle Punct ſich durch M bewegen. Das will nun ſagen, FJ iſt eine Axe der krummen Linie EFL, und dieſe Linie wird dadurch in zween ganz ähnliche Theile getheilt. Demnach iſt auch

JG =

JG=EJ, und der Winkel HGL=DEH. Da endlich den Punct in E ſich den zwo Linien AC, CJ eben ſo geſchwinde nähert, als er ſich in G von denſelben entfernt, ſo fährt er auch in G fort ſich mit gleicher Geſchwindigkeit durch GH zu entfernen, als er ſich durch DE dem Punct E näherte.

§. 175.

Dieſes ſehe ich nun als die eigentliche und einige Art an, die Bewegung des Mittelpuncts einer elaſtiſchen Kugel zu beſtimmen, wenn ſie in ſchiefer Richtung gegen eine unbiegſame Fläche bewegt wird. Wäre die Fläche in Form einer geſpannten Saite elaſtiſch, ſo wird dieſe Betrachtung, ſo viel ich einſehe, nur alsdenn angehen, wenn die Kugel mitten an die Fläche anfährt. Denn in jedem andern Punct würde ſich die Fläche nicht auf beyden Seiten gleich biegen. Und dieſer Umſtand ſcheint mir zureichend zu ſeyn, um in der Richtung und Geſchwindigkeit des Zurückeprallens eine Aenderung zu verurſachen.

§. 176.

Bey dem Fall, wo zwo Kugeln, in verſchiedenen Richtungen, zugleich auf eine dritte ſtoſſen, und daher die Bewegung aus der Zuſammenſetzung der Kräfte entſteht, glaube ich zwar auch, daß die Regeln, die man dafür angiebt, gröſtentheils ihre Richtigkeit haben. Der

Der eigentliche und deutlich auseinandergeſetzte Beweis aber iſt noch ungleich verwickelter. Die Richtung des Druckes åndert ſich mit der Lage der Mittelpuncte in einem fort. Der Weg, den jeder Mittelpunct währendem Stoſſe macht, hångt von den beyden andern ab, und die Kugel, ſo von den beyden andern geſtoſſen wird, wird auf eine doppelte Art zuſammengedrůckt, und das geſetzte davon, wenn man die gröſste Allgemeinheit beybehalten will, wird ſo verwickelt, daß ich hier ganz davon abſtrahire. Die Aufgabe hat mit dem ſogenannten Probleme des trois corps viel Aehnliches. Wenn man ſich aber ſo harte Kőrper gedenkt, daß ſie bey dem Zuſammenſtoſſen ihre Figur ganz unmerklich åndern, ſo wird die Auflőſung leichter. Und dieſes iſt auch eigentlich die Bedingung, die bey den in mehrern mechaniſchen und phyſiſchen Schriften gegebenen Auflőſungen vorausgeſetzt wird.

Zuſatz
von dem
Principe de la moindre Action.

Leibnitz hatte lange nach ſeinem Tode noch das Schickſal, in einem Streit verwickelt zu werden, der zwar nicht ſo lange dauerte, und auch nicht ſo allgemein war als der erſterwähnte von den lebenden Kråften. Es wurde aber beydes durch eine deſto gröſſere Heftigkeit erſetzt,

erſetzt, und die Actions waren dabey nichts weniger als ein minimum, ſondern man trieb ſie bis zu gerichtlichen Unterſuchungen und Schmäheſchriften. Da die Hauptpartheyen ſich bereits ſeit mehrern Jahren im Reiche der Todten darüber beſprechen und einig werden können, und unter den Lebenden weiter niemand mehr Antheil an der Sache nimmt, ſo läßt ſie ſich nun mit ganz ruhigem Gemüthe unterſuchen, und ſehen, was dabey gedenkbar iſt. Der mechaniſche Grundſatz iſt, mit den Worten der Urſchrift vorgetragen, folgender:

Principe general.

Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action neceſſaire pour ce changement, eſt la plus petite, qu'il ſoit poſſible.

La *Quantité d'action* eſt le produit de la maſſe des corps, par leur viteſſe et par l'espace qu'ils parcourent.

Dieſes iſt demnach das berühmt gemachte Geſetz der Sparſamkeit der Natur, die immer den kürzeſten Weg geht, den die Umſtände und Bedingungen zulaſſen, die immer, ſo viel es ſich thun läßt, mit dem Wenigſten das meiſte Mögliche zu erhalten und zu bewirken bemüht iſt. So wahr dieſe Abſichten der Natur ſind, ſo muſte doch bewieſen werden, ob erſtangeführter Grundſatz dabey ſtatt habe. Zu dieſem Ende wurde gezeigt, daß ſich die

die Regeln vom Stoſſe der Körper und vom Gleichgewichte des Hebels daraus herleiten laſſen. Aus dieſer Herleitung wird ſich auch müſſen herleiten laſſen, was im erſtangeführten Worten unbeſtimmt oder dunkel ſeyn möchte.

Dieſe Worte ſcheinen eine Wirkung von gegebener Gröſſe voraus zu ſetzen, und dieſe ſoll durch die geringſte mögliche Action erhalten werden. Dieſes ſetzt ferners voraus, daß die geringſte mögliche Action nicht die einige mögliche ſey: denn es iſt klar, daß ſonſt keine Auswahl bliebe. Ich behalte das Wort Action bey, um es mit deutſchen Wörtern, die etwa einen andern Umfang der Bedeutung haben möchten, nicht zu verwechſeln. Man ſieht überhaupt, daß es alles vorſtellt, was eine wirkende Urſache anwenden muß, um die Wirkung ganz zu erhalten. Man würde demnach ſagen, es ſtelle die Summe aller einzeln Einwirkungen, die Gröſſe und Stärke der darauf verwendeten Kräfte und Mittel, die darauf verwendete Zeit ꝛc. vor. In dem angeführten Grundſatze wird aber dieſes Wort anders beſtimmt. Die darin erwähnte *Action* wächſt nach der Maſſe, der Geſchwindigkeit und dem Raume. Das Product aus dieſen drey Stücken ſoll ein minimum ſeyn. Ob nun daraus folge, daß die Wirkung auch in dem kleinſten Raume vorgehen ſoll, habe ich nicht finden können; wohl aber läßt ſich

der Raum als ein Product der Geſchwindigkeit in die Zeit anſehen, und dieſes Product kann immer dafür geſetzt werden. Thut man dieſes, ſo iſt die *Action* ein Product aus der Maſſe, der Zeit und dem Quadrate der Geſchwindigkeit. Leibnitz würde geſagt haben, aus der Zeit und der lebenden Kraft, und ſo müſte die Wirkung in der kürzeſten möglichen Zeit und mit der geringſten lebenden Kraft erhalten werden. Es lieſſe ſich ziemlich hören, wenn nicht der Begrif der lebenden Kraft ſeine beſondere Schwierigkeiten hätte. Indeſſen wird immer noch dabey vorausgeſetzt, daß das minimum nicht das einzige Mögliche ſeyn müſſe. Denn könnte die Natur an ſich nicht anders wirken, als ſie wirkt, ſo wäre die Frage, ob ſie am kürzeſten und kräftigſten wirke von eben der Art, als wenn man fragte, ob die Zeit in ihrem Verweilen ein minimum beobachte?

Jedoch, wir wollen noch alles ſo hingehen laſſen, und ferners anmerken, daß die Action eigentlich von Seiten der wirkenden Urſache betrachtet wird: denn dieſe ſoll eigentlich die geringſte Mühe, Kraft, Zeit ꝛc. anwenden. Dieſes kömmt nun darauf an, daß ſie nicht auf jede mögliche Arten, ſondern gerade auf die Art wirke, wie die Wirkung am leichteſten, geſchwindeſten ꝛc. erhalten werden kann. Dazu wird eine beſondere Zuſammenrichtung der Umſtände, eine beſondere Structur ꝛc. erfordert.

Auch

Auch giebt es viele Fälle, wo etwas ähnliches bereits in der Natur bemerkt worden. So z. E. jeder Druck, auch wenn er ſchief iſt, wirkt dennoch ſenkrecht, und in ſofern am kräftigſten. Eben ſo giebt bey zuſammengeſetzten Kräften die Diagonale das oben (§. 91) erwieſene minimum. Und beym Gleichgewichte, wo die gegebene Kräfte ihre Wirkung ganz äuſſern, treiben ſie den Mittelpunct der Schwere, ſo weit er immer gehen kann, nemlich am tiefſten Ort, den die Zuſammenrichtung des Syſtems zuläßt ꝛc.

Es ſcheint demnach die Action müſſe an und für ſich berechnet, und ſodann in der Natur als ein minimum erfunden werden. Die Reaction kömmt dabey nur in ſofern in Betrachtung, als man nachzuſehen hat, wie die Action, ſie mag nun groß oder klein ſeyn, dabey aufgewandt wird, ohne daß weder etwas mangele, noch zu viel ſey. Kann dieſes auf mehrerley Arten geſchehen, ſo iſt allerdings zu vermuthen, daß in der Natur die kürzeſte und leichteſte, man kann noch beyfügen die ſicherſte, gewählt ſey.

Allein, alles dieſes iſt nur die Umſchreibung des Grundſatzes, ſo, wie ich mir ihn vorſtelle. Es ſoll demnach keine Erklärung der vorhin angeführten Worte ſeyn. In dieſen hat noch der Ausdruck action *neceſſaire* pour ce changement einige Dunkelheit. Die Worte

ſcheinen zwar an ſich ganz klar zu ſeyn, aber in der Anwendung, die davon gemacht worden, fangen ſie an, einer Erläuterung zu bedürfen. Ich werde demnach die Anwendung herſetzen; und dieſes mag nun auf Deutſch geſchehen.

Zween Körper, deren Maſſe A, B ſey, bewegen ſich in gerader Linie, B mit der Geſchwindigkeit b und A, mit der gröſſern Geſchwindigkeit a, ſo, daß A den Körper B verfolgt, einholt, auf denſelben ſtößt. Nach dem Stoſſe fahren beyde fort, B mit der Geſchwindigkeit β, A mit der geringern Geſchwindigkeit α. Dabey ſoll nun eine actio minima ſeyn. Um ſie zu beſtimmen, wird die Rechnung von dem Urheber des Grundſatzes folgendermaſſen gemacht. Die durchlaufenen Räume werden für einerley Zeit berechnet, und Kürze halber für die Zeit $= 1$. Demnach ſind ſie a, b, α, β. Nun iſt für den Körper A die durch den Stoß erlittene Veränderung (changement arrivé dans l'univers) der Geſchwindigkeit $= a - \alpha$, des Raumes ebenfalls $= a - \alpha$; demnach die quantité d'action neceſſaire pour ce changement $= A(a-\alpha)^2$. Auf eben die Art für den Körper B iſt ſie $= B(\beta - b)^2$. Die Summe von dieſen Actions ſoll nun ein minimum ſeyn. Demnach

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta-b)^2 = \text{minimum}.$$

Hier

Hier fängt es an dunkel zu werden. A iſt der eigentlich wirkende Körper. Ich hätte demnach erwartet, daß nicht die Differenz ſeiner eigenen Geſchwindigkeiten $a-\alpha$, ſondern entweder ſeine Geſchwindigkeit vor dem Stoſſe a, oder wenigſtens ſeine relative Geſchwindigkeit $a-b$, mit welcher er auf den Körper B anfährt, zur Berechnung der Action müſte gebraucht werden; allein ſo wird nur die Veränderung $a-\alpha$ gebraucht, die er dabey erlitten. Und eben ſo wird für den Körper B auch nur die Veränderung $\beta-b$ gebraucht. Es ſtellen demnach $(a-\alpha)^2$, $(\beta-b)^2$ das Product aus den Veränderungen vor, ſo bey jedem Körper der Geſchwindigkeit und dem Raume nach vorgegangen. Dieſes hätte nun aber müſſen in dem Grundſatze ausgedrückt werden. Dabey wäre aber freylich nachgehends zu beweiſen geweſen, warum anſtatt $(a-\alpha)^2$, $(\beta-b)^2$ nicht viel ehender $a^2-\alpha^2$, β^2-b^2 hat genommen werden müſſen. Denn ſo wäre Aa^2 die quantité d'action vor dem Stoſſe, $A\alpha^2$ die quantité d'action nach dem Stoſſe; und eben ſo wären $B\beta^2$, Bb^2 die quantités d'action, oder de reaction für den Körper B, und

$$A(a^2-\alpha^2)+B(\beta^2-b^2)$$

würde die quantité d'action *neceſſaire* pour ce changement vorſtellen, die ein minimum ſeyn müſte. Denn dieſe quantité d'action wäre eigentlich verwendet worden. Allein wenn

 man

man auch dieſelbe = minimum ſetzt, ſo laſſen ſich die Geſetze des Stoſſes und des Hebels nicht daraus herleiten. Dazu dient die Formel

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta-b)^2 = \text{minimum}$$

ungleich beſſer; und ſo wurde ſie auch vorgezogen, wenn ſie gleich von dem Grundſatze ein wenig abzuweichen, oder einen andern Verſtand zu haben ſchien.

Indeſſen verdient ſie immer genauer betrachtet zu werden. Ich bemerke demnach, daß, wenn es nur darum zu thun iſt, dieſe Formel auf den Stoß der Körper und den Hebel anzuwenden, man die Zeit immer = 1 ſetzen, und ſtatt des Productes aus dem Raum und der Geſchwindigkeit, das Quadrat der Geſchwindigkeit nehmen kann. Und allem Anſehen nach, wird auch dieſes müſſen genommen werden.

Sodann bemerke ich, daß die Differenz $a-\alpha$, $\beta-b$, bey dem Stoſſe der Körper eine ganz beſondere Eigenſchaft haben. Denn man ſetze, die Geſchwindigkeiten vor dem Stoſſe ſeyn $a-c$, $b-c$, ſo ſind die nach dem Stoſſe ebenfalls $\alpha-c$, $\beta-c$. Nun iſt

$$(a-c)-(\alpha-c) = a-\alpha$$
$$(\beta-c)-(b-c) = \beta-b$$

folglich ſind dieſe Differenzen einerley, was auch immer c für eine Gröſſe habe. Man beſtimme nun c dergeſtallt, daß

$(a-c)$

$$(a-c):(c-b) = B:A$$

werde, welches

$$c = \frac{Aa + Bb}{A + B}$$

giebt. Dieſes macht die Geſchwindigkeit $b-c$ des Körpers B vor dem Stoſſe negativ, und beyde Körper nähern ſich ihrem Mittelpunct der Schwere mit Geſchwindigkeiten, die in umgekehrter Verhältniß ihrer Maſſen ſind. Nach dem Stoſſe ſind ihre Geſchwindigkeiten $\alpha - c$, $\beta - c$. Und dieſe ſind nun

1°. entweder $= 0$, wenn die Körper keine Schnellkraft haben.

2°. Oder ſie ſind, wiewohl mit verwechſelten Richtungen, den Geſchwindigkeiten $a-c$, $c-b$ vor dem Stoſſe gleich, wenn die Körper elaſtiſch ſind.

Demnach iſt für den Körper A die Differenz ſeiner Geſchwindigkeiten, wenn er nicht elaſtiſch iſt, ſchlechthin nur $a-c$, wenn er elaſtiſch iſt $2a-2c$. Und eben ſo hat man für den Körper B im erſten Fall $b-c$, im andern $2b-2c$. Dieſes giebt nun für nicht elaſtiſche Körper

$$A(a-c)^2 + B(b-c)^2 = \text{minimum}$$

für elaſtiſche

$$4A(a-c)^2 + 4B(b-c)^2 = \text{minimum.}$$

Man ſieht leicht, daß Leibnitz wiederum ſagen würde, in beyden Fällen ſey die Summe der lebenden Kräfte ein minimum. Dieſes

hat auch s'Graveſande in ſeinen Inſtitutionibus philoſophiae Newtonianae §. 268 und 281 wirklich geſagt, und auch die Erinnerung beygefügt, daß die Differenzen der Geſchwindigkeiten $a - \alpha$, $\beta - b$ von den abſoluten Gröſſen der Geſchwindigkeiten ſelbſt unabhängig ſind, und daher

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta - b)^2$$

in allen Fällen die Summe der aufgewandten Kräfte vorſtelle, und ein minimum ſey. Denn die beyden Körpern gemeinſame Geſchwindigkeit ändert an der Wirkung des Stoſſes nichts. Dieſer geſchiehet immer in dem Mittelpunct der Schwere beyder Körper, es mag nun derſelbe in Ruhe ſeyn, oder ſich bewegen. Man ſiehet demnach, woher es komme, daß in allen Fällen

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta - b)^2 = \text{minimum}$$

iſt. Und wer die ſogenannten lebende Kräften wirklich als Kräfte anſieht, wird allerdings dieſe Formel als ein Geſetz der Sparſamkeit anſehen können, ohne daß er die beyden Quadrate $(a-\alpha)^2$, $(\beta - b)^2$ als Producte aus der Geſchwindigkeit in dem Raum anzuſehen habe.

Es ſind demnach $a - \alpha$, $\beta - b$

1°. bey nicht elaſtiſchen Körpern die Geſchwindigkeiten, mit welchen ſich jeder dem gemeinſamen Mittelpunct der Schwere, als dem Puncte, nähert, in welchem der

Stoß

Stoß geſchieht. Der Stoß iſt einerley, dieſer Punct mag ſich bewegen oder in Ruhe ſeyn, die Körper wirken immer mit den Geſchwindigkeiten $a - \alpha$, $\beta - b$, dergeſtalt, daß beyde $= 0$ werden, oder darauf gehen.

2°. Bey elaſtiſchen Körpern ſind $a - \alpha$, $\beta - b$ eben die Geſchwindigkeiten aber doppelt genommen; nemlich mit $\frac{1}{2}(a - \alpha)$, und $\frac{1}{2}(\beta - b)$ nähern ſie ſich einander vor dem Stoſſe, und dieſe Geſchwindigkeiten werden rein aufgewandt. Da aber die Körper elaſtiſch ſind, ſo werden dieſe Geſchwindigkeiten, aber mit entgegengeſetzten Richtungen, rein wieder hergeſtellt. Man mag nun aber in dieſem Fall $a - \alpha$, $\beta - b$ ganz oder halb nehmen, ſo iſt

$$A(a - \alpha)^2 + B(\beta - b)^2 = \text{minimum}.$$

Ganz oder halb genommen. Das thut zur Sache nichts.

Ob aber wirklich dieſe Summe ein minimum ſey oder nicht, das iſt eine andere Frage. s'Graveſande nimmt ſie dafür an, weil er ſie als eine Summe von lebenden Kräften, und zwar als eine Summa virium deſtructarum anſieht. Der Erfinder anfangs erwähnten Grundſatzes nimmt ſie an, weil er ſie als die quantité d'action neceſſaire pour ce changement anſieht. Mir iſt keines von bey-

den an ſich einleuchtend. Ich ſehe dabey nur ſo viel, daß, wenn man dieſe Formel als ein minimum oder auch als ein maximum behandelt, indem man α, β als veränderlich anſieht, und das Differential $= 0$ ſetzt, man

$$-A(a-\alpha)\,d\alpha + B(\beta-b)\,d\beta = 0$$

erhält, und daß man, um hieraus die Verhältniß zwiſchen A, B, a, α, b, β zu finden, noch eine Gleichung haben müſſe; demnach obbemeldte Formel allein die Sache nicht ausmache. Nun iſt für elaſtiſche Körper

$$a-b=\beta-\alpha$$
$$d\beta=d\alpha$$

dieſes giebt

$$-A(a-\alpha)+B(a+\alpha-2b)=0$$

und demnach

$$\alpha=\frac{Aa-Ba+2Bb}{A+B}$$
$$\beta=\frac{2Aa-Ab+Bb}{A+B}$$

welches dann wirklich die Geſetze für elaſtiſche Körper ſind. Für nicht elaſtiſche Körper iſt $\alpha=\beta$, $d\alpha=d\beta$; und dieſes giebt

$$-A(a-\alpha)+B(\alpha-b)=0$$

demnach

$$\alpha=\beta=\frac{Aa+Bb}{A+B}$$

welches ebenfalls das Geſetz für nicht elaſtiſche Körper iſt. Endlich findet ſichs auch, daß

A

$$A(\mathring{a} - \alpha)^2 + B(\beta - b)^2 = \text{minimum}$$

in der That ein minimum, und nicht etwan ein maximum iſt. Und ſo weit gehet es mit dieſer Formel ganz richtig. Allein ob ſie deswegen ein minimum iſt, weil ſie nicht bloß in der Rechnung, ſondern in der Natur ſelbſt allenfalls auch einen gröſſern Werth hätten haben können, das iſt wiederum eine andere Frage. Man laſſe zween Körper mit Geſchwindigkeiten, die umgekehrt wie ihre Maſſen ſind, gegeneinander laufen, ſo werden dieſe Geſchwindigkeiten immer ganz aufgewandt. Mehr kann an ſich nicht aufgewandt werden, weil nicht mehr da iſt. Weniger kann auch nicht aufgewandt werden, weil ſonſt das fernere Andrücken fortfahren würde. Sollte aber ein Körper den andern mit ſich fortreiſſen, ſo würden die Geſchwindigkeiten nicht umgekehrt wie die Maſſen ſeyn, weil in dieſem Fall allein die Geſchwindigkeiten ganz aufgewandt werden. Dieſes erhellet aus dem XIIIten Abſchnitte auf eine nothwendige Art. Demnach iſt das minimum, wovon hier die Rede iſt, ein bloß ſymboliſches minimum, weil es in der Natur ſelbſt an ſich nicht anders ſeyn kann. Und ſo läßt ſich dabey nicht von Sparſamkeit reden, weil dieſe eine Auswahl voraus ſetzt.

XIV.

XIV. Das Carteſiſche und Leibnitziſche Kräftenmaaß.

§. 177.

Leibnitz hat vor allen andern Philoſophen aus das beſonders, daß er ungefehr ein dutzend Grundſätze in der menſchlichen Erkenntniß auf die Bahn gebracht hat, welche ſämtlich zu faſt hundertjährigen Streitigkeiten Anlaß gegeben, und worüber, alles zuſammengerechnet, viele Zeit verlohren worden. Anſtatt daß Newton ſolche Dinge vornahm, die er ſelbſt zur Richtigkeit brachte, und wovon, was er zurück lieſſe, andere zur Richtigkeit bringen konten, anſtatt deſſen, ſage ich, ſuchte Leibnitz ſich in ſolchen Dingen herfürzuthun, wo man, ſo zu reden, etwas wagen muſte, und was weder von ihm noch von andern ſogleich berichtiget werden konnte. Dahin wird auſſer ſeinen metaphyſiſchen Grundſätzen auch ſein Kräftenmaaß gerechnet, und die hierüber geführten Streitigkeiten ſind bekannt. Die gröſten Mathematikverſtändigen nahmen daran in ſo weit Antheil, daß jeder ſich für die eine oder andere Meynung erklärte, oder wenigſtens ſeine eigene Meynung dazu ſagte. Dermalen iſt darüber alles ziemlich ſtille, da theils einige, ſo Antheil daran genommen, geſtorben, andere vielleicht deswegen nachgelaſſen, weil ſie alles, was ſie ſagen konnten, geſagt hatten. Noch andere

des Streitens überdrüßig geworden; und endlich noch andere die Sache als beygelegt, oder als einen bloſſen und theils wenig erheblichen Wortſtreit anſahen. So viel kann man immer ſagen, daß in der ganzen Sache etwas verwirrtes war, welches ſich auf keine Art recht wollte entwickeln, noch zu einer wahren geometriſchen Evidenz bringen laſſen. Und eben dieſe Verwirrung macht einen ordentlichen und netten Vortrag der Sache ziemlich ſchwer. Indeſſen werde ich wenigſtens einen Verſuch davon machen.

§. 178.

Es iſt dem gemeinen Gebrauche zu reden gemäß, wenn man einem bewegten Körper, bloß deswegen weil er in Bewegung iſt, eine Kraft zueignet. Denn er dringt in weichen Thon, drückt einen elaſtiſchen Ring zuſammen, ſetzt andere Körper in Bewegung ꝛc. und alles dieſes geſchieht nicht bloß weil er ein Körper, ſondern weil er in Bewegung iſt. Es war daher anfangs **Merſenne**, nach ihm **Carteſius** und endlich **Leibnitz** darauf verfallen, das Maaß dieſer Kraft zu beſtimmen. Man kam darin überein, daß man eigentlich die Kraft verſtunde, welche ein bewegter Körper anwendet, die Wirkung ganz herfürzubringen. Denn was die Wirkung für jedes Theilchen der Zeit oder des Raums betrift, ſo hatte es wegen der beyden Formeln (§. 155)

dg=

$$dg = kdt : m$$
$$gdg = kdx : m$$

oder auch, wenn man integrirt

$$mg = \int kdt$$
$$mgg = 2\int kdx$$

keine Schwürigkeit. Dieſe kam dabey vor, daß Merſenne und ſo auch Carteſius das Product mg, Leibnitz aber das Product mgg eine Kraft nennete, und jeder ſein Product als das Maaß der Kraft anſahe, und dem bewegten Körper wirklich eine ſolche Kraft zueignete. Ferners ſchloſſe Carteſius, vermuthlich daraus, daß die Welt im Beharrungsſtande ſeyn ſollte, es müſſe von der ganzen Summe der Bewegung weder etwas verlohren gehen, noch Neu entſtehen. Eben dieſes ſchloß auch Leibnitz in Abſicht auf das, was er Kraft nennte; und ſo machte Carteſius die Summe aller in der Welt vorkommenden mg, Leibnitz die Summe aller mgg beſtändig. Jede Parthey ließ ſich nun angelegen ſeyn, ihr Vorgeben durch Verſuche und Erfahrungen zu bewähren, zugleich auch das Vorgeben der andern Parthey zu entkräften, und beſonders da, wo ſie etwan zurücke bliebe, zu zeigen, daß die Gegenparthey auch zurück bleibe.

§. 179.

Endlich kömmt, im Grunde betrachtet, noch ein Umſtand dazu, welcher, je nachdem er ent-

entſchieden wird, den ganzen Streit entweder wichtig, oder zu einem ganz leeren Wortſtreit macht. Dieſer Umſtand iſt die Frage, ob man, wenn die Dynomic im ſtrengſten Verſtande a priori zu beweiſen iſt, den Stoß von Kräften, oder die Kräfte vom Stoſſe herleiten ſolle? Denn leitet man den Stoß und die Bewegung von Kräften her, wie ich es in dem vorhergehenden gethan habe, ſo gehen die Formeln

$$mg = \int kdt$$
$$mgg = 2\int kdx$$

voran, und die Regeln des Stoſſes ſind ſchlechthin nur Folgen davon. Da über dieſe Formeln nie geſtritten worden, ſo iſt auch dieſe Ordnung des Vortrags die vernünftigſte und zugleich die zuverläßigſte und brauchbarſte, weil ſie ſich auf jede mögliche Fälle unmittelbar erſtreckt.

§. 180.

Will man hingegen die Kräfte von dem Stoſſe und der Bewegung herleiten, ſo muß man, ehe man die Formeln

$$mg = \int kd\tau$$
$$mgg = \int kdx$$

vortragen kann, vorerſt die Regeln des Stoſſes aufs allgemeinſte feſte ſetzen, und ſodann aus dieſen jene herleiten; dabey aber verfällt man auf die Carteſiſche und Leibnitziſche Streitigkeiten. So ſieht demnach die Sache, über-

haupt

haupt betrachtet, aus. Ich merke vorläufig dabey an, daß allerdings die Kräfte der Bewegung vorexiſtirend müſſen gedacht werden. So gedenkt man ſich in der Statik die Kräfte, ohne Rückſicht, auf die Bewegung. Und ſelbſt in Abſicht auf den ganzen Weltbau gedenkt man ſich einen primus motor, eine erſte Urſach aller Bewegung; und dieſe erſte Urſache ſtellt man ſich allerdings als eine Kraft vor, die die Bewegung erſt herfürbringt. Endlich iſt auch ſo viel klar, daß, da eben angeführte zwo Formeln auſſer Streit ſind, jede andere Theorie von Kräften denſelben nicht zuwider ſeyn müſte. In dieſen beyden Formeln kömmt die Kraft k vor, über deren Bedeutung ebenfalls nie geſtritten worden; und dieſes iſt, wegen der Vieldeutigkeiten des Worts Kraft, allerdings zu merken. Denn ſagt man, z. E. ein elaſtiſcher Ring wende ſeine Kraft auf, einen Körper fortzudrücken, dieſe Kraft gehe in den Körper über, bewege ſich mit demſelben fort, verlaſſe ihn nicht, bis er irgend anſtößt ꝛc. So hat das Wort Kraft in dieſen Redensarten eine ganz andere Bedeutung, als wenn man ſagt, daß der Ring, wenn er vollkommen elaſtiſch iſt, ſeine Kraft ganz behalte, ſo, daß er den Körper, ſo vielmal man will, wieder aufs neue fortdrücken könne; ſey aber der Ring nicht vollkommen elaſtiſch, ſo gehe jedesmal etwas von ſeiner Kraft

verloh-

verlohren ꝛc. Es iſt offenbar, daß in dieſen letztern Ausſagen, das Wort Kraft, das Vermögen zu drücken, in den erſtern aber den würklichen Druck vorſtelle. Zu dieſen zwoen Bedeutungen kömmt noch, daß man, beſonders in metaphyſiſchen Schriften, ſelbſt die Subſtanz, welcher das Vermögen zu bewegen weſentlich iſt, eine Kraft nennt. Und endlich, wenn man ſagt, daß Körper von gleicher Maſſe, gleiche Kräfte haben, ſo verſteht man darunter nur gleiche Trägheit.

§. 181.

Es iſt aber von allen dieſen Bedeutungen keine diejenige, welche Carteſius und Leibnitz im Sinn hatten, es ſey denn, daß man diejenige darunter verſtehe, die ich einen bloſſen Druck genennt habe, der nemlich bey dem Fortdrücken eines Körpers in denſelben übergeht, und wenn der Körper irgend anſtößt, ſich wiederum äuſſert. Indeſſen iſt ſoviel richtig, daß der Streit gröſtentheils würde unterblieben ſeyn, wenn Merſenne oder Carteſius geſagt hätte, er verſtehe ſein Product mg durch die Zeit $= 1$ dividirt, und wenn Leibnitz geſagt hätte, er verſtehe ſein Product mgg durch den Raum $= 1$ dividirt. Denn da für den erſten Fall

$$mg = \int k\,d\tau$$

iſt, ſo iſt klar, daß, wenn man dieſe Gleichung durch die Zeit $= 1$ dividirt, der Quotient mit k

homogen wird, und folglich eben ſo wie k eine Kraft genennt werden könne. Für den andern Fall iſt nicht minder klar, daß wenn man die Gleichung

$$mgg = \int kdx$$

durch den Raum = 1 dividirt, der Quotient ebenfalls mit k homogen wird, und daher, in eben dem Verſtande, eine Kraft vorſtellt. Denn daß k in der Statik und in der Dynamic eine an ſich verſtändliche Kraft vorſtelle, darüber iſt nie geſtritten worden.

§. 182.

Es ſcheint aber nicht, daß weder Carteſius noch Leibnitz Kräfte verſtanden haben, die mit k homogen ſind, ungeachtet k in dieſen Formeln nicht als eine beym Gleichgewicht bloß drückende, ſondern als eine wegen des nicht vorhandenen Gleichgewichtes wirklich fortdrückende Kraft vorkömmt. Nun aber findet ſich in dieſen beyden Formeln keine andere Kraft angedeutet: denn m ſtellt die Maſſe, g die Geſchwindigkeit, t die Zeit, x den Raum, k die elaſtiſche oder fortdrückende Kraft vor. Sollen demnach die Producte m g, m g g Kräfte vorſtellen, ſo muß man dabey verſtehen, daß m g durch die Maſſe = 1, und die Geſchwindigkeit = 1 dividirt ſey; und daß eben ſo m g g durch die Maſſe = 1, und das Quadrat der Geſchwindigkeit = 1 dividirt ſey. Da aber die Quotienten auf dieſe Art nur

Zah-

Zahlen, oder bloſſe Verhältniſſe wären, ſo müſſen ſie, um eine Kraft vorzuſtellen, mit der Kraft = 1 multiplicirt werden. Alles dieſes iſt aus den Geſetzen der Homogeneität für ſich klar. Es wird aber dadurch die Natur und die Art dieſer Kraft, dafern ſie nicht mit k homogen ſeyn ſolle, noch nicht aufgeklärt.

§. 183.

Nun ſcheinen zwar die Ausdrücke $\int kdt$, $\int kdx$ nicht nur Kräfte, ſondern gleichſam ganze Summen von Kräften vorzuſtellen. Und ſo wäre $\int kdt$ eine Kraft, welche ſich der Zeit nach, $\int kdx$ eine Kraft, welche ſich, dem Raume nach, aufhäuft. Und da hiebey

$$\int kdt = mg$$
$$\int kdx = mgg$$

ſo könnte man dadurch ſowohl die Carteſiſche als die Leibnitziſche Kraft verſtehen. Allein es müſte vorerſt bewieſen werden, daß in der That $\int kdt$ und ſo auch $\int kdx$ aufgehäufte Kräfte, oder allenfalls auch Kräfte von einer zweyten Dimenſion ſind. Dieſer Beweiß iſt aber nicht ſo leicht: denn daraus, daß in dieſen Ausdrücken die Kraft k vorkömmt, folgt noch nichts. Man könnte ſonſt eben ſo ſchlieſſen, daß der Ausdruk $\int gdt = x$ eine der Zeit nach aufgehäufte Geſchwindigkeit, oder eine Geſchwindigkeit von der 2ten Dimenſion vorſtelle. Man weiß aber, daß dadurch ſchlechthin nur der durch-

laufene Raum vorgeſtellt wird. Denn $\int g\,dt$ muß durch die Zeit $= 1$, und durch die Geſchwindigkeit $= 1$ dividirt, und ſodann durch den Raum $= 1$ multiplicirt verſtanden werden. Wir bleiben demnach auch hier noch zurücke.

§. 184.

Inzwiſchen werde ich noch anmerken, daß ſowohl Carteſius als Leibnitz ihr Kräftenmaaß unter andern auch deswegen ſuchten feſte zu ſetzen, damit man mit einemmale von der ganzen Kraft des bewegten Körpers auf die ganze Wirkung einen Schluß machen könnte, und nicht immer aufs neue wiederum zu den Differentialformeln

$$m\,dg = k\,dt$$

$$mg\,dg = k\,dx$$

zurücke kehren müſte. Dieſes wäre nun allerdinges ſehr bequem, weil man nicht ſelten ſolche Fälle findet, wo man mit dem Integriren nicht fortkommen kann. Auch hätte man von daher eine allgemeine Quadratur aller krummen Linien $\int k\,dx$, $\int k\,dt$ zu hoffen. Es iſt aber dieſe Hofnung viel zu ſchön und viel zu allgemein, als daß ſie ſo ſchlechthin ſtatt finden könnte. Indeſſen werde ich noch anzeigen, was man dabey gethan hat.

§. 185.

Einmal kann in der Formel $\int k\,dx$ die Kraft k eine Function des Raums x ſeyn, dergeſtalt, daß

daß wenn die Wirkung nach den Raum geſchätzt wird, $\int k\,dx$ bey gleichem Raume x gleich bleibt. Für ſolche Fälle iſt demnach

$$mgg = 2\int k\,dx = \text{conſt.}$$

das will ſagen, es wird einerley Wirkung erhalten, ſo oft die Maſſe umgekehrt wie das Quadrat der Geſchwindigkeit iſt. Dieſes macht, daß Leibnitz ſagte, es gebrauche einerley Kraft. Die Kraft k konnte er nicht verſtehen, weil dieſe bey einerley Wirkung ſehr verſchieden ſeyn kann. Was er aber für eine Kraft verſtunde, das hat er, ſo viel ich weiß, weder zureichend angezeigt, noch kenntlich gemacht, ſo wie es Carteſius auch nicht gethan. Da beyde Partheyen darüber nicht einig geweſen, ſo müſſen ſie auch wohl einander, vielleicht auch jeder ſich ſelbſt, nicht genug verſtanden haben.

§. 186.

Ferners kann es Fälle geben, wo bey

$$\int k\,dx, \quad \int K\,dx$$

für jeden Raum x, immer K in gleicher Verhältniß gröſſer iſt, als k. In dieſen Fällen ſey demnach

$$mgg = \int k\,dx$$
$$MGG = \int K\,dx$$

Da nun

$$K = nk$$

ſo iſt

$$MGG = n\int k\,dx$$

 dem

demnach

$$nmgg = MGG.$$

Wenn man in beyden Fällen den ganzen Raum, in welchem die Wirkung geſchehen, gleich ſetzt. In dieſem Falle ſagt Herr D. Bernoulli in den Comment. Petropol. in der oben (§. 99) gerühmten Abhandlung: er ſchätze die Leibnitziſche, oder ſogenannte lebende Kraft, nach der Anzahl einander ähnlicher, gleich elaſtiſcher und in gleicher Lage, bis auf eben den Grad zugleich zuſammengedruckter Ringe oder geſpannter Federn. In der That iſt auch in dieſem Fall

$$mgg : MGG = 1 : m = k : K.$$

und daher die ſogenannte lebende Kraft der elaſtiſchen Kraft proportional. Sodann werden hier die Ringe wiederum gleichviel zuſammengedrückt, und auf eine durchaus ähnliche Art. Dadurch aber wird das Leibnitziſche Kräftenmaaß nicht ſo allgemein beybehalten, als es Leibnitz haben wollte. Man ſetze nun aber, die Ringe ſeyn unähnlich, ungleich elaſtiſch, ungleich zuſammengedrückt, ſo kann die lebende Kraft und ſo auch die Würkung nicht mehr ſo ſchlechthin nach ihrer Anzahl geſchätzt werden.

§. 187.

Man ſetze, um die hier vorkommende Schwürigkeit zu erläutern, zween Körper oder Kugeln von

von gleicher Maſſe aber ungleicher Geſchwin- Fig. XXVII.
digkeit. Jede laufe gegen den Ring BA, wel-
cher in A befeſtigt und elaſtiſch iſt. Die erſte
Kugel drücke denſelben bis in P, die andere
aber bis in D zuſammen. Die Maſſe jeder
Kugel ſey = m, die Geſchwindigkeit der er-
ſtern = g, der andern = G: ſo ſind die Kräfte
nach Carteſens Rechnung = mg, mG;
nach Leibnitzens = mgg, MGG, und
daher ganz leicht berechnet. Die Wirkungen
ſind die Zuſammendrückung des Ringes in P
und D. Die Hauptfrage aber iſt nun, was
ſich in dieſen Wirkungen finde, welches ausge-
meſſen den Kräften mgg, mGG, oder den
Kräften mg, MG, gleich ſey? Dieſe Frage
iſt ſchlechterdings nicht zu beantworten. In-
deſſen ſollte ſie beantwortet werden. Denn
einmal iſt es nicht genug, das Maaß von
Kräften anzugeben, dafern man nicht auch in
ihrer Wirkung dasjenige anzeigt, was den
Kräften gleich zu ſchätzen iſt, und welches eben
dadurch, daß die Kräfte beſtimmt und ausge-
rechnet ſind, zugleich mit ausgerechnet, und in
der Wirkung ſogleich auch kenntlich ſeyn ſolle.
So z. E. wenn es die Eindrücke oder die Ver-
kürzungen des Diameters BP, BD wären, ſo
könnten dieſe leicht ausgemeſſen, und mit den
voraus berechneten Kräften verglichen werden.

§. 188.

Es kann aber, wenn auch m, g, G einer-
ley bleibt, die Verhältniß zwiſchen BP, BD

auf unendlich vielerley Arten verändert werden, weil dazu weiter nichts als eine Veränderung der Elaſticität des Ringes in ſeinen verſchiedenen Theilen erfordert wird; und dieſes erhält man, wenn man denſelben ungleich dicke macht, oder ſeine Figur ändert ꝛc. auf unzählige Arten; ſo, daß in den Formeln

$$mg = \int kdt$$

$$mgg = 2 \int kdx$$

die Ausdrücke $\int kdt$, $\int kdx$ alle mögliche Quadraturen von krummen Linien vorſtellen können. Dieſe würden demnach ſämtlich gefunden ſeyn, wenn die Carteſiſchen oder die Leibnitziſchen Kräfte in ihrer Wirkung kenntlich und unmittelbar ausgemeſſen werden könnten. Da aber beydes ein ſüſſer Traum iſt, ſo folgt auch, daß die beyden Kräftenmaaſſe gerade in denen Fällen ohne allen Gebrauch bleiben, wo ſie am aller vortheilhafteſten zu gebrauchen wären. Auch iſt man währender Streitigkeiten gerade hierin zurücke geblieben. Es iſt aber ganz natürlich, daß man für ſolche Fälle, wo man nicht wußte, was man in der Wirkung zu ſuchen hatte, das den Kräften gleich wäre, keine Verſuche vorbrachte, um das Kräftenmaaß bewährt zu finden. Hingegen brachte man für ſolche Fälle, wo die Wirkung gleich oder proportional war, häufig Verſuche vor. Es iſt aber offenbar, daß man damit nicht ausreichen konnte, da immer noch der Fall zurücke bliebe,

der

der die Sache durchaus und in ihrer abſoluten Allgemeinheit hätte entſcheiden können.

§. 189.

Wenn demnach die Carteſiſche oder Leibnitziſche Kräfte, wirklich Kräfte wären, die ſich durch mg, oder mgg beſtimmen lieſſen, ſo würde ihre Berechnung in den häufigſten und wichtigſten Fällen ohne Gebrauch ſeyn, weil die Wirkung, ſo denſelben gleich iſt, nicht kenntlich iſt, noch unmittelbar ausgemeſſen werden kann. Wir wollen aber wiederum den Ring vornehmen, und dabey bemerken, **daß die Bewegung des Körpers in die Wirkung der Kraft des Ringes keinen Einfluß hat.** Denn die Kraft des Ringes theilt dem Körper eben die Geſchwindigkeit dg in dem Zeittheilchen dt mit, der Körper mag ſich gegen den Ring oder von demſelben weg bewegen. Dieſes würde nicht ſeyn können, wenn der Körper eine von ſeiner Bewegung herrührende Kraft hätte, und ſie gegen den Ring äuſſerte, indem er ſich gegen denſelben bewegt: denn anders läßt ſich, ohne mit Worten zu ſpielen, keine Kraft gedenken. Dieſe Kraft des bewegten Körpers müſte demnach mit k homogen ſeyn, weil ſie den Ring zuſammendrückt, eben ſo wie der Ring den Körper rückwerts treibt. Auf dieſe Art aber müſte nach dem Deſcartes

$$m\,dg = (k - gm)\,dt$$

nach Leibnitzen aber

$$mgdg = (k - ggm) dx$$

ſeyn; beydes aber iſt den obigen Formeln zuwider. Man ſetze ebenfalls, der Ring werde bis in D zuſammengedruckt, ſo iſt der Körper in D ohne Bewegung, und hält dennoch den gröſten Druck des Ringes DE eine kleine Zeit dt auf. Er ſetzt demnach der Kraft des Ringes nur ſeine Trägheit m entgegen. Und dieſe kömmt eben daher auch in obigen beyden Formeln vor. Will man deſſen unerachtet dieſe Trägheit, die an ſich ſchon eine Kraft genennt wird, mit der Geſchwindigkeit oder deren Quadrate multiplicirt, eine Kraft nennen, ſo vermehrt man dadurch ein an ſich ſchon vieldeutiges Wort, mit noch einer Bedeutung, und zwar mit einer ſolchen, die nichts vorſtellt, das ſich anders als ein bloſſes Product mg, oder mgg gedenken laſſe. Das cui bono davon haben wir bereits beleuchtet.

§. 190.

Es waren aber Carteſius und Leibnitz nicht nur auf die Benennung und Schätzung ihrer Kräfte, ſondern zugleich auch auf die Erhaltung derſelben bedacht. Und hievon läßt ſich allenfalls, ohne Rückſicht auf die Benennung und den dabey vorkommenden Wortſtreit, reden. In der Welt gehen Bewegungen, und durch die Bewegungen Veränderungen vor. Wäre nun dabey kein Behar-

Beharrungsſtand, oder kein beſtändig gleiche Summe, oder wenigſtens keine ſolche Summe, die immer in beſtimmten Schranken bleibt, ſo würde allerdings die ganze Körperwelt, nach und nach, entweder aller Bewegung beraubt und eine todte unthätige Maſſe, oder ſie würde durch immer anwachſende Bewegung endlich in Trümmern zerſtreut. Keines von beyden ſcheint ſtatt zu haben; und ſo muß allerdings die ganze Summe aller Bewegungen entweder beſtändig, oder wenigſtens zwiſchen gewiſſen Schranken veränderlich ſeyn. Nun war es die Frage, ob die Summe aller m g, oder die Summe aller m g g beſtändig bleibe? Dieſe Frage wurde eigentlich phyſiſch betrachtet, das will ſagen, ohne Rückſicht auf ſolche Subſtanzen, die eben daher, daß ſie zur Geiſterwelt gehören, eine innere Quelle von Thätigkeiten haben. Denn in der Phyſic hat man ſich längſt ſchon angewöhnt, von ſolchen Subſtanzen zu abſtrahiren, und die Körperwelt für ſich zu betrachten. In dieſer fand man elaſtiſche und theils auch minder oder auch gar nicht elaſtiſche Körper. In Anſehung der erſtern fand ſichs leicht, daß bey jedem Stoſſe

$$MV^2 + mv^2 = M.C^2 + mc^2$$

iſt (§. 167). Und ſo ſprach **Leibnitz von der Erhaltung lebender Kräfte.**

§. 191.

§. 191.

Wir können aber von dieſer Benennung abſtrahiren. Genug, daß die Summe aller mgg beſtändig bleibt. Die Welt wird weder zerſtäuben, noch zur todten Maſſe werden. Aber auch für den Deſcartes findet ſich

$$MV + mv = MC + mc$$

und in ſofern hat Leibnitz, wenn auch ſeine Kraft eine Kraft wäre, noch nichts voraus. Das einige bey dieſer letzten Formel iſt, daß anſtatt der Summen zuweilen Differenzen heraus kommen, wenn nemlich die Geſchwindigkeiten negativ werden. Das mislichſte aber bey beyden Formeln iſt, daß wenn auch V, v, C, c, die abſoluten Geſchwindigkeiten ſind, demnach auch

$$M(V+\gamma)^2 + m(v+\gamma)^2 = M(C+\gamma)^2 + m(c+\gamma)^2$$

und

$$M(V+\gamma) + m(v+\gamma) = M(C+\gamma) + m(c+\gamma)$$

ſtatt findet, und demnach Kräfte erhalten werden, die gar nicht da ſind, weil beyde Formeln auch bey bloß relativen Geſchwindigkeiten ſtatt finden. Indeſſen iſt es beſſer, daß die Formeln zu viel, als zu wenig wahr ſind. Wenn demnach wenigſtens jede kleinſten Theilchen der nicht elaſtiſchen Körper elaſtiſch wären, ſo würde allerdings der Satz von der beſtändigen Summe bey den Bewegungen in der

Körper-

Körperwelt erwieſen ſeyn; und daran wird, aus verſchiedenen Erfahrungen und aus allgemeinen Betrachtungen zu ſchlieſſen, eben nicht viel fehlen. Ich werde im Folgenden Anlaß haben, ſolche Betrachtungen vorzutragen, und in Abſicht auf die Erfahrungen mich auf das beziehen, was ich in den Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers angeführt habe.

§. 192.

Indeſſen haben Leibnitzens Vertheidiger nicht ermangelt zu zeigen, daß die Carteſiſchen Kräfte nicht in allen Fällen beſtändig gleich bleiben, ſo wie es die Leibnitziſchen blieben, weil dieſe wegen der quadrirten Geſchwindigkeiten immer poſitiv ſind. Und dieſer Umſtand trug allerdings mit dazu bey, den Satz von der Erhaltung lebender Kräfte, als einen für die Phyſic weſentlichern Grundſatz anzuſehen. Indeſſen blieb er immer noch in derjenigen Allgemeinheit unerwieſen, in welcher ihn anfangs Joh. und Dan. Bernoulli, und ſodann auch andere, mit gutem Erfolge, gebraucht haben. Es hat nemlich der Umſtand, daß Körper, die auf ſchiefen Flächen herunter laufen, in gleicher Tiefe einerley Geſchwindigkeit haben (§. 149) Anlaß gegeben, den Satz ungleich weiter auszudehnen, indem man ein und eben daſſelbe Syſtem, unter verſchiedenen Umſtänden mit ſich ſelbſt zu vergleichen angefangen. Dazu kam noch, daß,

wo

wo die auf ein Syſtem wirkende Kräfte ihre Wirkung in einem Punct deſſelben vereinigen, die Maſſe deſſelben als in dieſem Punct concentrirt angeſehen werden kann. Und dieſes gab ebenfalls Anlaß, bey einem Syſtem die Bewegung jeder Theile zuſammen genommen, mit der Bewegung der in dieſem Punct concentrirten ganzen Maſſe zu vergleichen. Endlich fande ſichs auch, daß, da die Bewegung ſo die Theile des Syſtems unter ſich einander verurſachen, in die Bewegung des ganzen Syſtems, oder des vorbemeldten Puncts, keinen Einfluß hat, auch dieſer Umſtand eine neue Quelle angabe ein Syſtem, unter verſchiedenen Bedingungen, mit ſich ſelbſt zu vergleichen. Indeſſen muſte, in verſchiedenen Fällen, vorerſt ausgemacht werden, worin man eigentlich das Beſtändige bey der Erhaltung der Kräfte zu ſuchen habe, wie z. E. bey ſchiefliegenden Flächen, daß es bey der gleichen Tiefe vorkomme ꝛc. Dieſes macht aber, daß man nicht ſo eigentlich weiß, wie weit ſich das Principium erſtreckt. Inzwiſchen aber kann es als ein Leitfaden gebraucht werden, weil man nicht ſelten dadurch ſehr leichte findet, was man ſonſt aus ſehr vielen Differentialformeln hätte durch das Integriren heraus bringen müſſen. Sind aber die Integralien vermittelſt des Principii der Erhaltung der Kräfte gefunden, ſo können ſie durch die Vergleichung mit den Differentialien geprüft werden.

Erſte

Erſte Grundlehren der Hydroſtatik.

XV. Beſchaffenheit flüßiger Materien.

§. 193.

Will man bey der Betrachtung der bey flüßigen Materien vorkommenden Kräfte a priori gehen, ſo kann man dabey nicht wohl mehr als einige Möglichkeiten vornehmen, und die dabey vorkommenden Symptomata beſtimmen. Das Wort flüßig bringt es an ſich mit, daß hier von unbiegſamen und abſolute harten Linien, Flächen und Körpern die Rede nicht vorkömmt; und damit fällt auch der Vortheil weg, der ſich, in Abſicht auf die Gründe der Statik, daraus ziehen lieſſe. Es können höchſtens nur die Theilchen der flüßigen Materien als hart angeſehen werden, und in ſofern läßt ſich jedes als in ſeinem Mittelpunct der Trägheit concentrirt gedenken. Thut man dieſes, ſo kömmt ſogleich die Bedingung hinzu, daß dieſe Mittelpuncte einander nicht näher kommen können, als bis wo die Theilchen ſich berühren. Sie können hingegen weiter von einander wegbleiben, wenn man ſetzt, daß die Theilchen durch Kräfte in gewiſſer Entfernung von einander gehalten werden: denn zu allem an ſich gedenkbaren, ſind auch die dazu erfor-

erforderliche Kräfte gedenkbar. Auſſer dem haben wir an der Luft ein Beyſpiel, als welche ſich ausdehnt, je nachdem ſie minder zuſammengedrückt iſt. Und ſo kann man ſich vorſtellen, daß ihre Theilchen durch die elaſtiſche Kraft, in gewiſſen Entfernungen von einander gehalten werden.

§. 194.

Ich werde, um bey dem einfachſten Fall anzufangen, die Theilchen von gleicher Maſſe und Gröſſe und von ſphäriſcher Figur ſetzen, und da giebt die Geometrie folgende Lehrſätze an, welche auch, ohne Rückſicht auf flüßige Materien, brauchbar ſind.

§. 195.

Es können um eine Kugel nicht eine gewiſſe Anzahl gleich groſſer Kugeln gelegt werden, ſo, daß ſie ſich ſämtlich auf eine durchaus ähnliche Art berühren. Um dieſes zu beweiſen, werden wir anfangs nur drey Kugeln P, Q, R um die Kugel A legen, ſo, daß ſie ſich je zwo und zwo berühren. Da die Kugeln gleich groß ſind, ſo liegen ihre Mittelpuncte in den vier Spitzen eines regulären Tetraedri, und aus dem Mittelpunct der Kugel A läßt ſich durch die Mittelpuncte der Kugeln P, Q, R eine Sphäre beſchreiben, auf deren Fläche dieſe drey Mittelpuncte einen gleichſeitigen ſphäriſchen Triangel bilden, deſſen jede Seite von 60 Grad iſt. Da dieſes für jede

drey

drey einander berührende Kugeln gilt, ſo entſtehen eben ſo viele ſolcher Triangel. Sollte demnach der Satz angehen, ſo muß die ganze Fläche der Sphäre in eine beſtimmte ganze Zahl ſolcher Triangel vertheilt werden können, ſo, daß die Triangel durchaus an einander paſſen. Da nun bey jedem Triangel jede Seite 60 Grad iſt, ſo findet ſich nach den trigonometriſchen Regeln für jeden Winkel ω

$$\cos 60^\circ = (\cos 60)^2 + (\sin 60)^2 . \cos \omega$$

nun iſt $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ und $\sin 60^\circ = \sqrt{(3:4)}$ demnach

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \omega$$

welches

$$\cos \omega = \frac{1}{3}$$

und

$$\omega = 71^\circ . 33' . 54'' \ldots .$$

giebt. Wollte man nun fünf ſolcher Triangel um einen Punct der Sphäre herum legen, ſo würden die fünf zuſammenſtoſſende Winkel nur fünfmal $71^\circ . 33' . 54'' \ldots .$ machen, anſtatt daß ſie fünfmal $72^\circ = 360$ machen ſollten. Demnach würde ſie nicht ſchlieſſen. Wollte man aber ſechs ſolcher Triangel um einen Punct herum legen, ſo würde 6 mal $71^\circ . 33' . 54'' \ldots .$ weit über 6 mal $60 = 360$ reichen, und daher der ſechſte Triangel den erſten faſt ganz bedecken. Da demnach 5 Triangel nicht ausreichen, 6 Triangel aber zu weit gehen, und zwiſchen 5 und 6 keine ganze Zahl mehr fällt, ſo geht es nicht an, daß man eine beſtimmte

Zahl von Kugeln um eine gleich groſſe ſollte herumlegen können, ſo, daß ſie einander ſämtlich und auf eine ähnliche Art berühren.

§. 196.

Man kann demnach kein Gefäß mit gleich groſſen Kugeln dergeſtallt ausfüllen, daß ſie einander ſämtlich und auf eine ähnliche Art berühren. Die Folge, die wir hieraus ziehen können, iſt, daß wenn jede Kugel eine gleiche anziehende Kraft hat, unter denſelben kein abſolutes und durchaus ähnliches Gleichgewicht ſtatt finden kann. Denn dieſes würde nur alsdenn ſtatt finden, wenn jede Kugel, gegen die ſie berührende, eine durchaus ähnliche Lage haben könnte. Da dieſes aber an ſich unmöglich iſt, ſo geht auch erſteres nicht an.

§. 197.

Betrachtet man aber nicht einen ganzen Raum voll Kugeln, ſo laſſen ſich einzelne Fälle eines ſolchen Gleichgewichtes gedenken.

I°. Laſſen ſich 2, 3, 4, 5, 6 Kugeln nach einerley Richtung um eine Kugel herum legen, und in dem gröſten Circul vertheilen. Und da wird jede von den übrigen gleich angezogen.

II°. Laſſen ſich 4, 6, 8, 12 Kugeln in Form eines Tetraedron, Octaedron, Cubus und Dodecaedron oder Icoſaedron um eine gleich

gleich groſſe Kugel herum legen, und jede wird von den andern gleich und nach ähnlichen Richtungen gezogen.

III°. Bey 20 Kugeln geht es nur an, wenn man ſie kleiner nimmt, weil ſchon 12 gleich groſſe einander beynahe berühren.

§. 198.

Da man demnach einen Raum nicht dergeſtalt mit gleich groſſen Kugeln anfüllen kann, daß jede gegen die übrigen eine durchaus ähnliche Lage habe, ſo bleibt zu ſehen, wie ſie gelegt werden können, damit die Lage wenigſtens, ſo viel möglich, ähnlich ſey. Dabey giebt es nun zween Fälle, und dieſe findet man in allen Zeughäuſern bey den in Pyramiden aufgethürmten Kanonkugeln von gleicher Caliber. Denn

I°. Liegt eine Kugel auf einer Ebene, ſo laſſen ſich auf gleicher Ebene noch 6 gleiche Kugeln um dieſelbe herum legen. Die mittlere Kugel kann ſodann noch von drey oberhalb, und von drey unterhalb berührt werden, ſo, daß jede von dieſen zugleich noch zwo von den erſtern ſechs, die in der Ebene liegen, berührt. Dies giebt in allem 12 Kugeln, ſo um die mittlere herum gelegt werden.

II°. Läßt man aber die mittlere weg, ſo laſſen ſich vier Kugeln in einer Ebene dergeſtalt legen, daß ſie unter rechten Win-

keln einander berühren. Der Zwiſchenraum, den ſie laſſen, kann oben und unten mit einer Kugel beſchloſſen werden. Fährt man ſo fort, ſo wird jede Kugel von 12 anliegenden dergeſtalt berührt, daß vier davon in gleicher Ebene, vier in der nächſt aufliegenden Schichte, und vier in der nächſt untenliegenden Schichte ſind.

Da ſich nur mit Quadraten, gleichſeitigen Triangeln und denen daraus entſtehenden regulären Sechsecken eine Ebene bedecken läßt, ſo ſind die hier betrachteten zween Fälle die einige, wo man gleich groſſe Kugeln, auf eine reguläre Art, auf einander legen kann. Wir werden nun noch zeigen, daß, auf welche von beyden Arten man die Kugeln legt, bey gleicher Anzahl derſelben gleich viel Raum erfordert werde, oder, daß die leere Zwiſchenräume, ſowohl zu dem ganzen als zu dem mit den Kugeln ausgefüllten Raume, einerley Verhältniß haben, oder, daß der Raum, in beyden Fällen, gleich dichte angefüllt ſey.

§. 199.

Um dieſes zu zeigen, ſetze man für den erſten Fall drey Kugeln in einer Ebene aneinander, und lege auf den Zwiſchenraum, ſo ſie in der Mitte laſſen, die vierte; ſo iſt klar, daß die Mittelpuncte dieſer vier Kugeln, in den vier

Ecken

Ecken eines regulären Tetraedron liegen, deſſen Baſis mit der Ebene parallel iſt, und deſſen perpendiculäre Höhe beſtimmt, wieviel die vierte Kugel tiefer liegt, als wenn ſie vertical auf einer der drey erſten wäre gelegt worden. Denn dieſe letztere Höhe iſt der Diſtanz der Mittelpuncte, folglich der Diſtanz zweyer Ecken des Tetraedron, oder, welches einerley iſt, dem Diameter der Kugeln gleich. Man gedenke ſich nun eine dreyeckigte Pyramide von ſolchen Kugeln, ſo iſt dieſe ebenfalls ein Tetraedron. Werden die Kugeln nach den horizontalen Schichten gezählt, ſo machen ſie die Reyhe von Trigonalzahlen

$$1+3+6+10+15+\ldots\ldots\ldots+\frac{n.\overline{n+1}}{2}$$

$$=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

Dieſe Pyramide werde durch vier ebene Flächen, welche die äuſſerſten Kugeln berühren, und demnach ebenfalls in Form eines Tetraedron eingeſchloſſen, und der Diameter jeder Kugel $= 1$ geſetzt; ſo findet ſich, wenn man nachrechnet, die Länge jeder Seite dieſes Tetraedron $= n - 1 + 1 : \sqrt{8}$, demnach der Innhalt

$$z = \left(n - 1 + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^3 . \tfrac{1}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Ferner iſt der Inhalt jeder Kugel, wenn $\pi = 3,1415926\ldots$ geſetzt wird, $= \frac{1}{6}\pi$, demnach der Inhalt der geſamten Kugeln

$$k = \tfrac{1}{6}\pi . (n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$$

folglich

$$z : k = \left(n - 1 + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^3 . \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{6}\pi$$
$$(n^3 + 3n^2 + 2n)$$

Man ſetze nun, um die Irregularität der Zwiſchenräume am Rande zu vermeiden, die Anzahl der Kugeln unendlich groß, ſo findet ſich die abſolute Verhältniß

$$z : k = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{18} : \pi.$$

§. 200.

Für den zweyten Fall haben wir eine viereckigte Pyramide; werden in dieſer die Kugeln nach den horizontalen Schichten gerechnet, ſo machen ſie die Reyhe von Quadratzahlen

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots + n^2$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Man ſchlieſſe dieſe Pyramiden ebenfalls durch vier ebene Flächen ein, welche die äuſſerſten Kugeln berühren, ſo iſt bey der dadurch entſtehenden Pyramide die Länge jeder Seite $= n - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, demnach der Inhalt

$$z = (n - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})^3 . \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Nun iſt der Inhalt der geſamten Kugeln

$$k = \tfrac{1}{6}\pi . (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$$

folglich

$$z : k = (n - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})^3 . \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{12}\pi$$
$$(2n^3 + 3n^2 + n)$$

Wird

Wird hier ebenfalls, wie vorhin, n unendlich geſetzt, ſo findet ſich die abſolute Verhältniß

$$z : k = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{18} : \pi$$

und folglich eben die, ſo für den erſten Fall heraus kam. Demnach verhält ſich, in beyden Fällen, der ganze Raum zu dem Raum den die Kugeln ausfüllen, wie $\sqrt{18}$ zu π, folglich bey nahe wie 4 zu 3, genauer wie 23 zu 17, noch genauer wie 27 zu 20, oder noch genauer wie 131 zu 97 ꝛc. oder wie 100000 zu 74048.

§. 201.

Wenn wir unter dieſen Verhältniſſen die von 27 zu 20, als welche unter den kleinern noch merklich genau iſt, annehmen, ſo können wir ſagen, daß in beyden Fällen der ganze Raum ſich zu dem von den Kugeln wirklich ausgefüllten wie 27 zu 20, zu den leeren Zwiſchenräumen wie 27 zu 7, und demnach der Raum der Kugeln zu den Zwiſchenräumen wie 20 zu 7 verhalte; ſo, daß wenn der ganze Raum = 27 iſt, die Kugeln davon einen Raum = 20 ausfüllen, die leeren Zwiſchenräume aber 7 betragen. Es iſt demnach die ſpecifiſche Schwere des mit den Kugeln angefüllten Raumes nur $\frac{20}{27}$ derjenigen, die eben der Raum dichte vollgegoſſen haben würde.

§. 202.

Bey dieſer Gleichheit der Dichtigkeit, die in beyden Fällen ſtatt hat, fällt es ſchwer, zu

entſcheiden, nach welchem ſich ſolche Kugeln, die vollkommen glatt ſind, richten würden, wenn ſie ſich entweder durch ihre Schwere, oder durch anziehende Kräfte ins Gleichgewicht ſetzen müſten, indem ſie in einen eingeſchloſſenen Raum gegoſſen werden; ſo, daß ſie weder unter- noch ſeitwerts ausweichen oder ausflieſſen können. Denn da ſie, auf beyderley Arten, den Raum gleich ausfüllen, ſo kömmt auch, wenn ſie durch ihr Gewicht zuſammen gedrückt werden, der Mittelpunct der Schwere gleich tief, und die Kugeln liegen auf beyde Arten in einer Regularität, die zwar nicht abſolut iſt, weil ſie es ſchlechthin nicht ſeyn kann, die aber dennoch unter den Möglichen die Gröſte iſt. Und eben deswegen iſt auch der Raum, den ſie auf beyde Arten einnehmen, der kleinſte mögliche. Man ſieht aber überhaupt leicht, daß alles darauf ankömmt, wie die Kugeln liegen, die am Boden des Gefäſſes ſind: denn liegen dieſe entweder ins Gevierte oder im Triangel, ſo iſt, in Abſicht auf die darüberliegende, keine Wahl mehr. Es iſt aber an ſich leichter, daß die unterſten im Triangel zu liegen kommen, weil dazu weiter nichts erfordert wird, als daß ſie ſich an einander legen. Hingegen müſſen ſie ins gevierte geleget werden, wenn ſie genau ſo liegen ſollen. Deſſen ungeachtet, haben die ins gevierte gelegte Kugeln nicht nur eine reguläre Lage, ſondern ſie können auch nur auf eine Art ſchichtenweis auf einander gelegt

werden;

werden; dahingegen, wenn man ſie nach Triangeln legt, zweyerley Lagen möglich ſind, weil man entweder die dritte Schichte wie die erſte, oder auf eine von den beyden erſten Schichten verſchiedene Art legen kann. Letzteres geſchieht, wenn man ſie in eine trianguläre Pyramide aufthürmen will, erſteres aber wenn man ein triangulläres Priſma dergeſtalt mit ausfüllen will, daß man am Rande am wenigſten leeren Raum laſſe. Und in dieſem Fall wird man ſolche Zwiſchenräume finden, die in gerader Linie durch das ganze Priſma zwiſchen den Kugeln herunter gehen: denn legt man die erſte Schichte, ſo ſind um jede Kugel ſechs Zwiſchenräume. Von dieſer laſſen ſich, vermittelſt der zweyten Schichte, nur drey bedecken, und bey der dritten Schichte hat man die Wahl, ob man die drey andern bedecken, oder ſie unbedeckt laſſen will, indem man jede Kugel vertical über die von der erſten Schichte legt. Hingegen bey der gevierten Lage der Kugeln bedeckt jede Schichte die Zwiſchenräume der vorhergehenden; und ſo wird jeder Zwiſchenraum durch ſechs Kugeln eingeſchloſſen, die in drey ſich ſenkrecht durchſchneidenden Ebenen liegen. Eine Regularität die bey der triangulären Lage der Kugeln nicht vorkömmt, und welche zureichend iſt, zu machen, daß, wo die Kugeln ſich untereinander mit gleichen Kräften anziehen, ſie ſich von ſelbſt ins gevierte legen, weil ohne die gröſte mögliche Regularität

und Aehnlichkeit der Lage, kein Gleichgewicht ſtatt findet; und, allem Anſehen nach, findet bey vollkommen glatten Kugeln gar keines ſtatt.

§. 203.

Verſchiedene über die auf der Erdfläche befindlichen flüßige Materien angeſtellten Verſuche, laſſen uns kaum zweifeln, daß ihre Theilchen ſich nicht entweder anziehen, oder eben ſo gegeneinander andrücken ſollten, als wenn ſie eine anziehende Kraft hätten. Man zweifelt eben ſo auch nicht, daß dieſe Theilchen nicht ſollten ſphäriſch, und in einer vollkommen homogenen Materie von gleicher Gröſſe und anziehenden Kraft ſeyn. Man ſollte daher ſchlieſſen können, daß ſie ſich vermittelſt dieſer anziehenden Kraft, auf die erſt beſchriebene Art, von ſelbſt ins gevierte legen. Ich werde aber daraus weiter keine Folge ziehen, weil man genug verſichert ſeyn kann, daß ſo abſolute homogene Materien in der Welt nicht vorkommen. Und eben dieſes macht auch, daß man bey der Betrachtung ihres Gleichgewichtes und ihrer Bewegung, nicht auf jede einzelne Theile, ſondern auf die ganze Summen ſehen muß.

XVI.

XVI. Das Gleichgewicht flüßiger Materien.

§. 204.

Bey der Betrachtung des Gleichgewichts flüßiger Materien, kömmt alles theils auf die Kräfte an, die in ſie wirken, theils auch auf die Gefäſſe, in welchen ſie eingeſchloſſen ſind und eine Figur annehmen müſſen. Die Kräfte ſind theils in der Materie ſelbſt, wie z. E. wenn die Theilchen ſich anziehen, oder voneinander treiben, theils ſind es äuſſere Kräfte, die entweder auf jedes Theilchen oder nur auf die Oberfläche wirken. Alle dieſe können, nach unzählig vielerley Modificationen, theils einzeln, theils beyſammen vorkommen; die Materie ſelbſt auch auf unzählige Arten heterogen und ungleich dichte ſeyn.

§. 205.

Man fängt aber gemeiniglich bey den einfachern an, und ſucht ſodann die dabey gefundenen Lehrſätze allgemeiner zu machen. Dieſes Verfahren deucht mich auch deſto vernünftiger, weil die gröſte Allgemeinheit unendlich verwickelt, und gewiſſermaſſen, unerſchöpflich iſt. Da ich mir in gegenwärtiger Abhandlung nur vorgeſetzt habe, diejenigen Gründe, die die erſten genennt werden, zu unterſuchen, ſo werde ich auch bey der Betrachtung der einfachern

fachern Fälle ſtehen bleiben. In dieſer Abſicht ſetze ich anfangs die flüßige Materie homogen, und ohne eigene anziehende oder elaſtiſche Kräfte, und ſetze, jede Theilchen derſelben werden von einer äuſſern Kraft, nach paralleler Richtung, gleich gedrückt. Wir haben oben geſehen, daß die Schwere eine ſolche Kraft iſt. (§. 75 ſeqq.) Sollte nun die ganze Maſſe der flüßigen Materie nicht ſchlechthin nur bewegt werden oder fallen (§. 129), ſo muß ſie entweder durch entgegenwirkende Kräfte aufgehalten, oder durch eine unbiegſame und unbewegliche Fläche eingeſchloſſen werden, daß ſie weder unterwerts noch ſeitwerts ausweichen kann, wie man z. E. Waſſer in einem Gefäſſe aufhält. Ich werde, mehrerer Kürze und Klarheit halber, die drey Namen Schwere, Waſſer, Gefäß beybehalten, ſo, daß man durch die Schwere jede auf jedes Theilchen gleich und parallel drückende Kraft, durch Waſſer jede flüßige Materie, wobey nicht innere Kräfte vorkommen, durch das Gefäß aber eine unbiegſame und unbewegliche Fläche von gleicher Figur verſtehen kann.

§. 206.

Dieſe Vorausſetzungen ſind nun an ſich die einfachſten. Ich ſehe aber nicht, daß man damit ausreiche, dafern man nicht die Theilchen elaſtiſch annimmt, ſo hart man ſie auch ſetzen will. Verſchiedene Gründe machen

dieſes

dieſes nothwendig. Denn da kein Theilchen der Materie ſo abſolute hart gedacht werden kann, daß es nicht wenigſtens durch eine unendliche Kraft ſollte getrennet werden können, ſo ſehe ich die Materie als unendlich theilbar an, und da eben dadurch die Härtigkeit durch Kräfte erhalten werden muß, ſo ſehe ich nicht, daß ein Theilchen der Materie hart ſeyn könnte, ohne zugleich elaſtiſch zu ſeyn. In ſofern aber läßt ſich, auch wenn man die Sache a priori als eine bloſſe Möglichkeit betrachtet, ohne in der Betrachtung eine Lücke zu laſſen, davon nicht abſtrahiren. Wenn es aber auch angienge, ſo iſt es immer das natürlichſte, wenn man unter jeden Möglichkeiten ſolche auswählt, deren Theorie ſodann in der Welt anwendbar iſt. Nun fordert die Erfahrung zu der Auswahl ſolcher Möglichkeiten folgendes: Einmal beweiſt das bekannte Florentiniſche Experiment, wodurch man die abſolute Härtigkeit des Waſſers hat erweiſen wollen, theils an ſich nichts, theils beſonders, auch nichts wider die Elaſticität der Waſſertheilchen. Denn auſſer dem, daß das Waſſer ſich durch die Erkältung condenſirt, und daher allerdings einen kleinern Raum einnehmen kann, ſo iſt kein Zweifel, daß das Florentiniſche Experiment eben ſo würde ausgefallen ſeyn, wenn man anſtatt eine Kugel voll Waſſers zuſammen zu preſſen, eine Kugel voll ſtählernen Schrot hätte zuſammen preſſen wollen. Sodann kann man

zwar

zwar aus der Zuſammenſetzung und Auflöſung der Kräfte leicht beweiſen, daß in einem Gefäſſe voller Kügelchen, die oberen in ſchiefer Richtung auf die untern drücken, und daß ein Theil dieſes Druckes endlich wieder aufwärts gekehrt wird. Man kann es aber auch nur von einem Theil des Druckes beweiſen, dafern man nicht die Kügelchen elaſtiſch annimmt. Denn nur dadurch erhält man, daß jedes Kügelchen wiederum eben ſo viel rückwerts drückt, als es ſelbſt gedrückt wird, und daß es dieſen Druck wirklich äuſſert, ſobald entweder die aufliegende Laſt vermindert, oder der Gegendruck weggenommen wird. Nun geben die über den Druck der flüßigen Materien angeſtellte Verſuche dieſen letztern Umſtand an, demnach muß auch nothwendig die Bedingung, ohne welche derſelbe nicht ſtatt hat, nemlich die Elaſticität der Theilchen, dabey vorkommen. Demnach muß auch dieſe mit in die Rechnung gezogen werden, wenn man a priori ſolche Möglichkeiten betrachten will, deren Erfolg nachgehends in der wirklichen Welt anwendbar iſt.

§. 207.

Um dieſe Ausſagen, deren allgemeinſter Beweis ungemein weitläuftig ſeyn würde, durch die Betrachtung des einfachſten Falls ſo aufzuklären, daß ihre Nothwendigkeit zugleich mit erhelle, ſo gedenke man eine Anzahl gleich groſſer und gleich elaſtiſcher Kugeln in einer

cylin-

cylindriſchen aufrecht ſtehenden Röhre übereinander liegend. Die Röhre ſey unten geſchloſſen, und ſtehe unbeweglich. Da iſt nun für ſich klar, daß jede Kugel auf die untern drückt, und die unterſte, ſo auf dem Boden der Röhre liegt, von dem ganzen Gewichte der übrigen nicht nur gedrückt, ſondern bis auf einen gewiſſen Grad zuſammengedrückt wird. Wären nun die Kugeln nicht elaſtiſch, ſo würde die untere ſchlechthin nur gedrückt werden, und wenn man die obern wiederum wegnimmt, eben ſo liegen bleiben, als wenn dieſe nie da geweſen wären. Der Erfolg iſt ganz anders, wenn die Kugeln elaſtiſch ſind. Um dieſen Erfolg augenſcheinlicher zu machen, ſo ſetze man, die auf der unterſten liegende Kugeln werden mit einem male vernichtet, ſo wird die unterſte nicht etwann liegen bleiben, ſondern ſich mit einem gewiſſen Grade von Geſchwindigkeit in die Höhe bewegen, und zwar mit demjenigen Grade der Geſchwindigkeit mit welchem ſie hätte müſſen auf den Boden des Gefäſſes fallen, um eben ſo viel zuſammengedrückt zu werden, als ſie es durch die Laſt der aufliegenden Kugeln war. Man ſieht zugleich, daß dieſe Höhe ſowohl von der Anzahl und Maſſe der aufliegenden Kugeln, als auch von der Elaſticität der unterſten Kugel abhänget.

§. 208.

Daß bey dem Drucke des Waſſers eben dieſes erfolge, läßt ſich, weil wir das aufliegende

gende Waſſer weder in einem Augenblick wegnehmen noch vernichten können, nicht unmittelbar aus der Erfahrung beweiſen. Es wird ſich aber dennoch beweiſen laſſen, wenn wir nur einen Schritt noch weiter gehen. Man
Fig. XXXI. ſetze demnach die cylindriſche Röhre unten dergeſtalt gebogen, daß neben der unterſten Kugel A noch eine andere M von gleicher Elaſticität und Gröſſe Raum habe. Der Cylinder ſey in e geſchloſſen, und durchaus unbiegſam und unbeweglich. Die Linie g c werden wir anfangs nur horizontal annehmen, um dadurch begreiflich zu machen, daß, wenn die Kugeln nicht elaſtiſch, ſondern ſchlechthin nur hart wären, die Kugel A den Druck der übrigen allein aushalten, und M gar nicht würde gedrückt werden. Wenn man demnach auch den Cylinder in e öfnete, ſo würde gar keine Bewegung erfolgen, weil A mit dem Gewichte der aufliegenden Kugeln B, C &c. beladen, nur vertical auf den Punct c und M nur auf den Punct g drückt. Sind hingegen die Kugeln elaſtiſch, ſo iſt alles dieſes ganz anders, weil die Kugeln nun nicht mehr bloß gedrückt, ſondern zuſammengedrückt werden. Bey der Kugel A wird der verticale Diameter a c kürzer, der horizontale b d länger. Dieſer aber kann nicht länger, und daher auch jener nicht kürzer werden, es ſey denn daß bey der Kugel M der horizontale Diameter d e kürzer, und dadurch der verticale f g länger werde. Alle dieſe Ver-

änderungen

änderungen richten ſich dergeſtalt ins Gleichgewichte, daß M eben ſo viel zuſammengepreßt wird als A, und daß der Druck, den der Cylinder in den Puncten b, c, g, e, f aushält, durchaus gleich iſt. Denn da der Cylinder genau ſo weit im Lichten iſt als eine nicht zuſammengepreßte Kugel, ſo wird der Diameter f g nicht verändert, ſondern die Kugel dehnt ſich gegen die Ecke aus; und ſo iſt der Druck in e, f, g, d, c, b, a genau dem Gewichte der Kugeln gleich.

§. 209.

Wir werden nun leicht ſehen können, was erfolgt, wenn der Cylinder in einem dieſer Puncte ſo geöfnet wird, daß die Oefnung der Gröſſe der Kugel gleich wird. 1°. Er werde in c geöfnet, ſo bleibt der Druck den die Kugel A in den Puncten b, d aushält, ohne Wirkung, weil jeder dem andern gleich und die Richtung entgegen geſetzt iſt. Hingegen da der Druck, den die Kugel in c äuſſerte, nunmehr wegfällt, ſo wirkt der Druck in a ganz allein, und die Kugel wird davon mit einem gewiſſen Grade der Geſchwindigkeit herunter getrieben, und zwar mit eben dem Grade, den ſie haben müßte, um durch das bloſſe Anſtoſſen eben ſo viel zuſammengedrückt zu werden. Man ſieht ohne Mühe, daß dieſe Geſchwindigkeit = 0 ſeyn würde, wenn die Kugel weder elaſtiſch noch zuſammengedrückt geweſen wäre.

Denn ſo würden alle Kugeln A, B, C &c. zugleich aus der bloſſen Ruhe und mit einer anfänglichen Geſchwindigkeit = o herunter geſunken ſeyn (§. 129. 148). Dieſes letztere widerſpricht nun bey flüßigen Materien der Erfahrung, als welche im Ausflieſſen aus einem Gefäſſe eine deſto gröſſere anfängliche Geſchwindigkeit haben, je gröſſer ihre Höhe in dem Gefäſſe iſt; und man findet auch, daß die Weite des Gefäſſes nur in ſofern etwas dabey zu ſagen hat, als theils dieſe Höhe länger gleich erhalten wird, theils auch die Cohaeſionskräfte einen Einfluß bey engen Röhrgen äuſſern. II°. Oefnet man hingegen die Röhre in e, ſo ſieht man ebenfalls, daß ſich der Druck in d ganz äuſſert, und daß folglich weil dieſer Druck dem Drucke a gleich iſt, die Kugel M nach der Richtung d e eben ſo geſchwinde heraus fahren werde, als vorhin die Kugel A durch c herunter fuhr; ingleichem daß der Cylinder ſelbſt, wenn er beweglich iſt, rückwerts getrieben werde. III°. Aus gleichem Grunde wird ſie, wenn die Röhre in f geöfnet wird, mit eben der Geſchwindigkeit nach der Richtung g f aufwerts fahren, weil der Druck in g ſo groß iſt als der in d und a war. IV. Endlich ſieht man ohne Mühe, daß alles dieſes auch ſtatt findet, wenn gleich die Röhre nicht horizontal gebogen iſt. Der Unterſchied iſt nur, daß wenn die Röhre ſich abwerts neigt, ſodann die Kugel A mit einem Theil ihres Gewichtes

auf

auf M drückt, und folglich die Geſchwindigkeit um eben ſo viel vermehrt; und daß hingegen, wenn die Röhre aufwerts gebogen wird, die Kugel M mit einem Theil ihres Gewichtes auf A drückt, und dadurch dem Druck der Kugeln B, C &c. entgegen wirkt, folglich die Wirkung deſſelben um eben ſo viel vermindert.

§. 210.

Nun läßt ſich leichtlich der Schluß ſo machen: Erſtlich, aller dieſer Erfolg wäre anders, wenn die Kugeln nicht elaſtiſch wären: denn ſo würde die Kugel M weder in e, noch in d, noch in f, ſondern ſchechthin nur nach ihrem eigenen Gewichte in g drücken. Es zeigt aber die Erfahrung bey flüßigen Materien nicht den Erfolg der nicht elaſtiſchen, ſondern durchaus den Erfolg der elaſtiſchen Kugeln, weil, wenn die Röhre damit angefüllt iſt, ſie mit gleicher Geſchwindigkeit, durch welche der Oefnungen b, c, g, e, f man will, heraus fahren und jedesmal auch auf den Cylinder zurücke wirken. Demnach iſt offenbar, daß man ihre Theilchen nothwendig elaſtiſch ſetzen muß. Nun iſt dieſes zwar, ſofern ſich ohne Elaſticität keine Härtigkeit der Materie gedenken läßt, an ſich nothwendig (§. 205. 130); und ſo läßt ſich aus beyden Gründen von der Elaſticität der Theilchen nicht abſtrahiren, wenn man die Wirkungen und den Erfolg a priori betrachten, und die mögliche Fälle dergeſtalt ausleſen und

in eine Theorie bringen will, daß dieſe ſodann in der Welt anwendbar ſey.

§. 211.

Will man den Cylinder in e verlängern, um noch mehrere Kugeln von gleicher Gröſſe und Elaſticität hineinlegen, ſo wird man auf eben die Art heraus bringen, daß ſie ſämtlich eben ſolchen Druck gegen den Cylinder und untereinander in den Berührungspuncten äuſſern, als im erſt betrachtetem Fall die Kugeln M, A, weil es gleichviel iſt, ob die Kugel M ihren Druck in e unmittelbar gegen den Cylinder, oder vermittelſt anderer Kugeln gegen denſelben äuſſert. Nun kann letzteres nicht geſchehen, bevor dieſe andere Kugeln nicht eben ſo zuſammengedrückt ſind, als es M iſt. Da nun die Schwere, von welcher dieſer Druck herrührt, in einem fort wirkt, ſo bleibt das Syſtem nur alsdann im Ruheſtande, wenn das Zuſammendrücken ganz erfolgt iſt. Demnach, wo man immer an dem in e verlängerten Cylinder eine Oefnung macht, daß eine der Kugeln heraus kann, ſo wird dieſe eben ſo, wie vorhin die Kugel M und mit eben der anfänglichen Geſchwindigkeit heraus fahren, ſo lange nemlich die Röhre g c horizontal iſt. Neigt ſie ſich aber herunterwerts, ſo, daß jede Kugel tiefer liegt, als die ſo näher gegen A ſind, ſo wird auch ein Theil des Gewichts von dieſen auf die Zuſammendrückung der entferntern verwendet,

wendet, und die Geſchwindigkeit, mit welcher jede bey gemachter Oefnung heraus fährt, wird dadurch gröſſer. Das Gegentheil erfolgt, wenn die Röhre g c aufwerts gebogen wird, weil ſodann die darin liegenden Kugeln, mit einem Theil ihres Gewichtes herunterwerts drücken, und in ſofern einem Theil des Druckes der Kugeln A, B, C &c. das Gleichgewicht halten.

§. 212.

Die Röhre in f wird von der Kugel M eben ſo viel aufwerts gedrückt, als die Kugel B von der Kugel A in a, demnach ſo viel als das Gewicht der ſämtlichen Kugeln B, C &c. die auf A liegen. Man könnte demnach anſtatt die Röhre in f geſchloſſen zu halten, noch einen verticalen Cylinder anſetzen, und eben ſo viele Kugeln als in B C ſind darein legen, und ſo würde in f eben die Zuſammendrückung erfolgen und daher ein Gleichgewicht ſtatt haben. Ich muß noch erinnern, daß wenn die auf A liegende Anzahl der Kugeln nicht ſehr groß iſt, ſich ſodann zwiſchen dem Druck in f, a, und zwiſchen dem Druck in g, c ein bemerkbarer Unterſchied äuſſert, weil die Kugeln A, M ſelbſt auch mit ihrem eigenen Gewichte auf c, g drücken. Dieſer Unterſchied verſchwindet aber bey der Betrachtung flüßiger Materien, weil deren Theilchen faſt als unendlich klein anzuſehen ſind.

§. 213.

Man ſieht aus dem bishergeſagten, daß eine einige verticale Columne von Kugeln B, C &c. zureichend iſt, denen Kugeln A, M und ſo viel noch in der horizontalen Röhre g c liegen, eben den Druck mitzutheilen, den eben ſo viele andere Columnen mittheilen würden, und daß es folglich auf die Anzahl dieſer Columnen nicht ankommt, um auf eine ganze horizontale Schichte von Kugeln einerley Druck auszubreiten.

§. 214.

Setzt man nun, die Röhre g c bleibe horizontal, hingegen liege die Röhre b h ſchief, ſo kann man ſich leicht gedenken, daß jede der Kugeln B, C &c. nicht mehr mit ihrem ganzen Gewichte auf die untere drücke, ſondern mit einem Theil deſſelben gleichſam auf der Röhre ruht, wo ſie anliegt. Die Verhältniß läßt ſich nach Anleitung des §. 149 leicht finden, und es ergiebt ſich, daß der ſchiefe Druck in Verhältniß des Sinus des Winkels abnimmt, denn die Röhre b h mit der Horizontallinie g c macht, und folglich der Druck aller darin befindlichen Kugeln auf A einerley iſt, oder A gleich viel zuſammen gedrückt wird, wenn die Kugeln in b h bis auf einerley ſenkrechte Höhe aufgehäuft werden. Setzt man demnach in f eine ſchiefe Röhre und füllt ſie bis auf gleiche Höhe mit b h mit Kugeln an, ſo wird ein Gleichgewicht ſtatt haben, widrigenfalls nicht.

§. 215.

§. 215.

Ich werde nun dieſen Vortrag, deſſen vollſtändige Ausführung ſehr weitläuftig werden würde, nicht weiter verfolgen. Man ſieht leicht, daß ſich nach Anleitung deſſelben eine in einem Gefäſſe eingeſchloſſene flüßige Materie in horizontale Schichten vertheilen läßt, daß jede Schichte einen durchaus gleichen Druck, oder vielmehr Zuſammendrückung von dem Gewichte der aufliegenden Schichten erhält, daß dieſe Zuſammendrückung von der horizontalen Länge und Breite der aufliegenden Schichten nicht abhängt, ſondern ſchlechthin nur von ihrer Höhe herrührt. Man kann eben ſo daraus ſchlieſſen, daß die Oberfläche oder oberſte Schichte, wenn ſie eine Länge und Breite hat, horizontal ſeyn müſſe, weil die verticalen Columnen ſonſt nicht gleich ſeyn würden, wie es zu Erhaltung des Gleichgewichtes in der Zuſammendrückung jeder Theilchen einer der untern Schichten erfordert wird. Endlich ſieht man, daß, wenn auch das Gefäß oben enger iſt als unten, das Gefäß aller Orten ſo gedrückt wird, als es eine verticale Columne von gleicher Höhe und Baſis thun würde. Alles dieſes folgt aus dem Unterſchiede, den man zwiſchen den bloſſen Druck und dem Zuſammendrücken der elaſtiſchen Theilchen der flüßigen Materie nothwendig machen muß, und wovon man ſchlechthin nicht abſtrahiren kann. (§. 210. 211). Der Druck läßt ſich, ſo

ungleich die Gröſſe und Lage der Theilchen auch ſeyn mögen, aus der bloſſen Theorie der Zuſammenſetzung und Auflöſung der Kräfte herleiten, weil jedes Kügelchen oder Theilchen auf drey oder vier andern wie auf einem Fußgeſtelle ruht, und hinwiederum drey oder vier andere Theilchen der nächſt höhern Schichte tragen hilft (§. 59. 108). Daraus findet ſich, daß jede Schichte das Gewicht aller aufliegenden trägt, und ohne die Elaſticität der Theilchen würde dieſes auch alles ſeyn. Man kann daraus auch zeigen, daß bey einem Gefäſſe von irregulärer Figur, der Druck der aufliegenden Schichte nicht auf jedes Theilchen einer Schichte gleich vertheilt ſey, ſondern jedes Theilchen nur ſo viel tragen, und die nächſt unten anliegende Schichte nur ſo viel drücken würde, als es die Höhe der Columne, zu welcher es gehört, mit ſich bringt. Dieſes hat zwar in Abſicht auf das bloſſe Gewicht auch ſtatt, wenn die Theilchen elaſtiſch ſind. Es kömmt aber alsdann noch das Zuſammendrücken derſelben hinzu, und dieſes hängt nun, weil die Kügelchen ſich unter ſich und an dem Gefäſſe anſperren, nicht bloß von der Höhe jeder Columne, ſondern von der abſoluten Höhe der Schichten ab, weil eine einige Columne zureichend iſt, die in jeder horizontalen Schichte befindliche Theilchen, durchaus gleich zuſammen zu drücken, es mögen in dieſer Schichte viele oder wenige Theilchen ſeyn (§. 211).

§. 216.

§. 216.

Da ſich das ganze Syſtem ins Gleichgewichte ſetzt, ſo kömmt der Mittelpunct der Schwere an den tiefſten Ort, und ſo läßt ſich auch daraus der waagrechte Stand der Oberfläche herleiten. Es ſey DEABHC ein Gefäß mit Waſſer angefüllt, deſſen Fläche in den beyden Theilen AB, CD ſey; GF ſey horizontal, und M der Mittelpunct der Schwere. Man drücke das Waſſer in ab herunter, ſo ſteigt auf der andern Seite eben ſo viel in cd herauf, und die Räumigen ABba, CDdc ſind einander gleich. Ihre Mittelpuncte der Schwere ſeyn f, g, und aus dieſen fälle man auf GF ſenkrechte Linien. Die in DCcd herauf getriebene Menge Waſſers ſey $= m$, und zwar unendlich klein. Die Oberfläche AB werde $= \alpha$, die in DC $= \beta$ geſetzt. DG ſey $= z$, $fF = y$, und die Vertiefung des Waſſers in A ſey $= dx$, ſo iſt deſſelben Erhöhung in D $= \alpha dx : \beta$. Demnach die Aenderung dv, ſo in der Höhe des Mittelpuncts der Schwere vorgegangen, wenn die ganze Maſſe $= M$ geſetzt wird, Fig. XXXII.

$$Mdv = -(y - \tfrac{1}{2}dx)m + \left(z + \frac{\alpha dx}{2\beta}\right)m$$

dieſe aber muß $= 0$ ſeyn, weil die Höhe des Mittelpuncts M ein minimum iſt. Daher iſt

$$0 = -(y - \tfrac{1}{2}dx)m + \left(z + \frac{\alpha dx}{2\beta}\right)m$$

und hieraus

$$y - z = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} . dx$$

das will ſagen

$$y - z = 0$$
$$y = z$$

Demnach müſſen die Höhen der Oberflächen AB, DC gleich ſeyn, wenn das Syſtem im Gleichgewichte ſeyn ſolle. Es wird auf eben dieſe Art auch erwieſen, daß dieſe Flächen horizontal und eben ſeyn müſſen.

§. 217.

Man ſieht übrigens aus dieſem Beweiſe, daß die Differentialtheilchen dx, $\frac{\alpha dx}{\beta}$ zuletzt wegfallen, und nur y mit z verglichen wird. Ich merke dieſes deswegen an, weil man gewöhnlich den Stand des Gleichgewichtes darauf gründet, daß, wenn der Schenkel DC z. E. viermal enger iſt als der Schenkel AB, das Waſſer im erſtern viermal geſchwinder und höher ſteigen muß als im letztern. Und dieſes leitet man aus den Differentialhöhen dx und $(\alpha dx : \beta)$ her. Da aber dieſe Verhältniß ganz unbeſtimmt läßt, ob die Höhen y, z gleich oder ungleich ſind; ſo nimmt man ferners an, der Druck des Waſſers in dem Schenkel EA ſey wegen der gröſſern Menge Waſſers, in

umge-

umgekehrter Verhältniß der Geſchwindigkeit, gröſſer als der Druck des Waſſers in dem Schenkel E D, wenn die Höhen y, z gleich ſind. Ob dieſes allgemein und für jede Figur des Gefäſſes könne erwieſen werden, ſehe ich nicht ein. Wenn es aber auch erwieſen werden könnte, ſo kommen hier alle die Anmerkungen zu machen vor, die wir oben (§. 47 ſeq.) bey Anlaß eines ähnlichen Beweiſes für den Hebel gemacht haben. Denn hier ſieht man ebenfalls das Waſſer in beyden Schenkeln als Kraft und Laſt an, und ſetzt, ſie ſeyn im Gleichgewicht, wenn ſich im Fall der Veränderung oder Aufhebung deſſelben der Weg, den die Kraft macht, zu dem Weg der Laſt, umgekehrt, wie die Laſt zu der Kraft verhält; und hinwiederum habe erſteres ſtatt, wenn letzteres ſtatt habe. Man ſieht aber leicht, daß wenn die beyden Schenkel nicht cylindriſch oder Parallepipeda ſind, dieſes hier nicht ſo unbedingt angewandt werden kann. Wenn es aber auch angienge, ſo kommen noch alle die erſtbemeldten Anmerkungen vor, die wir, weil ſie oben (§. 47) ſchon ausführlich vorgetragen worden, hier nicht wiederholen.

§. 218.

Noch bleibt nun der Satz, daß ein ſchwerer Körper unter dem Waſſer eben ſo viel von ſeinem Gewichte verleurt, als das Waſſer wiegt, deſſen Stelle er einnimmt. Von dieſem

Satze

Satze läßt ſich folgender Beweis geben, welcher den eigentlichen Grund davon deutlich auseinander ſetzt, weil er auf der Reſolution der drückenden Kräfte beruht. Ich bemerke demnach aus dem vorhergehenden, daß, weil ein jedes Waſſertheilchen, ſo den Körper berührt, in ſeiner Zuſammendrückung ſich an denſelben anſperrt, es den Druck ſenkrecht auf die Oberfläche des Körpers äuſſert, und daß dieſer Druck allemal der verticalen Tiefe deſſelben unter der Oberfläche des Waſſers dergeſtalt proportional iſt, daß wenn man dieſe Tiefe mit dem Theilchen der Fläche des Körpers, worauf es drückt, multiplicirt, man dadurch den ſoliden Raum einer Columne Waſſers erhält, deren Gewicht dem Drucke gleich iſt. Da demnach dieſer Druck ſich nach der Tiefe verändert, und ſich, in Abſicht auf die Direction, nach der Fläche des Körpers richtet; ſo werden wir den Körper in unendlich kleine Priſmata vertheilen, die alle parallel, und entweder vertical oder horizontal liegen. Unter den horizontalen ſey A B H F eines, wo die Fläche A B C D dem Drucke des Waſſers ausgeſetzt, und welche gegen die Verticallinie L M unter dem Winkel K L M, und gegen die Länge des Priſma D F unter dem Winkel M K N geneigt iſt, und daher, in beyden Abſichten, eine ſchiefe Lage habe. Nun iſt der Druck des Waſſers auf die Fläche A B C D ſenkrecht, und daher geht derſelbe nach einer doppelt ſchiefen Richtung

Fig. XXXIII.

tung

tung herunterwerts. Er läßt ſich aber leicht in zween andere auflöſen, welche auf die Grundfläche A Q P D und die verticale Fläche B Q P C ſenkrecht ſind. Und da giebt die Theorie von der Zuſammenſetzung und Auflöſung der Kräfte, daß, wenn der Druck auf die Fläche A B C D, durch dieſe Fläche vorgeſtellt wird, ſodann der verticale Druck durch die Fläche A Q P D, und der horizontale durch die Fläche B C P Q vorgeſtellt werde. Demnach könnte man das trianguläre Priſma, ſo dieſe drey Flächen bilden, wegnehmen, und ſo würde das Waſſer, mit eben der linearen Kraft, ſeinen Druck ſenkrecht auf die horizontale Fläche A Q P D herunterwerts, und ſenkrecht auf die verticale Fläche B C P Q nach der horizontalen Richtung K M mit eben dem Erfolge äuſſern, mit dem es vorhin auf die Fläche A B C D drückte. Da aber die Richtung des horizontalen Druckes K M mit der Länge des Priſma D F nicht parallel iſt, ſo muß der Druck auf die verticale Fläche B C P Q in zween andere aufgelöſt werden, welche anf die gleichfalls verticalen Flächen B Q T S und S C P T ſenkrecht ſeyn, und folglich letzterer nach der Länge des Priſma D F, erſterer aber nach der Breite des Priſma D R oder P T gehe. Nun folgt eben ſo, wie vorhin, aus der Theorie der Zuſammſetzung der Kräfte, daß jede dieſer Flächen das Maaß des Druckes iſt, der auf ſie wirkt. Demnach lieſſe ſich auch das Priſma, ſo dieſe drey Flächen einſchlieſ-

einſchlieſſen, wegnehmen, und das Waſſer würde auf die Fläche BQTS, SCPT, DAQP mit eben dem Erfolge ſeinen Druck äuſſern, den es auf die Fläche ABCD äuſſert. Nun ſtellt die Fläche PCST die Dicke des Priſma vor, hingegen zeigt AQPD an, wie viel es unten länger iſt als oben; und eben ſo zeigt BQTS = ABSR, wie viel es hinten länger iſt als vornen. Demnach richtet ſich der Druck der Länge, Höhe und Breite nach genommen, ſchlechthin nach dieſen drey Umſtänden.

§. 219.

Es iſt nun leicht zu begreifen, daß dem Druck auf die Fläche SCPT ein anderer gleich groſſer auf die Fläche HGEF entgegen wirkt, und demnach das Priſma, in dieſer Abſicht betrachtet, im Gleichgewichte bleibt. Denn iſt der Schnitt des Priſma HGFE wirklich auf deſſen Länge ſenkrecht, ſo iſt es für ſich klar, daß das Waſſer, weil das Priſma horizontal liegt, auf HGFE eben den Druck äuſſert, den es auf die Fläche PCST äuſſert. Wäre aber der Schnitt des Priſma ſchief, ſo läßt ſich der Druck Waſſers eben ſo in drey auf einander rechtwinklichte auflöſen, wie es in Abſicht auf den ſchiefen Schnitt ABCD geſchehen; und ſo wird der Druck, nach der Länge FD gerechnet, der auf dieſelbe ſenkrechten Fläche FEHG = PCST gleich

ſeyn.

ſeyn. Da nun dieſes von allen Priſma gilt, in die ſich der Körper eintheilen läßt, ſo folgt, daß jedem horizontalen Druck des Waſſers, ein gleich groſſer entgegen wirkt, und demnach der Körper in dieſer Abſicht im Gleichgewichte erhalten wird.

§. 220.

Mit dem verticalen Druck hätte es eine gleiche Bewandtniß, wenn der Druck des Waſſers in jeder Höhe gleich wäre. So aber iſt zwar der verticale Druck, der auf die Fläche AQPD herunterwerts geht, demjenigen, der auf die Fläche aqpd heraufwerts geht, entgegengerichtet. Da aber jeder einem Product aus dieſer Fläche AQPD = aqpd in die Tiefe derſelben unter der Oberfläche des Waſſers dergeſtalt proportional iſt, daß er dem Gewichte eines Parallelepipedi Waſſers von eben der Gröſſe gleich iſt, ſo iſt der Ueberſchuß des untern Druckes über den obern dem Gewichte des Waſſers gleich, welches in dem Raume AQPpdA ſeyn könnte. Da nun dieſer Ueberſchuß des untern Druckes aufwerts geht; ſo benimmt er dem Priſma Ap eben ſo viel von ſeinem Gewichte, als das Waſſer wiegt, deſſen Raum es einnimmt. Nun gilt eben dieſes von jedem unendlich kleinen verticalen Priſma, ſo ſich durch den Körper gezogen, gedenken läßt, demnach von dem ganzen Körper. Demnach verleurt der Körper von ſeinem

Gewich-

Gewichte ſo viel, als das Waſſer wiegt, deſſen Raum er einnimmt.

§. 221.

Man ſieht aus dieſem Beweiſe zugleich, daß der Satz nur alsdann ſtatt findet, wenn das Waſſer den Körper um und um berührt. Ich merke dieſes deswegen an, weil, wenn der Körper dergeſtalt auf dem Boden des Gefäſſes liegt, daß kein Waſſer dazwiſchen kommen kann, der Körper ſodann minder von ſeinem Gewichte verleurt. Und ſo iſt es möglich zu machen, daß ſelbſt ein Körper, der leichter als das Waſſer iſt, unter dem Waſſer auf dem Boden des Gefäſſes liegen bleibt.

XVII. Die Bewegung flüßiger Materien.

§. 222.

Bey der Bewegung flüßiger Materien kann man ſich unendlich viele und zugleich auch unendlich verwickelte Fälle gedenken, wo man genöthigt iſt, die Bewegung eines jeden Theilchen beſonders zu betrachten, und vermittelſt mehrerer Integrationen aus den Differentialgröſſen auf das Ganze zu ſchlieſſen. Es ſind daher überhaupt diejenige Fälle die einfachſten, wobey ſich ſolche Integrationen auf eine einige bringen laſſen. Und die Frage iſt demnach,

nur

nur zu ſehen, welche Bedingungen dazu erfordert werden.

§. 223.

Der einfachſte Fall iſt, wo eine flüßige Maſſe in luftleerem Raume ſchlechthin nur herunter fällt, ſo, daß alle Theilchen zugleich anfangen zu fallen. Denn da behält die Maſſe ihre Figur, und die Theilchen ihre Lage, und ſo erfolgt alles, wie wenn ein feſter oder harter Körper fiele. Setzt man hiebey, die Maſſe ſey cylindiſch und falle nach der Richtung der Axe des Cylinders vertical herunter, ſo durchläuft dieſelbe einen cylindriſchen Raum von gleichem Diameter. Dieſen Raum kann man ſich in Form einer Röhre eingeſchloſſen gedenken; und abſtrahirt man von allem Anreiben und von allen Cohaeſionskräften, ſo läßt ſichs gedenken, daß das Waſſer in einem verticalen Cylinder, wenn es zugleich anfängt in demſelben zu fallen, eben ſo herunter fällt, als wenn es in leerem Raume fiele. Unter gleicher Bedingung wird es in einem ſchiefliegenden Cylinder mit verminderter Geſchwindigkeit eben herunterflieſſen, wie eine Kugel auf einer gleich ſchiefliegenden Fläche herunter läuft (§. 149), das Waſſer muß aber zugleich anfangen zu fallen, der Cylinder gleich weit, und nicht gebogen ſeyn.

§. 224.

Nach dieſem an ſich einfachſten Fall betrachtet man denjenigen, wo das Waſſer, ebenfalls nur durch die Kraft der Schwere getrieben, aus einem Gefäſſe ausfleußt. Hiebey zeigen ſich, gleich bey dem Anfange des Ausflieſſens, einige beſonders zu betrachtende Umſtände. Der erſte hängt von der Elaſticität der Theilchen und ihrer Zuſammendrückung ab. Denn da haben wir bereits (§. 208 ſeq.) geſehen, daß wenn in c die Röhre b h geöffnet wird, die elaſtiſche und zuſammengedrückte Kugel A, mit einer Geſchwindigkeit heraus fährt, die nicht bloß von dem Drucke der Schwere, ſondern zugleich auch von ihrer Elaſticität herrührt. Eben dieſes wiederfährt den folgenden Kugeln B, C &c. jedoch immer weniger, weil dieſe minder zuſammengedrückt ſind. Jede erhält nach den Maaß ihrer Höhe über c einen Grad von Geſchwindigkeit, ſich herunterwerts zu bewegen, welche gröſſer iſt und ſich viel ſchneller äuſſert als diejenige, die ſie durch den bloſſen Druck der Schwere erhalten würden, wenn ſie entweder nicht elaſtiſch oder wenigſtens nicht zuſammengedrückt wären. Die Wirkung hievon dauert aber bey flüßigen Materien nicht lange, weil die Theilchen derſelben ſehr hart ſind, und einander berühren. Denn dadurch ſetzt ſich das Syſtem bald in einen Beharrungsſtand, und es werden nur die erſten Tropfen mit einer gröſſern Geſchwindigkeit

Fig. XXXI.

digkeit

digkeit heraus geworfen. Man ſieht dieſes auch bey den Springbrunnen, wenn die Röhre mit einem male ſchnell geöfnet wird. Der Beharrungsſtand ſelbſt aber iſt dieſer, daß, wenn die Oefnung kleiner iſt als die innere Weite des Gefäſſes, die Theilchen einen gewiſſen Grad von Zuſammendrückung behalten, und eben dadurch verurſachen, daß das Waſſer durch eine kleinere Oefnung geſchwinder heraus getrieben wird, als wenn dieſe gröſſer iſt. Denn man ſieht leicht, daß nur diejenige Theilchen ſich wieder ausdehnen können, die zunächſt bey der Oefnung ſind, und daß die entferntern ſich nur in ſofern ausdehnen können, als ſie einen Theil ihres Druckes verwenden, um die Theilchen bey der Oefnung deſto geſchwinder heraus zu treiben, um ſich dadurch gleichſam Raum zu machen.

§. 225.

Der andere Umſtand kömmt vor, wenn, ehe die Röhre geöfnet wird, zwiſchen der Oefnung und der Röhre etwas Luft iſt, ſo, daß bey gemachter Oefnung, das Waſſer anfängt zu fallen, ehe es dieſelbe berührt, und daher mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit anfährt. Iſt nun die Oefnung ſehr klein, ſo werden die übrigen Theilchen ſehr zuſammengepreßt, und eben dadurch erfolgt, daß ſie diejenigen, ſo vor der Oefnung ſind, mit einer merklichen Geſchwindigkeit heraus treiben. Es ſind aber

auch wiederum nur einige Tropfen, die mit ſo groſſer Geſchwindigkeit heraus fahren, und das Syſtem ſetzt ſich eben ſo, wie vorhin, in Beharrungsſtand, welchen wir nun betrachten werden.

§. 226.

Da die Theilchen elaſtiſch ſind, ſo hat, überhaupt betrachtet, die Lehre vom Stoß elaſtiſcher Körper dabey ſtatt, und man kann ſie allein dabey anwenden, wenn man von der Cohaeſion, der Zähigkeit und dem Anreiben abſtrahirt. Von der Zähigkeit läßt ſich abſtrahiren, wenn man eigentlich oder vollkommen flüßige Körper nimmt. Die Cohaeſionskräfte heben ſich inner der flüßigen Materie unter einander auf, und äuſſern ſich daher eben ſo wie das Anreiben, nur an den Seiten des Gefäſſes oder der Röhre, in welcher ſich die flüßige Materie bewegt. Iſt demnach das Gefäß oder die Röhre ſehr weit, ſo wird die daherrührende Hinderniß, überhaupt betrachtet, unmerklicher.

§. 227.

Sofern ſich demnach die Geſetze des Stoſſes elaſtiſcher Körper bey der Bewegung flüßiger Materien anbringen laſſen, wird allerdings auch der Satz gelten, daß die Summe aus den Producten der Maſſe jedes Theilchens in das Quadrat ſeiner Geſchwindigkeit beſtändig bleibe, ſo lange nicht eine äuſſere Kraft, wie

wie z. E. die Kraft der Schwere, die Bewegung der Theilchen vermehrt oder vermindert: denn im letztern Fall muß dieſer Aenderung Rechnung getragen werden. Da aber die Rechnung ins unendlich weitläuftige fällt, wenn man die Bewegung eines jeden Theilchens für ſich betrachten will; ſo ſucht man auch hier diejenigen Fälle aus, wo ſich dieſe Weitläuftigkeit abkürzen läßt. Und hiezu thut die Betrachtung, daß die Theilchen einander immer berühren, nicht geringe Dienſte: denn dadurch geht der Druck, den ein jedes Theilchen äuſſert, ſogleich in die anliegenden über; und in ſofern würde jedes liegen bleiben, wenn nicht zum Ausflieſſen, oder auch zum Fortflieſſen eine Oefnung wäre. Dieſes macht, daß jeder Druck, der gegen die Oefnung gerichtet iſt, nicht wieder zurücke kehrt, ſondern die bey der Oefnung liegenden Theilchen zum Ausflieſſen nöthigt.

§. 228.

Man ſetze z. E. aus dem Gefäſſe D H A flieſſe, durch eine in E gemachte Oefnung, Waſſer heraus, ſo läßt ſich die Oberfläche deſſelben D A, nach und nach, herunter. Sie mag in f ein wenig tiefer ſeyn als in B und A, ſofern das Waſſer in der Mitte ſich leichter ſenkt, als an dem Rande des Gefäſſes. Man nimmt aber aus dieſer verſchiedenen Geſchwindigkeit ein Mittel, und indem man ſetzt, die Fläche ſenke Fig. XXXII.

ſich mit dieſer mittlern Geſchwindigkeit gleichförmig, ſo iſt es, überhaupt betrachtet, eben ſo viel als wenn ſie eben bliebe. Da nun eben dieſes von jeder horizontalen Schichte gilt; ſo erhält man dadurch die Abkürzung der Rechnung, daß man anſtatt das Senken eines jeden Theilchens zu betrachten, das Senken einer ganzen Schichte von Theilchen betrachten kann. Dieſes Umſtandes nun hat ſich längſt ſchon Herr D. Bernoulli theils in dem 2ten Bande der Comment. acad. Petrop. fürnemlich aber in ſeiner Hydrodynamic, mit gutem Erfolge bedient. Es iſt die einige mögliche Art, die Bewegung flüßiger Materien im Ganzen zu betrachten, ohne ſich weder in viele Integrationen, noch in eine Menge einzelner und zum Theil unerweislicher Hypotheſen über die Bewegung, Cohaeſion und Zähigkeit jeder Theilchen der flüßigen Materien einzulaſſen.

§. 229.

Es wird indeſſen nicht überflüßig ſeyn, hier noch einige beſondere Anmerkungen über die Bewegung flüßiger Materien beyzufügen. Die erſte betrift die Höhe des ſpringenden Waſſers; dieſe wird gewöhnlich der Höhe des Falles gleich geſetzt. Da ſie aber immer kleiner iſt, ſo ſucht man auch verſchiedene Gründe dafür, und dieſe werden bloß als kleine Ausnahmen von der Regel angegeben. Indeſſen muß ich ſagen, daß mir die Beweiſe, der dem Fall

gleiche

gleiche Höhe des ſpringenden Waſſers, niemals ſehr einleuchtend geſchienen; und die hydrauliſchen Sätze waren meiſtentheils bisher mehr aus Erfahrungen als aus Gründen richtig. Was man bey Springbrunnen die Höhe des Falls nennt, muß ehender die Höhe des Druckes genennt werden: denn die Röhre, worinn das Waſſer herunter fällt, wird, aus guten Gründen, im Lichten viel weiter gemacht als die Oefnung, durch welche es heraus ſpringt. Da ſich aber eben daher das Waſſer ſehr langſam ſenkt; ſo kann es nicht ſowohl als fallend, ſondern vielmehr als bloß drückend angeſehen werden. Man hat demnach auch hier die Bewegung mit dem Drucke zu vergleichen; und dieſes hat, in Abſicht auf die einzelnen Theilchen, einen beſondern Erfolg. Denn da dieſe als elaſtiſch betrachtet werden müſſen, ſo muß man ſich auch gedenken, daß ſie, ſo wenig es auch ſeyn mag, zuſammengedrückt werden, bis ihre Schnellkraft dem Drucke der aufliegenden Laſt gleich wird. Dieſes geſchieht nun vollkommen, ſo lange die Oefnung, wo das Waſſer herausſpringen ſollte, geſchloſſen iſt. Man ſetze nun, dieſe werde geöfnet; ſo muß man ſich gedenken, daß jedes Theilchen, dafern man von den Cohaeſionskräften und andern Umſtänden abſtrahirt, wegen ſeiner eigenen Elaſticität in die Höhe ſpringt. Ob es aber genau die Höhe des Druckes erreiche, das iſt eine ganz andere Frage, weil deren Beantwor-

tung ſowohl von der Maſſe als der beſondern Elaſticität des Theilchens abhängt. Denn man ſieht leicht, daß hiebey die letzte Formel des §. 158

$$v = \int \frac{k\,dx}{m}$$

vorkömmt, wo v die Höhe iſt, welche das Kügelchen erreicht. Dieſe Höhe hängt aber von der Verkürzung des Diameters x, von dem Gewicht der aufliegenden Laſt k, und dem Gewicht des Kügelchen m ab. Und da iſt noch nicht bewieſen, daß bey allen elaſtiſchen Kügelchen (Fig. XXVII.) die krumme Linie BME von einerley Art ſeyn müſſe. Und noch weniger iſt erwieſen, daß, wenn die Laſt k einem Cylinder voll flüßiger Materie gleich iſt, deſſen Grundfläche ſo groß als das Kügelchen, und die Höhe = h iſt, ſodann immer

$$k = n\,h$$

und

$$h = v$$

ſeyn müſſe. Man ſieht leicht, daß dieſes eine beſondere Art von Elaſticität voraus ſetzt, weil dabey obige Formel in folgende

$$\frac{k}{n} = \int \frac{k\,dx}{m}$$

verwandelt wird, welche differentirt

$$\frac{m\,dk}{nk} = dx$$

und daher

$$\frac{m}{n}\log. k = x + \text{conſt.}$$

giebt.

giebt. Man kann aber nicht ſo ſchlechthin ſagen, daß dieſe in allen Fällen die Gleichung für die krumme Linie B M E ſey. Indeſſen wäre ſo viel wohl richtig, daß, wenn ein Waſſerkügelchen, in leerem Raume, von der Höhe v = h herunter fiele, es wiederum eben ſo viel aufſpringen könnte. So aber laſſen ſich die Fälle von ſpringendem Waſſer nicht betrachten. Und in ſofern bleibt es, der Theorie nach, unausgemacht, ob das Waſſer höher oder minder hoch ſpringe als die Höhe des Druckes iſt.

§. 230.

Ein anderer Umſtand bey ſolchen Springbrunnen, wo das Waſſer durch den Druck einer Columne oder Röhre voll Waſſers zum Springen gebracht wird, betrift die äuſſere Luft. Eine ſolche Röhre läßt ſich, gewiſſer maſſen, als ein Barometer anſehen, wo die Luft auf die untere Oefnung ſtärker druckt als auf die obere. Dieſes macht zwar, wo die Höhe der Röhre nicht von 100 und mehr Fuſſen iſt, keine groſſe Veränderung. Indeſſen kann der Luft ſo viel zugeſchrieben werden, daß ſie das Waſſer in der Röhre zuſammen hält. Bey Queckſilber hat dieſes noch mehr zu ſagen. Ich habe z. E. Thermometer von Queckſilber gemacht, ſo, daß die Luft aus der Röhre ganz ausgetrieben war. Wenn ich es ſodann umwendete, daß die Röhre herabhienge, ſo ſonderte ſich eine Columne von Queckſilber ab,

weil ihr Gewicht ſtärker als Cohaeſionskräfte war, und in dem luftleeren Theil der Röhre ſich nichts widerſetzte. Ein gleiches lieſſe ſich auch durch Erſchütterung erhalten, wodurch die Queckſilbertheilchen ihre Elaſticität ſtärker äuſſerten.

§. 231.

Ein dritter Umſtand findet ſich bey der abnehmenden Geſchwindigkeit des aufſpringenden Waſſers. Die Höhe, die es in gleichen Zeittheilchen zu erreichen hat, nimmt ab, wie die ungerade Zahlen, z. E. wie 7, 5, 3, 1. Dieſes macht nun, daß ſich in den abgetheilten Columnen, deren Höhen wie 7, 5, 3, 1 ſind, gleich viel Waſſer befinden muß. Daraus aber folgt offenbar, daß der aufſpringende Waſſerſtrahl in gleicher Verhältniß dicker werden muß. Da nun dieſes nicht geſchehen kann, es ſey denn daß die Waſſertheilchen gezwungen werden, ſich ſeitwerts zu bewegen; ſo ſieht man auch, daß es ohne Aufwand einiger Kraft nicht angeht, und daß beſonders bey ſehr engen Oefnungen, das aufſpringende Waſſer deswegen nicht die völlige Höhe erreicht, weil es, ehe es dahin kommt, in Tropfen zerſprützt. Und auch daraus erhellet, daß die Theilchen elaſtiſch ſind.

§. 232.

Da übrigens die hier betrachteten Abweichungen von allgemeinen Regeln theils öfters

geringe

geringe ſind, und theils nur den Anfang des aufſpringenden Waſſers betreffen, ſo hält man ſich gewöhnlich nicht dabey auf, und zwar aus gleichen Gründen, wie auch bey Unterſuchung der Maſchinen des Anreibens ſelten viel Rechnung getragen wird. Die vollſtändige Berechnung iſt ohnehin unendlich weitläuftig, und auch da, wo z. E. Herr D. Bernoulli nur das Allgemeine betrachtet, wird ſchon eine ziemliche Bekanntſchaft mit den mechaniſchen Gründen voraus geſetzt, ſo, daß einige leicht verleitet worden, über Dunkelheit zu klagen. Ob die Sache verſtändlicher wird, wenn man den Vortrag ändert, das werden die Leſer entſcheiden müſſen. Ich möchte dabey, wie Herr Bernoulli gethan, gern von der Benennung der lebenden Kräfte abſtrahiren, und dennoch laſſen ſich auch die Wörter aſcenſus potentialis und deſcenſus actualis, ohne eine ziemliche weitläuftige Umſchreibung, nicht gebrauchen, ſo ſehr ſie auch, wenn man ſie einmal verſteht, die Sache abkürzen. Ich werde demnach ſehen, wie ſich das Ausflieſſen des Waſſers aus einem aufrechtſtehenden cylindriſchen Gefäſſe, mit den bisher vorgetragenen Sätzen, zuſammenhängen läßt. Es wird wohl einige Aufmerkſamkeit gebrauchen; indeſſen werde ich bemüht ſeyn, Schritt für Schritt zu gehen.

§. 233.

§. 233.

Fig. XXXIV. Ein ſolches Gefäß ſey CABD die Oefnung im Boden E, die Höhe des Waſſers, nachdem bereits ein Theil ausgefloſſen ſey AP. Nun iſt bekannt, daß ſich beym Ausflieſſen die Oberfläche des Waſſers PQ, nach und nach, herunter ſenkt, ſo, daß wenn ſie zu einer Zeit τ in PQ war, ſie zu der Zeit $\tau + d\tau$ in pq kömmt. Die Höhe AP, welche wir $= x$ ſetzen wollen, wird demnach immer vermindert, ſo, daß ſie $Ap = x - dx$ wird. Da das Gefäß cylindriſch iſt, ſo vermindert ſich auch die ganze Maſſe des Waſſers in gleicher Verhältniß mit der Höhe. Man ſetze, die Grundfläche des Cylinders ſey $= b$, ſo iſt die Maſſe $APQB = bx$, die Maſſe $ApqB = b(x - dx)$ und die Maſſe $PQqp = bdx$. Dieſe fleußt nun in der kleinen Zeit $d\tau$ durch die Oefnung E aus. Es iſt für ſich klar, daß ſie mit viel gröſſerer Geſchwindigkeit ausflieſſen muß als ſie ſich in Pp herunter ſenkt, und daß die Geſchwindigkeit des Ausflieſſens ſich zu der Geſchwindigkeit des Herunterſenkens verhält, wie die Grundfläche des Cylinders zu der Grundfläche der Oefnung, das iſt, wenn wir dieſe $= a$ ſetzen, wie b zu a, daß das Ausflieſſen durch die Höhe des Druckes verurſacht werde, verſteht ſich von ſelbſt. Es ſey nun die Geſchwindigkeit des herunterſenkens $= g$, des Ausflieſſens $= c$, ſo iſt $g : c = a : b$.

§. 234.

§. 234.

Ich habe bereits vorhin (§. 228) erwähnt, daß man durch g eine mittlere Geſchwindigkeit verſtehe, weil die ganze Maſſe des Waſſers ſich nicht durchaus gleichförmig ſenkt. Indeſſen wird dieſes angenommen, wo man die Sache nur im Ganzen betrachtet, und ſo ſtellt g die mittlere Geſchwindigkeit der ganzen Maſſe vor.

§. 235.

Nun werde ich, mehrerer Deutlichkeit halben, von der Wirkung der Schwere abſtrahiren, und ſetzen, die ganze Maſſe bewege ſich mit der Geſchwindigkeit g gegen den Boden AB. So bald ſie mit dieſer Geſchwindigkeit an Boden anfährt, ſo geht eine doppelte Veränderung vor. Denn erſtlich wird ein Theil Waſſers durch die Oefnung E heraus getrieben, und dadurch die übrige Maſſe vermindert. Andern Theils vermindert ſich auch die Geſchwindigkeit der übrigen Maſſe, weil von der Kraft, ſo ſie zum Austreiben verwendet, ein Theil abgeht; oder auch, weil der Boden und beſonders die ausflieſſenden Waſſertheilchen rückwerts wirken (§. 207 ſeqq.). Da nun die Waſſertheilchen elaſtiſch ſind (§. 210), ſo hat dabey das Geſetz ſtatt, daß die Summe der Producte aus den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeit, vor und nach der Veränderung, beſtändig iſt (§. 167). Nun iſt vor

der

der Veränderung die Maſſe $= bx$, die Geſchwindigkeit g, demnach das bemeldte Product $= ggbx$. Hingegen nach der Veränderung ſind zweyerley Maſſen: einmal die zurückgebliebene $b(x - dx)$, ihre Geſchwindigkeit $g - dg$; ſodann die heraus getriebene bdx ihre Geſchwindigkeit c. Dies giebt die Producte $b(x - dx)(g - dg)^2$ und $bdx.cc$. Da nun die Summen ſollen gleich ſeyn, ſo iſt $ggbx = (g - dg)^2(x - dx)b + ccbdx$. Demnach

$$o = -bggdx - 2bgdg.x + bccdx.$$

§. 236.

Wirket nun aber die Schwere mit auf das Waſſer, ſo iſt dieſer Ausdruck nicht $= o$, weil die Schwere dem Waſſer immer neuen Druck mittheilt, und ſo wird die Geſchwindigkeit ganz anders verändert. Da wir nun oben (§. 158) den Druck elaſtiſcher Körper mit dem Druck der Schwere verglichen, und die Formel

$$\tfrac{16}{1000} gg = \int \frac{kdx}{m} = v$$

gefunden haben, ſo werden wir uns dieſer Formel bedienen müſſen. In derſelben iſt k der Druck der elaſtiſchen Kraft, welcher hier dem Gewicht des Waſſers gleich geſetzt wird, ſo wie auch m das Gewicht des Waſſers, als Maſſe betrachtet, vorſtellt. Wir haben demnach, um die Homogeneität zu erhalten, den Coefficienten $\tfrac{16}{1000}$ in der Rechnung des vorhergehen-

hergehenden §. anzubringen, und bemerken, daß, wenn die Formel differentiirt wird, ſie ſich in

$$\frac{16.m}{1000}.2gdg = kdx = mdv$$

verwandelt, und anſtatt der ganz einfachen Veränderung der Geſchwindigkeit

$$\frac{16.m}{1000}.2gdg \text{ oder } mdv$$

der Ausdruck

$$\frac{16}{1000}(-bggdx - 2xbgdg + bccdx)$$

genommen werden muß, um ihn mit kdx zu vergleichen. Denn in gegenwärtigem Fall kommen zwo Maſſen $b(x-dx)$ und bdx mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten g, c in Betrachtung, und die damit vorgehende Veränderung

$$\frac{16}{1000}(-bggdx - 2xbgdg + bccdx)$$

muß mit kdx verglichen werden, wie in dem einfachern Fall $\frac{16}{1000}m.2gdg$ damit verglichen wird. Wir haben demnach

$$\frac{16}{1000}(-bggdx - 2xbgdg + bccdx) = kdx.$$

Nun iſt

$$k = bx$$

$$c = \frac{gb}{a}$$

und (§. 158)

$$\frac{16}{1000}gg = v$$

demnach

$$-bvdx - bxdv + \frac{b^3}{a^2}vdx = bxdx$$

oder

oder

$$\left(1-\frac{bb}{aa}\right)vdx+xdv=-xdx$$

Hieraus wird

$$v.x^{1-bb:aa}=+\frac{aa}{bb-2aa}x^{2-bb:aa}+\text{conſt.}$$

Da nun, wenn die anfängliche Höhe des Waſſers CA = f iſt, die Geſchwindigkeit und demnach v = 0 genommen wird, ſo erhalten wir

$$vx^{1-bb:aa}=\frac{aa}{bb-2aa}\left(x^{2-bb:aa}-f^{2-bb:aa}\right)$$

oder

$$v=\frac{16}{1000}gg=\frac{aaf}{bb-2aa}\left(\frac{x}{f}-\left(\frac{f}{x}\right)^{1-bb:aa}\right)$$

oder

$$v=\frac{16}{1000}gg=\frac{aaf}{bb-2aa}\left(\frac{x}{f}-\left(\frac{x}{f}\right)^{bb:aa-1}\right)$$

Nun iſt (§. 158) v die Höhe, aus welcher ein Körper fallen müſte, um die Geſchwindigkeit g zu erhalten, mit welcher ſich die Oberfläche PQ herunter ſenkt. Will man aber die Geſchwindigkeit des heraus flieſſenden Waſſers c haben, ſo iſt (§. 233)

$$c=\frac{gb}{a}$$

demnach

$$\frac{bb}{aa}.v=\frac{16}{1000}cc=\frac{bbf}{bb-2aa}\left(\frac{x}{f}-\left(\frac{x}{f}\right)^{bb:aa-1}\right)$$

§. 237.

§. 237.

Dieſes iſt nun eben die Formel, die Herr D. Bernoulli heraus bringt, nur mit dem Unterſchiede, daß er ſtatt der Differentialformel $\frac{16}{1000}(-bggdx-2xbgdg+bccdx)=kdx$. gleich anfangs die andere

$$-bvdx-xbdv+\frac{b^3}{a^2}vdx=bxdx$$

gebraucht, und folglich alles durch Höhen ausdrückt. Das zweyte Glied dieſer Gleichung nennt er den deſcenſus actualis, weil während dem ſich die Fläche des Waſſers aus P in p ſenkt, der Mittelpunct der Schwere um dx herunter ſinkt. Dieſes Sinken mit der Maſſe bx multiplicirt, giebt bxdx ſeinen ſogenannten Deſcenſus. Das erſte Glied der Gleichung erwächſt, wie wir geſehen haben, aus den Geſchwindigkeiten; und da es hier durch Höhen dv, dx ausgedruckt wird, ſo zeigt es, wie viel die Maſſe ſich mit ſolchen Geſchwindigkeiten aufwerts bewegen könnte. Und ſo nennt Herr B. das erſte Glied den aſcenſus potentialis, und ſetzt ihn in Form eines Grundſatzes dem deſcenſus actualis gleich.

§. 238.

Die Bernoulliſche Formel (§. 236) kömmt in dem Fall, wo $a=b$ iſt, mit der Erfahrung nothwendig überein: denn ſie verwandelt ſich in

$$\frac{16}{1000}cc=f-x=CP$$

das will ſagen, die Höhe des Falls wächſt wie

das Quadrat der Geſchwindigkeit. Wir haben auch bereits (§. 223) angemerkt, daß wenn der Cylinder in AB ganz offen iſt, auch die ganze Maſſe des Waſſers gleichſam frey herunter falle, wie ein Körper im freyem Raume fällt. In der That iſt auch nur das Anreiben an den Wänden des Cylinders das einige Hinderniß, und dieſes iſt ſehr geringe.

§. 239.

Wird hingegen die Oefnung E in Vergleichung mit der Weite des Gefäſſes ſehr geringe angenommen, ſo wird das Glied

$$(x:f)^{bb:aa-1}$$

bald ein ſo kleiner Bruch, den man weglaſſen kann, und ſo richtet ſich das Ausflieſſen gar bald nach

$$\frac{16}{100}cc = \frac{bbx}{bb-2aa}.$$

Und dieſe Formel, nebſt dem, was daraus folgt, hat man in den meiſten hydrauliſchen Schriften zum Grunde gelegt, in ſofern die Oefnungen geringe ſind. Man hat ſtatt derſelben auch nur $\frac{16}{100}cc = x$ geſetzt, wobey a als unendlich klein angenommen wird. Und dieſes iſt nun eben die Regel, daß das gerade aufſpringende Waſſer die Höhe des Falls erreiche, wovon aber immer mehr oder minder abgeht. Behält man aber die Bernoulliſche Formel ganz bey, ſo findet ſichs, daß die Geſchwindigkeit anfangs von o an zunimmt,

nimmt, bis ſie ihr maximum erreicht. Denn man ſetze darin $x = f - z$, ſo, daß z ſehr klein ſey, ſo verwandelt ſich die Formel in

$$\frac{16}{1000}cc = \frac{bbf}{bb - 2aa}\left(1 - \frac{z}{f} - \left(1 - \frac{z}{f}\right)^{bb:aa - 1}\right)$$

welches nach der Newtonſchen Binnomialformel, mit Weglaſſung von z^2, z^3 &c.

$$\frac{16}{1000}cc = \frac{bbf}{bb - 2aa}\left(\frac{bb}{aa} - 2\right)\frac{z}{f} = \frac{bbz}{aa}$$

giebt, welches mit dem Fall der Körper, wenn die Schwere in der Verhältniß von 1 zu $bb:aa$ gröſſer genommen wird, als ſie auf der Erdfläche iſt, übereinkömmt. Da aber bey gleicher Oefnung $E = a$, die Weite des Cylinders $AB = b$ ſo groß genommen werden kann als man will, ſo kann immer $\frac{bbz}{aa}$ und damit auch cc eine jede beliebige Gröſſe vorſtellen. Es iſt aber für ſich klar, daß dabey die Waſſertheilchen eine unendliche Flüßigkeit haben müſten, welche ſie aber allerdings nur in einem endlichen Grade haben. Abſtrahirt man indeſſen von ſolchen anfänglichen Abweichungen, ſo wie auch von andern bereits vorhin angemerkten, ſo thut die Bernoulliſche Formel der Sache noch immer am meiſten Genügen. Und da ſie für den Fall, wo $a = b$ iſt, ganz richtig iſt, für den Fall aber, wo $b:a = \infty$ iſt, von der Erfahrung nicht immer viel abweicht, ſo hat ſie den Vortheil, daß ſie bey gröſſern Oefnungen E der Wahrheit immer näher komme;

und für eben dieſe Fälle hatte man noch wenig zuverläßiges anders, als aus Erfahrung gefunden.

§. 240.

In der Art, wie die Bernoulliſche Formel gefunden worden, iſt noch verſchiedenes anzumerken: Einmal wird dabey des bereits heraus gefloſſenen Waſſers, deſſen Maſſe = b (f—x) iſt, keine Rechnung getragen, wei f erſt nach der Integration, wo es um die beſtändige Gröſſe zu beſtimmen zu thun iſt, in die Rechnung kömmt. Das heraus gefloſſene Waſſer wird demnach als gar nicht mehr zurückewirkend betrachtet, ſondern man ſieht nur auf den Tropfen, der durch E gedrängt wird. Dieſer wird nemlich allein noch ſeitwerts von den Wänden der Oefnung, und herunterwerts von dem Drucke des aufliegenden Waſſers gedrückt, und daher mit in die Rechnung gezogen. Sobald er aber aus der Oefnung heraus iſt, hört ſeine Zuſammenpreſſung ſeitwerts auf, und er fleußt mit ſeiner daher erlangten Geſchwindigkeit, welche ſodann noch von der Schwere vermehrt wird, gleichſam frey herunter. Auch kann es beſonders bey einem hohen Drucke und kleinen Oefnung geſchehen, daß ſich, wegen der ſich äuſſernden Schnellkraft, die Tropfen, gleich bey dem Ausflieſſen, verſprützen.

XII.

XII.
Zergliederung und Anwendung der Mayeriſchen Mondstafeln.

I. Vorläufige Betrachtungen.

§. 1.

Ungeachtet man ſich immer mehr bemüht, die Genauigkeit in der Aſtronomie bis auf einzelne Secunden zu treiben; ſo bleibt man doch noch in mehrern Stücken bey ganzen Minuten zurücke, und in einigen läßt ſichs in der That nicht wohl weiter gehen. Was man bey den Berechnungen zum Grunde legen muß, das ſind theils allgemeine Geſetze, theils wirkliche Beobachtungen: denn bloſſe Hypotheſen ſind ſchon ſo ziemlich aus der Aſtronomie verwieſen. Die Genauigkeit, die ſich von den Beobachtungen erwarten läßt, iſt ſehr ungleich. Sie hängen von der Schärfe des Auges, von der Güte der Inſtrumente, von der Geſchwindigkeit und Sorgfallt des Beobachters, von dem Zuſtande der Luft, und noch von mehrern zufälligen Umſtänden ab. Unter den Geſetzen iſt beſonders das Newtonſche Geſetz der Schwere, welches, überhaupt betrachtet, eine Tab. VIII. IX. X. XI.

geometriſche Genauigkeit zu haben ſcheint. Allein eben dieſes Geſetz macht, daß durch die Einwirkung der himmliſchen Körper in einander, unzählige kleine Anomalien in ihrer Bewegung entſtehen, die die Berechnung nicht wenig weitläuftig machen, deren Gröſſe nicht immer leicht durch Beobachtungen kann beſtimmt werden, und wovon auch noch dermalen nicht alle bekannt ſind. Zu mehrern wird eine lange Reihe von Beobachtungen, und eine Zeit von vielen Jahrhunderten erfordert, ehe ihre Wirkung zu einer bemerkbaren Gröſſe anwächſt.

§. 2.

Was man in der Aſtronomie beobachten kann, das ſind überhaupt nur zwey Stücke, nemlich Zeit und Winkel, oder Bögen. Ueber dieſe zwey Stücke ſtellt man unzählige Vergleichungen an, und der Erfolg iſt ungemein verſchieden. Die Genauigkeit der Zeit iſt, vermittelſt der Penduluhren, auf Secunden beſtimmt, und es laſſen ſich allenfalls noch halbe oder Viertel Secunden beobachten. Auf dieſe Art ſind Beobachtungen, die noch kleinere Zeittheilchen erfordern würden, vergebliche Arbeit, dafern ſich nicht, wie es bey der Beſtimmung der ſogenannten mittlern Bewegungen geſchieht, vom Gröſſern aufs Kleinere ſchlieſſen läßt. Wenn wir indeſſen bey einer Secunde bleiben, ſo iſt der Erfolg, den die Ungewißheit einer Secunde Zeit nach ſich ziehen

kann,

kann, ſehr verſchieden. So z. E. bey dem täglichen Umlaufe der Sonne giebt eine Secunde Zeit 15 Secunden eines Grades, und dieſes iſt auf guten Quadranten ein Raum, der von dem Faden bedeckt wird. Man kann demnach, wenn die Uhren zu richten ſind, auch aus dieſem Grunde nicht wohl weiter, als bis auf eine Secunde genau ſeyn. Hingegen nach dem jährlichen Laufe der Sonne kommen auf 1 Secunde Zeit nur 2½ Tertien eines Grades; und ſo läßt ſich aus der Zeit ſehr genau auf die Bewegung ſchlieſſen. Allein dieſe müſte voraus eben ſo genau feſte geſetzt ſeyn. Davon aber fehlt viel, wenn es andem iſt, daß ſich der Ort der Sonne kaum bis 5 oder 10 Secunden eines Grades beobachten läßt. Auch zeigt es ſich in den meiſten Beobachtungen der Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden, daß der Beobachter für halbe Stunden Zeit nicht gut ſtehen kann, und daher aus ſehr vielen Beobachtungen das Mittel nehmen muß. Bey dem Monde geht es ungefehr 13 mal genauer, weil derſelbe in einer Minute Zeit ungefehr 33 Secunden eines Grades durchläuft, welche allenfalls noch wohl zu beobachten ſind. Allein die unzähligen Anomalien in dem Mondlaufe verurſachen, daß man ſolche Beobachtungen erſt mit vieler Mühe auf die Berechnungen anwenden kann. Bey den obern Planeten, und beſonders bey Saturn, welcher bey 30 mal langſamer läuft als die Erde, wird die

Unzuverläßigkeit noch viel gröſſer, wenn man von dem beobachteten Orte deſſelben auf die Zeit ſchlieſſen will. Und doch müſſen ſolche Beobachtungen, bey Verfertigung der Tabellen, zum Grunde gelegt werden.

§. 3.

Man wird aus dieſen Betrachtungen leicht ſchlieſſen können, warum man ſehr viel erreicht zu haben geglaubt hat, als die Mayerſchen Mondstafeln den Ort des Mondes bis auf 1, oder höchſtens zwey Minuten genau angaben. Denn auſſer der Schwürigkeit, alle Anomalien zu beſtimmen, muſten Beobachtungen zum Grunde geleget werden, welche ſelbſt nicht viel zuverläßiger waren. Man kann auch überhaupt ſchlieſſen, daß in den aſtronomiſchen Tabellen, die Secunden mitgenommen werden, damit man von den Minuten um deſtomehr verſichert ſey, weil, wenn man die Secunden weglieſſe, beym Zuſammenrechnen eine oder mehrere Minuten fehlen könnten. Indeſſen hat La Caille die Sache noch weiter treiben, und den Lauf der Sonne bis auf Decimaltheile von Secunden beſtimmen wollen. Durch dieſe ſcheinbare Sorgfalt hat er ſeinen Tafeln ein Anſehn gegeben, als wenn ſie allen andern unendlich weit vorzuziehen wären. Allein die Decimaltheile von Secunden hätte er ganz füglich weglaſſen können, weil ſeine Tafeln noch lange nicht in ganzen Secunden richtig ſind.

ſind. Er ſetzt z. E. die gröſste Gleichung 1°.55′.31″$\frac{6}{10}$. aber wie, wenn ſie 1°.55′.44″ ſeyn müſste? Dieſes wäre nun nicht in Decimaltheilen von Secunden, ſondern beynahe $\frac{1}{4}$ Minute gefehlt. Herr **Mayer** hatte ſie zwar anfangs in ſeinen Tafeln nur 1°.55′.30″ angeſetzt; allein in dem dritten Bande S. 444 und 446 ſagt er, daſs er durch neuere Beobachtungen gefunden, daſs ſie 1°.55′.44″ ſeyn müſte; und ſo genommen, gebrauchte er ſie daſelbſt ſowohl zur Beſtimmung der Bahn des Mercurs, als auch fürnemlich zur Beſtimmung der Polhöhe der Göttingiſchen Sternwarte. Ich dächte immer, **Mayers** letztere Ausſage ſey der erſtern vorzuziehen, und ſeine Autorität in aſtronomiſchen Sachen übertreffe des **La Caille** ſeine ſehr merklich. Jedoch dürfte ich für partheyiſch angeſehen werden, wenn ich die Leſer auf die in dem erſten Theile der Beyträge zur Mathematik vorkommende **Theorie der Zuverläſsigkeit der Beobachtungen und Verſuche** verweiſe. Daſelbſt kömmt die Beſtimmung der Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden in Form eines Beyſpiels vor, und im §. 43 ſagte ich, daſs daraus die gröſte Gleichung 1°.55′.43″ gefunden werde. Ja, beym nochmaligen Nachrechnen, wo ich alle Kleinigkeiten mitnahm, brachte ich die 1°.55′.44″ ganz nett heraus. Der Grad der Zuverläſsigkeit dieſer Beſtimmung, läſst ſich aus der daſelbſt unterſuchten

Zuverläßigkeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden des Jahrs 1712 beurtheilen. Dieſe ſind in die 50 mal zuverläßiger und genauer beſtimmt, als wenn jede unmittelbar durch die Beobachtung wäre heraus gebracht worden. Ich werde demnach, ohne Bedenken, im folgenden die gröſte Gleichung 1°.55′.44″ ſetzen, und von den Decimaltheilchen von Secunden abſtrahiren, weil eine allzuſehr geſuchte Genauigkeit doch nur blendet, im Grunde aber eine bloſſe Einbildung iſt.

§. 4.

Die Mayerſchen Mondstafeln ſind, ſo viel ich vernommen, nicht ohne Anfechtung geblieben. Man hat in Frankreich andere berechnet, und zwar ſeitdem die Mayerſchen durch den Druck bekannt gemacht ſind. Denn vorher wuſte man nicht, was man eigentlich zu ſuchen hatte. Da man es aber nachher wuſte, ſo hieß es auch, **Mayer** habe verſchiedenes bloß empiriſch gefunden, wofür er nach der Theorie nicht gut ſtehen konnte. Man fügte noch bey, daß ſeine Tafeln bereits anfiengen von dem Himmel abzuweichen, und mit der Zeit einer Verbeſſerung bedürfen, auch in England ſey man nicht mehr ganz damit zufrieden ꝛc. Ich will nicht unterſuchen, ob gewiſſe Affecten, die bey Ausländern gegen Deutſche noch ſehr gewöhnlich ſind, dieſe Beſchuldigung veranlaßt haben. Allein **Mayer** hätte mehr Anſpruch

ſpruch auf Erkänntlichkeit verdient, und allem Anſehen nach, wird erſt die Nachwelt billiger ſeyn müſſen. Allerdings ſagte er ſelbſt, daß er eine oder die andere Beſtimmung nicht aus der Theorie, ſondern aus den Beobachtungen gefunden. Allein **Kepler** fand ſeine Geſetze nicht anders, und man iſt ihm immer dafür verpflichtet, weil er auf dieſe Art dem **Newton** vorgezeigt, wohin dieſer ſeine Theorie lenken ſolle. Könnte es nicht mit **Mayern** eben ſo gehen? Ja, da heiſt es, ſeine Tafeln fangen ſchon an von den Beobachtungen abzugehen; allein genauer betrachtet, gehen vermuthlich dieſe von jenen ab: denn es braucht viel dazu, wenn man in den Beobachtungen des Mondes keine Minute Zeit fehlen will. Man darf nur Beobachtungen von Finſterniſſen, die z. E. zu Paris von verſchiedenen Aſtronomen zugleich beobachtet worden, gegen einander halten, ſo finden ſich öfters noch beträchtlichere Unterſchiede.

§. 5.

Es iſt aber endlich ſo ſchwer nicht, die Zuverläßigkeit der Mayerſchen Tafeln zu prüfen. Die Sache betrift theils die mittlere Bewegung, theils die Gleichungen, wodurch der mittlere Ort des Mondes in den wahren verwandelt wird. Dieſe zweyerley Stücke ſind von einander unabhängig. Die mittlere Bewegung hat **Mayer** aus den Beobachtungen

jeder

jeder Jahrhunderte dergeſtalt beſtimmt, daß ſie, dafern nicht der Lauf des Mondes verrückt wird, für die nächſten Jahrhunderte ganz gewiß gut ſeyn wird. Die Gleichungen ſind ſämtlich periodiſch, und treffen gröſtentheils nach 18 Jahren wiederum zuſammen, da ſie in dem Verlauf dieſes Zeitraumes alle mögliche Abwechslungen unter ſich haben. Wären ſie demnach ſehr merklich irrig, ſo müſte auch der Fehler ſich in jeden 18 Jahren auf mehrere Arten zeigen; allein Mayer hat uns darüber in Sicherheit geſetzt. Er lieferte eine Tafel aller beobachteten Finſterniſſen von 1610 bis 1753, und ſeine Mondstafeln treffen mit allen gleich gut überein. Die Fehler ſind ohne Unterſchied bald poſitiv, bald negativ, und laſſen ſich, ohne Bedenken, und gröſtentheils auf die Beobachtungen ſelbſt ſchieben, weil dieſe eben auch nicht allemal bis auf eine Minute richtig ſind. Nun iſt von 1610 bis 1753 ein Zeitraum von 143 Jahren, welches beynahe ſechs mal 18 Jahre ſind. In dieſem Zeitraume haben ſich alle Combinationen der einzeln Anomalien dergeſtalt eingefunden, daß wenn in den Gleichungen, ſo Mayer angegeben, merkliche Fehler wären, ſie ſich ſehr ofte müſten eingefunden haben. Man kann daher ſicher ſchlieſſen, daß, wenn der Mond nicht verrückt wird, die Mayerſchen Tafeln noch in den nächſten 143 Jahren ſo gut ſeyn werden, als ſie es in den nächſt verfloſſenen 143 Jahren waren. Sie kamen 1753

heraus,

heraus, und die neueſten Beobachtungen von Finſterniſſen treffen, ſo viel ich ſie damit verglichen habe, noch ſo gut ein, daß man für die Fortdauer ihrer Güte nicht beſorgt ſeyn darf.

§. 6.

Mayer, welcher, in Abſicht auf den Mond, eine ungleich ſchwerere Arbeit, als **Kepler**, ſein Landsmann, in Abſicht auf die Planeten, übernommen, war entſchloſſen, die ganze Methode, wie er ſeine Tafeln berechnet, bekannt zu machen, als ſie von Göttingen aus nach England geſchickt worden, weil ſie verdienten, des Anſpruchs auf den Preiß wegen der Länge zur See, würdig erfunden zu werden. Die 3000 Pfund Sterling wurden denſelben zuerkannt, aber die Methode, welche doch viele wichtige Kunſtgriffe enthalten muß, iſt, ſo viel ich weiß, noch dermalen nicht bekannt gemacht. Eben ſo bleibt auch noch eine Gleichung ungedruckt, welche **Mayer** nachſchickte, und wodurch ſeine Tafeln noch genauer gemacht werden. Da ich dieſes zuverläßig weiß, ſo muß es ein Mißverſtand ſeyn, wenn vorgegeben wird, als hätte **Bradley** eine ſolche Gleichung gefunden, und dadurch die Mayerſchen Tafeln noch vollkommener gemacht. Ich dächte doch, **Mayer** ſollte, beſonders nach ſeinem Tode, von allem verkleinerlichen

um

um ſo mehr unangefochten bleiben, da er ſich ſelbſt nicht mehr rechtfertigen kann.

§. 7.

Da wir alſo die Mayerſchen Tafeln ſchlechthin nur ſo haben, wie ſie in dem zweyten Bande der Göttingiſchen Commentarien heraus gekommen, ſo ſind ſie auch gleichſam das einige Datum, und ſie müſſen ſo, wie ſie ſind, zergliedert werden, wenn man ihre innere Einrichtung kennen, und noch andere Vortheile daraus ziehen will, die vielleicht **Mayer** ſelbſt auch würde daraus gezogen haben, wenn er länger bey Leben geblieben wäre. Ich werde nun das, was ich darüber gefunden und zu gewiſſen Abſichten angewandt habe, hier vortragen. Man wird daraus ſehen, daß es ein leichtes geweſen wäre, die Zergliederung, die ich vorgenommen, zu unterdrücken, den Mayeriſchen Tafeln eine neue Geſtalt zu geben, etwas Theorie mit einzumengen, und ſodann der Welt aufzubürden, als wenn ich die Sache a priori gefunden, und noch viel beſſer in Ordnung gebracht hätte. Vielleicht haben einige ſo verfahren. Ich habe aber nie geglaubt, daß fremde Federn gut zieren, und ſo werde ich das Verfahren ganz herſetzen.

II. Die

II. Die mittlere Bewegung.

§. 8.

Die mittlern Bewegungen müſſen ſehr genau beſtimmt werden, weil man fürnehmlich durch dieſelbe im Stand geſetzt werden muß, auf die ſpäteſte Zeiten hinaus zu rechnen. Allein eben dieſe Genauigkeit iſt nicht wenig ſchwer, weil die mittlern Bewegungen erſt aus der beobachteten wahren herleiten, und wenn man es noch genauer treffen will, die wahren vorerſt in mittlere verwandeln muß. Um aber dieſe Verwandlung vorzunehmen, müſte man die Anomalien kennen; dieſe können aber erſt dann genauer beſtimmt werden, wenn man die mittlere Bewegung gefunden hat. Es ſind demnach beyde in einer ſolchen gegenſeitigen Abhänglichkeit, daß man beyde zugleich finden muß, wenn man ſie genau haben will. Dieſes kann nun nur durch eine Art von Approximation geſchehen, wodurch die Sache anfangs überhaupt, und dann immer näher beſtimmt wird. Es laſſen ſich zwar kürzere Methoden gedenken, allein ſie ſetzen ſolche ausgewählte Beobachtungen voraus, die man bisher weder hat, noch auch künftig alle wird haben können. Man fängt gemeiniglich an, die älteſten Beobachtungen mit den neuern zu vergleichen, weil auf dieſe Art die

beyd-

beydſeitigen Fehler auf einen deſto längern Zeitraum vertheilt, und damit auch erſt in ſehr ſpäten Jahren wiederum merklich werden. Allein, da die älteſten Beobachtungen nicht ſehr genau ſind, ſo werden die daraus gezogenen Schlüſſe deſto unzuverläßiger. Eine Finſterniß kann auch an und für ſich ſchon 18 Stunden früher oder ſpäter eintreffen, als es der mittlern Bewegung nach geſchehen würde, und ſo könnte es leicht geſchehen, daß, wenn man zwo Finſterniſſe mit einander vergleicht, der Zwiſchenraum der Zeit bis auf 36 Stunden zu groß oder zu klein heraus kömmt. Ein ſolcher Fehler, wenn er auch auf einen Zeitraum von 30000 Neumonden vertheilt wird, bringt dennoch für jeden Neumond einen Fehler von 3 Secunden herfür. Ueberdies wird dabey vorausgeſetzt, daß die mittlere Bewegung beſtändig gleich ſey. Daran aber hat man bereits angefangen zu zweifeln, wiewohl man ſo viel weiß, daß, wenn auch eine Ungleichheit da iſt, ſie ſo gering iſt, daß ſie noch zur Zeit kaum bemerkt werden kann. Herr **Mayer** ſetzt ſie für 300 Jahre auf $1\frac{1}{3}$ Minute, oder da ſie wie das Quadrat der Zeit zunehmen ſoll, für 2400 Jahr auf $1^{\circ}.4'.19''$. Allein eben dieſes macht ſie ſehr zweifelhaft. Denn vor 300 Jahren, wo **Purbach**, **Regiomontanus** ꝛc. beobachteten, konnte man für eine Minute nicht gut

ſtehen,

ſtehen, weil es noch dermalen bey ungleich beſſern Inſtrumenten nicht angeht. Und vor 2400 Jahren beobachteten die Chaldäer, und zwar ſo, daß ſie für ganze Grade nicht gut ſtehen konnten.

§. 9.

Da indeſſen, aller Schwürigkeiten ungeachtet, Herr **Mayer** ſeine Tafeln bis auf einzelne Minuten zur Richtigkeit gebracht hat, ſo wäre ſehr zu wünſchen, daß man ſich in England gefallen lieſſe, die Methode, nach welcher er die Sache angegriffen, durch den Druck bekannt zu machen, weil ſie, wie ich bereits erwähnt habe, ſolche Kunſtgriffe enthalten muß, die er, wie er ſelbſt ſagt, nach vielen vergeblichen Verſuchen gefunden, und, die allem Vermuthen nach, auch in andern Fällen, mit Vortheil würden gebraucht werden können. In Ermanglung deſſen, und da ich nicht geſonnen bin, bereits angeſtellte Verſuche nochmals zu widerholen, oder mit andern Methoden die Probe zu machen, werde ich die von **Mayern** herausgebrachten mittlern Bewegungen, mit denen vergleichen, ſo von andern Aſtronomen gefunden worden. Es durchläuft demnach in 1000 Julianiſchen Jahren

	Die Sonne.					ihr Apogaeum					das Aequinoct.				
Nach	z	ſ	°	′	″	z	ſ	°	′	″	z	ſ	°	′	″
Kepler	1000	0	7	33	24	0	0	17	7	7	0	0	14	10	0
Halley	1000	0	7	35	20	0	0	16	51	7	0	0	13	53	20
La Caille	1000	0	7	39	16	0	0	18	11	40					
Mayer	1000	0	7	37	47	0	0	17	30	0	0	0	14	3	20

	Der Mond.					ſein Apogaeum.					ſein Nodus.				
Nach															
Kepler	12367	6	18	8	30	113	0	12	22	41	53	8	21	51	7
Halley	12367	6	18	24	10	113	0	11	52	30	53	8	21	52	30
Mayer	12367	6	18	43	20	113	0	11	52	30	53	8	21	52	30

Dieſe Beſtimmungen ſind für einen Zeitraum von 1000 Jahren nicht ſehr verſchieden, und beſonders ſcheint es, daß Mayer es bey der Halleyſchen Beſtimmung der Bewegung des Apogaeum und des Knoten des Monden habe bewenden laſſen. Hingegen ſetzt Mayer den Lauf des Mondes ſelbſt um etwas geſchwinder, ſo wie Halley ihn geſchwinder ſetzt als Kepler. Mayer und Halley ſchienen überhaupt geneigt, anzunehmen, daß die Bewegung des Mondes ehemals langſamer geweſen. Kepler hingegen ſcheint bey ſeinen Tafeln beſonders auf das Jahr 3993 vor Chriſti Geburt, und zwar auf den 24. Julii dieſes Jahres geſehen zu haben, auf welchen er den Anfang der Welt ſetzt, und alle ſeine Zahlen, wenigſtens ſo viel es ſich thun lieſſe, auf dieſen Tag einrichtet, wie er denn auch, in Abſicht auf den Lauf der Sonne und des Monds, eine centrale Sonnenfinſterniß heraus bringt, und bey jeden Planeten beſondere

ſondere Merkwürdigkeiten findet. Dabey mengt ſich aber viel aſtrologiſches mit ein, dem zu lieb Kepler wohl könnte die Umſtände ein wenig anders eingerichtet haben, als ſie in der That waren. Indeſſen ſehe ich doch, daß er Anſtand nahm, den Ort einiger Planeten um mehrere Grade zu verrücken, um ſie in den Anfang eines himmliſchen Zeichens zu bringen; wo es aber nur ein oder zwey Grade betraf, da ſcheint er es ohne Bedenken gethan zu haben. Man kann aber auch zugeben, daß es für einen Zeitraum von 5000 bis 6000 Jahren eine Kleinigkeit iſt.

§. 10.

In den Rechnungen, die ich über die Mayerſchen Mondstafeln angeſtellt, habe ich, was die mittlere Bewegung betrift, des La Caille Sonnentafeln gebraucht, die gröſte Gleichung der Sonne aber 1°. 55′. 44″ angenommen. Es war fürnehmlich die Frage, Sonne und Mond, in Abſicht auf die Finſterniſſe, mit einander zu vergleichen. Ich berechnete demnach zween mittlere Vollmonde, welche um 10000 Monde von einander entfernt waren. Dieſe waren alten Calenders

	St.	′	″		St.	′	″
A°. 2436. Jul. 12.	12	32	2	1628 Jan. 10.	15	8	2

Und da findet ſich der Ort

	ſ	°	′	″		ſ	°	′	″
der Sonne ;	4	7	20	32	- - -	9	29	54	20
des Apog. ☉	3	21	7	33	- - -	3	6	24	56
Anom. med. ☉	0	16	13	0	- - -	6	23	29	24
des Mondes	10	7	20	32	- - -	3	29	54	20
des Apog. ☽	0	28	24	50	- - -	8	8	53	30
Anom. med. ☽	9	8	55	42	- - -	7	21	0	49
des ☊ ; ;	10	20	56	10	- - -	3	28	54	33
Arg. latit. ;	11	16	24	22	- - -	0	0	59	47

§. 11.

Auf dieſe Art gebraucht es für einen Zeitraum von

Monden	Jahre	Tage	St.	′	″
10000	808	138	21	24	0
1000	80	310	14	8	24
100	8	31	1	24	50
10	0	295	7	20	29
1	0	29	12	44	3

jede Jahre zu 365 Tagen, 6 St. gerechnet.

§. 12.

Sodann durchläuft während den 10000 Neumonden

	z	ſ	°	′	″
Die Sonne	808	6	7	26	14
Anom. ☉	808	5	22	43	37
Der Mond	10808	6	7	26	14
Anom. ☽	10717	1	17	54	54
Arg. latit.	10851	11	15	24	37
Apog. ☉	0	0	14	42	37
Apog. ☽	91	4	19	31	20
☊ ; ; ;	43	5	7	58	23 rückwerts.

§. 13.

§. 13.

Dieſes giebt, wenn man die ganzen Circul weglåßt, für

Neum.	Arg. lat.	☉	Anom. ☉	nom. ☽
10000	11 15 24 37	6 7 26 14	5 22 43 37	17 54 54
1000	2 10 32 28	10 6 44 37	10 5 16 2	8 16 47 29
100	6 7 3 15	1 0 40 28	1 0 31 ·	2 1 40 45
10	10 6 42 20	9 21 4 2	9 21 3 9	8 18 10 4
1	1 0 40 14	0 29 6 24	0 29 19	0 25 49 0

oder für jeden Neumond noch genaue

	ſ	°	′	″
Arg. latit.	1	0	40	13, 477
☉ . .	0	29	6	24, 2774
Anom. ☉	0	29	6	18 9817
Anom. ☽	0	25	49	9 4494.

§. 14.

Da nun ferners nach 223 358 und 3445 Neumonden die Finſterniſſe wiederkehren, ſo findet ſichs für

Neum.	Arg. latit.	Anom. ☽
223	— 0 0 28 9, 6629	11 27 8 40, 2162
358	+ 6 0 3 13, 2766	8 2 24 40, 8852
3445	+ 6 0 0 49, 8265	0 18 50 48, 1830

ingleichen

	☉	Anom. ☉
223	0 10 48 13, 8602	0 10 28 32, 9191
358	11 10 12 51, 3092	11 9 41 15, 4486
3445	6 12 43 55, 6430	6 7 39 51, 9565

§. 15.

Die Zeit aber für dieſe Neumonde iſt

Neumonde	Jahr	Tage	St.	′	″
223	18	10	19	42	47
358	29	344	22	49	20
445	278	193	9	6	44½

Und daey iſt

$$445 = 223 + 9 \cdot 358$$

ſo, daß zu 9 Perioden von 358 Neumonden noch eine von 223 Neumonden hinzukommen muß, um die gröſſere Periode von 3445 Neumonden auszumachen, welche in Abſicht auf das Argumentum latitudinis nur um 50 Secunden von 6890 halben Circuln verſchieden iſt, und wie ich in der Beſchreibung der eccliptiſchen Tafel bereits angemerkt habe, zwiſchen den Kepleriſchen und Mayeriſchen Tafeln das Mittel hält.

§. 16.

Um nun dieſe Perioden bequem gebrauchen zu können, ſo habe ich einige Neumonde aufgeſucht, bey welchen das Argumentum latitudinis ſo klein war als es ſich finden lieſſe, damit ſie als Epochen zum Grunde gelegt werden konnten. Von dieſem war der eine, nach den alten Calender,

1759.

		St.	′	″
1759. Dec.	7	18	52	59

und der Ort

	ſ	°	′	″
der Sonne	8	27	33	28
des Apog. ☉	3	8	48	56
Anom. med. ☉	5	18	44	32
des Monds	8	27	33	28
Apog. ☽ . .	7	6	26	55
Anom. med. ☽	1	21	6	33
des ☊ . . .	2	27	34	26
Arg. latit. .	5	29	59	1

Der Mond war demnach nach ſeiner mittlern Bewegung nur 59″ vor dem ☋. Der andere Neumond fand ſich

		St.	′	″
2038. Jun.	18	15	59	43

und der Ort

	ſ	°	′	″
der Sonne .	3	10	17	24
des Apog. ☉	3	13	53	0
Anom. med. ☉	11	26	24	24
des Monds	3	10	17	24
Apog. ☽ . .	1	0	20	2
Anom. med. ☽	2	9	57	22
des ☊ . . .	3	10	17	31
Arg. latit. . .	11	29	59	53

hier war demnach der Mond nur 7″ vor dem ☊.

§. 17.

Dieſe zween Neumonde können nun, in Abſicht auf die vorbemeldte Perioden von 223,

358, 3445 Monden, zum Grunde geleget werden, wie ſie dann in der That auch um einen Zeitraum von 3445 Monden von einander verſchieden ſind. Man wird dadurch lauter Neumonde finden, die von dem ☊ oder ☋ kaum um etliche Minuten entfernt ſind. Ich habe ſie in der erſten Tabelle vorgeſtellt. Sie geht von Anno 747 vor Chriſti Geburt bis auf 2566 nach Chriſti Geburt, und enthält in der

1 Columne die laufende Jahre.
2 - - - das Arg. latit. oder die Entfernung des mittleren Neumondes vom ☊ oder ☋.
3 - - - die Zeit des Neumondes vom Anfange des Jahres an gerechnet.
4 - - - eben dieſe Zeit vom Ende des Jahres an gerechnet.
5 - - - der mittlere Ort der ☉ und des ☽.
6 - - - die Anomal. med. ☉.
7 - - - die Anomal. med. ☽.

§. 18.

In Abſicht auf die dritte und vierte Columne iſt anzumerken, daß ſie die Zeit nach dem Julianiſchen oder alten Calender vorſtellen, weil dieſer Calender in einem fortgeht. Sodann habe ich dabey das Jahr durchaus zu 365 Tage 6 Stunden gerechnet, um die Verwirrung wegen der Schalttage zu vermeiden.

Dieſe

Dieſe Einrichtung, die für aſtronomiſche Rechnungen viele Bequemlichkeiten hat, habe ich bereits in der eccliptiſchen Tafel beſchrieben, und werde demnach hier nur ſo viel anmerken: Man ſieht leicht, daß es auf die Einſchaltung von 6, 12, 18 Stunden ankömmt, die zwiſchen den Schaltjahren vorgenommen werden muß. Es fängt demnach das erſte Jahr auf dem Mittag eines jeden Schaltjahrs nach dem Pariſiſchen Meridiano und Julianiſchen Calender an, und endigt ſich 18 Stunden vor dem Ende des Schaltjahrs, oder den 31ſten Chriſtmonats Abends um 6 Uhr, wo das folgende anfängt; dieſes endigt ſich den 31ſten Dec. des folgenden Jahrs um Mitternacht. Das dritte fängt demnach zugleich mit dem bürgerlichen Jahre, ſo das zweyte nach dem Schaltjahr iſt, an; und endigt ſich im dritten Jahr nach den Schaltjahr den 1ten Jenner Morgens um 6 Uhr, wo das vierte anfängt, und ſich im Mittage des folgenden Schaltjahrs endigt. Dieſe Anfänge ſind demnach z. E.

1760 den 1. Jan. Mittags.
1760 den 31. Dec. Abends um 6 Uhr.
1761 den 31. Dec. Abends um Mitternacht.
1763 den 1. Jan. Morgens um 6 Uhr.
1764 den 1. Jan. um Mittag.
 ꝛc.

§. 19.

Um nun von dieſen Anfängen an die Tage fortzuzählen, habe ich durchaus den Hornung

zu 29 Tagen gerechnet, und damit dieſen Jahren die Form von Schalt-Jahren gegeben. Man könnte ſie abgeglichene Jahre, anni aequati, nennen, ich werde aber, da ich mich einmal daran gewöhnt habe, bey der Schaltjahrform, forma biſſextili, bleiben. Um nun die Reduction leicht vorzunehmen, habe ich in der dritten Tafel die 366 Tage eines Schaltjahrs nach den Monaten vertheilt, wo für jeden Tag eines jeden Monats ſogleich kann gefunden werden, der wievielte Tag derſelbe vom Anfang des Jahrs her iſt; und hinwiederum, wenn ein Tag vom Anfang des Jahrs an gerechnet gegeben iſt, welcher Tag und für welchen Monat er ſey.

§. 20.

Iſt nun das Jahr ein Schaltjahr, ſo geht dieſes ohne fernere Reduction an. In den übrigen Jahren aber muß eine Reduction vorgenommen werden, die von dem 24ſten Hornung, als dem Schalttage herrührt. Die Jahre nach dem Schaltjahr ſeyn 1, 2, 3. Iſt nun

1°. ein gemeines Jahr auf die Biſextilform zu bringen, ſo werden

in dem	vor dem 24. Febr.	nach dem 24. Febr.
1. Jahr	18 St. addirt,	6 St. ſubtrahirt,
2. Jahr	12 St. addirt,	12 St. ſubtrahirt,
3. Jahr	6 St. addirt,	18 St. ſubtrahirt.

2°. Iſt

2°. Iſt aber die Biſſextilform auf gemeine Jahre zu reduciren, ſo werden nach dem Schaltjahr

in dem	vor dem 24. Febr.	nach dem 24. Febr.
1. Jahr	18 St. ſubtr.	6 St. addirt,
2. Jahr	12 St. ſubtr.	12 St. addirt,
3. Jahr	6 St. ſubtr.	18 St. addirt.

§. 21.

So z. E. haben wir vorhin die zween Neumonde (§. 16)

			St.	′	″
1759.	Dec.	7	18	52	59
2038.	Jun.	18	15	59	43

gefunden, und dieſe ſollen auf die Biſſextilform reducirt werden; ſo muß man nach den erſtgegebenen Regeln von dem erſten 18 Stunden, von dem andern 12 Stunde ſubtrahiren: denn beyde fallen nach dem 24ſten Hornung; und 1759 iſt das dritte, 2038 aber das zweyte Jahr nach einem Schaltjahre. Dieſes giebt

1759.	Dec.	7	0	52	59
2038.	Jun.	18	3	59	43.

Und demnach, wenn man dieſe Tage in der dritten Tafel nachſchlägt, die Tage vom Anfang des abgeglichenen Jahrs

	T.	St.	′	″
1759.	342	0	52	59
2038.	170	3	59	43

und ſo kommen ſie auch in der erſten Tafel vor.

§. 22.

§. 22.

Dieſe Reductionsart hat den Vortheil, daß man dadurch die Jahre und Tage addiren und ſubtrahiren kann, ohne ſich um das Nachrechnen der Schalttage Mühe zu geben. Um z. E. zu finden, wie viele Zeit zwiſchen dieſen Neumonden verfloſſen, darf man ſie nur von einander abziehen, ſo wird man

279 Jahr weniger 171 T. 20 St. 53′ 16″

oder das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen gerechnet

278 Jahr, 193 T. 9 St. 6′ 44″

Eben ſo haben wir oben (§. 10) die zween Vollmonde

		St.	′	″
2436. Jul.	12	12	32	2
1628. Jan.	10	15	8	2

Da nun dieſes Schaltjahre ſind, ſo giebt die dritte Tabelle unmittelbar

Jahre	Tage	St.	′	″
2436	194	12	32	2
1628	10	15	8	2
808	183	21	24	0

den Zeitraum der 10000 Neumonde (§. 11)

§. 23.

Die in der erſten Tafel angezeichneten Jahre haben nun ſämtlich die erſtbeſchriebene Biſſextilform, damit man, ohne auf die Schalttage zu ſehen, zu jedem darin vorkommenden Neumonde ſo viel folgende hinzurechnen könne, als

als man verlangt. Die Verwandlung in gemeine Jahre wird ſodann nach den erſtgegebenen Regeln (§. 20) vorgenommen. So z. E. findet man in der Tafel den Neumond

1788. 321 T. 17 St. 14′ 19″

Da dieſes ein Schaltjahr iſt, ſo giebt die dritte Tafel unmittelbar

1788. Nov. 16 17 St. 14′ 19″

Der nächſtfolgende Neumond in der Tafel iſt

1817. 301 T. 10 St. 31′ 38″

Hier müſſen 6 Stunden ſubtrahirt werden, weil 1817 das erſte Jahr nach dem Schaltjahr und der 301ſte Tag nach dem 24ſten Hornung iſt. Demnach

1817. 301 • 4 • 31 • 38

welches in der dritten Tafel giebt

1817. Oct. 27. 4 • 31 • 38

Eben ſo findet ſich der Neumond

1702. 17. 9 • 14 • 20

hier müſſen 12 Stunden addirt werden; und dies giebt

1702. Jan. 17. 21 • 14 • 20.

§. 24.

Auf dieſe Art laſſen ſich alle mittlere Neumonde, ſo in der erſten Tafel vorkommen, auf die gemeine Art, die Jahre und Tage zu zählen, reduciren. Es iſt mittlere Zeit alten Calenders nach dem Pariſer Meridian. Es ſind laufende Jahre, Monate und Tage, und

die

die Tage werden vom Mittage an gerechnet, ſo, daß z. E. der letzte Neumond im vorhergehenden Abſatze 21 St. 14 Min. 20 Sec. nach dem Mittage des 17ten Jenners 1702, demnach auf den 18ten Jenner Vormittags um 9 Uhr 14 Min. 20 Sec. fällt.

§. 25.

Um aber jede andere Neumonde zu finden, ſo habe ich die zweyte Tafel berechnet, welche der Ordnung nach 358 Neumonden enthält, die vom Mittage des erſten Jenners des erſten Jahrganges an gerechnet werden. In dieſer Tafel findet ſich in der

1. Columne die Anzahl der Neumonde.
2. - - - das Arg. lat. für die Neumonde, die eccliptiſch ſeyn können.
3. - - - die Anzahl der Tage, Stunden ꝛc. ſo bis auf jeden Neumond verflieſſen.
4. - - - die mittlere Bewegung der ☉ Neumond zu Neumond.
5. - - - die Anomalie der Sonne, wie ſie von Neumond zu Neumond anwächſt.
6. - - - die Anomalie des Mondes, wie ſie von Neumond zu Neumond anwächſt.

§. 26.

Vermittelſt dieſer Einrichtung, die ich bereits in der eccliptiſchen Tafel nach den Kepler-ſchen

ſchen Tafeln angegeben habe, laſſen ſich auf die daſelbſt umſtändlich beſchriebene Art jede mittlere Neumonde berechnen. Man nehme ein beliebiges Jahr z. E. 1772, ſo ſucht man in der erſten Tafel unter den in der erſten Columne ſtehenden Jahren das nächſtvorhergehende auf, welches in dieſem Fall 1759 iſt. Dabey findet ſich der Neumond, welcher 1759

342 T. 0 St. 52′ 59″ nach dem Anfang,

oder

23 = 5 = 7 = 1 = vor dem Ende des

Jahrs eintrift, und von welchem an fortgezählt werden kann. Man kann dabey nach Belieben die eine oder die andere dieſer Beſtimmungen gebrauchen. Um aber das Fortzählen zu erſpahren, ſo zieht man das Jahr 1759 von 1772 ab, und es bleiben 13.

§. 27.

Gebraucht man nun die Tage **vom Ende** des Jahrs; ſo wird der dreyzehnte Jahrgang in der zwoten Tafel aufgeſucht, und die erſtgefundene Tage vom Ende des Jahrs

23 T. 5 St. 7′ 1″

werden von den in bemeldtem dreyzehnten Jahrgang ſtehenden Neumonden

No. 150	46 T.	14 St.	7′	16″
151	76 =	2 =	51 =	19
152	105 =	15 =	35 =	21
ꝛc.				

abgezogen, damit bleibt

23 T. 9 St. 0′ 15″
52 ⸗ 21 ⸗ 44 ⸗ 18
82 ⸗ 10 ⸗ 28 ⸗ 20
ꝛc.

welches, da das Jahr 1772 ein Schaltjahr iſt, nach der dritten Tafel ſogleich

1772. Jan. 23 T. 9 St. 0′ 15″
Febr. 21 ⸗ 21 ⸗ 44 ⸗ 18
Mart. 22 ⸗ 10 ⸗ 28 ⸗ 20
ꝛc.

giebt. Und auf dieſe Zeitpuncten fallen die mittlere Neumonde im Jahr 1772. Man findet aber, wenn man aus der erſten Tafel die Tage vom Ende des Jahrs gebraucht, eigentlich die Neumonde, welche dem in der erſten Tafel angezeichneten vorhergehen; oder, beſſer zu ſagen, die ſo auf die erſten Monate des Jahrs fallen. Und damit reicht man nicht immer bis auf die letzten Monate. So z. E. iſt in dem dreyzehnten Jahrgange der letzte Neumond

341 T. 21 St. 27′ 45″
hievon 23 ⸗ 5 ⸗ 7 ⸗ 1
abgezogen, bleibt
318 ⸗ 16 ⸗ 20 ⸗ 44
oder nach der dritten Tafel
Nov. 13 ⸗ 16 ⸗ 20 ⸗ 44

Da nun hiebey noch der Neumond des Chriſtmonats zurücke bleibt, ſo geht man in den folgenden vierzehnten Jahrgang, und addirt zu dem

dem erſten Neumond deſſelben

6 T. 4 St. 11′ 48″

die in der erſten Tafel bey 1759 ſtehenden Tage vom Anfang des Jahrs

342 : 0 : 52 : 59

und ſo erhält man

348 : 5 : 4 : 47

oder nach der dritten Tafel

Dec. 13 : 5 : 4 : 47

welches der letzte Neumond 1772 iſt.

§. 28.

Sucht man aber für ein fürgegebenes Jahr nur die Neumonde, welche entweder eccliptiſch ſind, oder wenigſtens ſeyn können; ſo nimmt man aus den Jahrgängen der zweyten Tafel auch nur diejenigen Neumonde, bey welchen das Argumentum latitudinis angezeichnet ſteht.

§. 29.

Da man aber, beſonders für die eccliptiſchen Neumonde, um ſie ſodann genauer zu berechnen, auch die übrigen Columnen der beyden erſten Tafeln gebrauchen muß, ſo werden die in dieſen Columnen befindlichen Zahlen immer additiv genommen, und bey den Summen die ganzen Circul weggeworfen. Insbeſondere aber ſteht bey den Argumentis latitudinis das Zeichen + oder —, welches an ſich ſchon anzeigt, wie die Zahl genommen werden ſolle. Es ſey z. E. die groſſe Sonnenfinſterniß Anno

1706 aufzuſuchen, ſo ſteht die ganze Rechnung für den mittlern Neumond folgendermaſſen:

	arg. latit.	Tage v. Anf. des Jahrs.	☉	anom. ☉	anom. ☽
1706	′ ″				
1702	☋ — 7 25	17 9 14 20	10 7 7 45	6 29 22 1	9 16 17 11
4					
+ 1/5	☋ + 5 32 19	104 2 52 34	3 12 34 27	3 12 39 46	9 18 17 24
	♌ + 5 24 54	121 12 6 54	1 19 47 12	10 11 56 47	7 10 34 35

\+ 12 wegen der Biſſextilform

122 0 6 54

May 1 0 6 54

Da man hier aus der erſten Tafel bey 1702 die Tage vom Anfang des Jahrs gebraucht, ſo wird nicht der vierte, ſondern der fünfte Jahrgang genommen.

§. 30.

Für die Sonnenfinſterniß 1769 iſt

	arg. lat.	Tage v. Ende des Jahrs	☉	anom. ☉	anom. ☽
1769	′ ″				
1759	☋ — 0 59	23 5 7 1	8 27 33 27	5 18 44 32	1 21 6 33
10	☊ — 11 32 48	167 19 53 40	5 15 29 20	5 15 19 1	4 20 33 52
	♌ — 11 33 47	144 14 46 39	2 13 2 47	11 4 3 33	6 11 40 25

\+ 6 wegen der Biſſextilform

142 20 46 39

May 24 20 46 39

Bey dieſen Rechnungen iſt anzumerken, daß der niederſteigende Knote ☋ allemal für ſechs Zeichen oder ½ Circul anzuſehen iſt, und daher ☊ + ☋ = ☋ und ☋ + ☋ = ☊ macht.

§. 31.

§. 31.

Sind hingegen Vollmonde aufzuſuchen, ſo ſucht man den nächſtvorhergehenden, oder den nächſtfolgenden Neumond, und addirt oder ſubtrahirt für die

Zeit - -	14 T.	18 St.	22′	1″
Arg. latit. ☋ +		15°	20′	7″
⊙ - - -		14 -	33 -	12
Anom. ⊙ - - -		14 -	33 -	9
Anom. ☽	6 -	12 -	54 -	30

§. 32.

Die eccliptiſche Vollmonde finden ſich zwar in der zweyten Tafel nicht angezeichnet, indeſſen können ſie aus den darin angezeichneten eccliptiſchen Neumonden erkannt werden. Denn wenn in der zweyten Tafel der vor- und nach ☊ oder ☋ ſtehende Neumond eccliptiſch iſt (§. 25), ſo iſt der zwiſchen beyde fallende Vollmond nicht nur eccliptiſch, ſondern die Mondsfinſterniß iſt total. Steht hingegen bey ☊ oder ☋ nur ein eccliptiſcher Neumond angezeichnet, ſo iſt gewöhnlich der näher gegen ☊ oder ☋ fallende Vollmond verfinſtert. Dieſes iſt aber nicht immer nothwendig, ſondern der Neumond muß ſchon ziemlich weit vom ☊ oder ☋ weg ſeyn, wenn vor oder nach der Vollmond eine Finſterniß haben ſoll. Denn wenn der Vollmond 15 Grad vor oder nach ☊, ☋ fällt, ſo geſchieht es ſelten oder nie, daß er verfinſtert

wird. Die Schranken der nähern Möglichkeit fallen zwiſchen 8 und 14 Grade, und das Mittel auf 11 Grad.

III. Ungleichheiten des Mondlaufes.

§. 33.

Der wahre Ort des Mondes trift ſelten mit dem mittlern zuſammen, und muß erſt durch mehrere Reductionen daraus hergeleitet werden. Dieſe Reductionen haben von jeden Zeiten her den Aſtronomen viel zu thun gegeben. **Kepler**, der in Abſicht auf die Bahn der Planeten ſo glücklich im Vermuthen geweſen, fand auch für den Mond eine Hypotheſe, welche ſehr einfach war, und die meiſten Ungleichheiten des Mondlaufes auf eine, wenigſtens für ſeine Zeiten, erträgliche Art angab. Es war aber dem **Newton** vorbehalten, von dieſen Ungleichheiten die wahren phyſiſchen Urſachen zu finden; dem **Euler** gelang es, die geſchmeidigſte Form von analytiſchen Ausdrücken dafür anzugeben. Allein zu beyden muſte noch ein practiſcher Aſtronome kommen, der Geſchicklichkeit hatte den Mondlauf, den theoretiſchen Abſichten gemäß, zu beobachten, und Witz und Scharfſinnigkeit, Theorie und Beobachtung in Vergleichung zu bringen. Und dieſes war **Mayer**. Er fand endlich

endlich, daß man wenigſtens 13 Reductionen vornehmen müſſe, wenn man den wahren Ort des Mondes bis auf eine Minute beſtimmen wolle, und daß ſo lange die Beobachtungen ſelbſt nicht bis auf Secunden getrieben werden, man an der Berichtigung der Mondstafeln bis auf einzelne Secunden gar nicht gedenken könne.

§. 34.

Ich habe bereits angemerkt, daß die Mayerſche Methode in England noch ungedruckt liegt, und daß wir weiter nichts als ſeine Tafeln vor uns haben. Dieſe ſcheinen ſchon dem erſten Anblicke nach ſehr ſinnreich und künſtlich eingerichtet. Allein die analytiſchen Formeln, nach denen ſie berechnet ſind, hat Mayer nicht bekannt gemacht. Ich habe daher die Mittel aufgeſucht, dieſe Formeln aus den Tafeln ſelbſt heraus zu bringen. Und dazu diente der Eulerſche Satz, daß überhaupt die Ungleichheiten bey den himmliſchen Bewegungen ſich in Abſicht auf die Grade der Länge nach

$$y = a\,\text{ſin.}\,\omega + b\,\text{ſin.}\,2\,\omega + c\,\text{ſin.}\,3\,\omega + \text{rc.}$$

in Abſicht auf die Diſtanzen, Halbmeſſer, Parallaxen nach

$$z = A\,\text{coſ.}\,\omega + B\,\text{coſ.}\,2\,\omega + C\,\text{coſ.}\,3\,\omega + \text{rc.}$$

richten. Da dieſe Reihen meiſtens ſehr convergiren, ſo ſind auch gewöhnlich die erſten Glieder zureichend.

§. 35.

So z. E. iſt bey der aequatio centri

$\omega = 30^\circ$	$y = 2^\circ$	$58'$	$33''$	$=$	$10713''$.
60	5	16	28		18988
90	6	17	50		22670
120	5	39	0		20340
150	3	21	4		12064

Nun nehme ich

$$y = a\,\text{ſ.}\,\omega + b\,\text{ſ.}\,2\omega + c\,\text{ſ.}\,3\omega + d\,\text{ſ.}\,4\omega$$

und finde, wenn die Werthe ſubſtituirt werden, die Gleichungen

$$10713 = \tfrac{1}{2}a + b\sqrt{\tfrac{3}{4}} + c + d\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$18988 = a\sqrt{\tfrac{3}{4}} + b\sqrt{\tfrac{3}{4}} \quad * - d\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$22670 = a \quad * \quad - c \quad *$$
$$20340 = a\sqrt{\tfrac{3}{4}} - b\sqrt{\tfrac{3}{4}} \quad * + d\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$12064 = \tfrac{1}{2}a - b\sqrt{\tfrac{3}{4}} + c - d\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

Damit iſt nun leicht zu prüfen, ob genug Glieder a, b, c &c. angenommen worden. Denn addirt man die erſte und letzte dieſer Gleichungen, ſo iſt die Summe

$$a + 2c = 22777''.$$

die dritte giebt

$$a - c = 22670$$

hieraus folgt

$$c = 36$$
$$a = 22706$$

Addirt man ferners die zweyte und vierte Gleichung, ſo iſt die Summe

$$a\sqrt{3} = 39328$$

welches ebenfalls

a =

$$a = 22706$$

giebt. Demnach ſind a, c in ſofern richtig beſtimmt. Ferners ſubtrahirt man die erſte und letzte, imgleichem die zweyte und vierte Gleichung von einander, und die Ueberreſte ſind

$$-1351 = b\sqrt{3} + d\sqrt{3}$$
$$-1352 = b\sqrt{3} - d\sqrt{3}$$

Dieſe Gleichungen addirt, geben

$$-2703 = 2b\sqrt{3}$$

demnach

$$b = -780''$$

zieht man ſie aber von einander ab, ſo bleibt

$$1 = 2d\sqrt{3}$$

das will ſagen $d = 0$. Und ſo iſt für die aequatio centri

$$y = 22706'' \text{ſin.}\,\omega - 780 \text{ ſin } 2\omega + 36 \text{ ſin } 3\omega.$$

Mayer ſagt, daß er die aequationem centri elliptiſch berechnet. Ich habe es nach dieſer Formel unterſucht, und gefunden, daß er dabey die Eccentricität = 0, 05506 angenommen.

§. 36.

Auf die erſtbeſchriebene Art habe ich nun für die Mayerſchen Tafeln die Formeln aufgeſucht, nach welchen Mayer ſie berechnet. Um dieſe Formeln der Ordnung nach herzuſetzen, werde ich folgende Benennungen gebrauchen. Es ſey für eine beliebige Zeit

der wahre Ort der ☉ = ☉
die Anom. med. ☉ = a
der mittlere Ort des ☽ = ☽
die Anom med. ☽ = M
der mittlere Ort des ☊ = ☊

ſo fängt Mayer damit an, daß er den Ort des ☊ auf den wahren reducirt, und da dieſe Reduction von der Anom. med. ☉ abhängt, ſo giebt er die Gleichung

$$☊' = ☊ + 618'' \sin. a - 10'' \sin. 2a$$

wobey nun ☊' den aequirten Ort des ☊ vorſtellt. Durch eben dieſe Gleichung, aber doppelt genommen, verbeſſert er die mittlere Anomalie des Mondes. Da er aber dabey noch mehrere Verbeſſerungen anbringt, ſo werden wir ſie in folgenden zuſammen nehmen.

§. 37.

Mayer gebraucht nemlich anfänglich zehn Gleichungen, um ſowohl den Ort des Monds als die mittlere Anomalie in ſofern zu verbeſſern, daß ſie ſich nachgehends auf eine deſto geſchmeidigere Art noch ferners verbeſſern laſſen. Dieſe zehn Gleichungen ſind folgende:

1° + 680″ ſin. a — 10″ ſin. 2 a
2° — 54 ſin. [a + 2 (☽ — ☉)]
3° + 62 ſin. [a — 2 (☽ — ☉)]
4° + 108 ſin. [a — M + 2 (☽ — ☉)]
5° — 72 ſin. [a + M — 2 (☽ — ☉)]
6° + 90 ſin. [M + 2 (☽ — ☉)]

7° +

7° + 58 ſin. [2 (☽ — ☊) — M]
8° + 40 ſin. (M — a)
9° + 47 ſin. 2 (☊ — ☉)
10° + 29 ſin. (☽ — ☉ — M) + 204 ſin. 2 (☽ — ☉ — M).

§. 38.

Dieſe zehn Gleichungen werden nun zu dem mittlern Orte des Mondes ☽ hinzugethan, um den einmal verbeſſerten Ort des Mondes zu haben, den wir = L′ ſetzen wollen. Es iſt demnach, wenn wir Kürze halber ☽ — ☉ = P ſetzen:

L′ = ☽ + 680 ſ. a — 10 ſ. 2 a — 54 ſ. (a + 2 P) + 62 ſ. (a — 2 P)
+ 108 ſ. (a — M + 2 P) — 72 ſ. (a + M — 2 P)
+ 90 ſ. (2 P + M) + 58 ſ. (2 ☽ — 2 ☊ — M)
+ 40 ſ. (M — a) + 47 ſ. 2 (☊ — ☉) + 29 ſ. (P — M)
+ 204 ſin. 2 (P M)

§. 39.

Ferners addirt Mayer eben dieſe 10 Gleichungen, und überdies noch die vorhin (§. 26) erwähnte, zu der mittlern Anomalie des Mondes M, und bringt dadurch die anomalia aequata A′ heraus, welche demnach

A′ = M + 1916″ ſ. a — 30 ſ. 2 a — 54 ſ. (a + 2 P)
+ 62 ſ. (a — 2 P) + 108 ſ. (a — M + 2 P)
— 72 ſ. (a + M — 2 P) + 90 ſ. (2 P + M)
+ 58 ſ. (2 ☽ — 2 ☊ — M) + 40 ſ. (M — a)
+ 47 ſ. 2 (☊ — ☉) + 29 ſ. (P — M)
+ 204 ſin. (2 P — 2 M)

iſt.

§. 40.

Damit nun der einmal verbeſſerte Ort des Mondes L' noch ferner verbeſſert werden, ſo gebraucht **Mayer** dazu noch zwo Gleichungen. Es ſey der zum zweyten male verbeſſerte Ort des Mondes $= L''$, ſo iſt

$$L'' = L' - 22706 \text{ ſin. } A' + 780 \text{ ſ. } 2\,A' - 36 \text{ ſ. } 3\,A' - 4842 \text{ ſin. } [2(L' - \odot) - A'] + 36 \text{ ſin. } [4(L' - \odot) - 2\,A']$$

§. 41.

Endlich wird noch die letzte Verbeſſerung vorgenommen. Es ſey nemlich der zum dritten mal verbeſſerte Ort des Mondes $= L'''$, ſo iſt

$$L''' = L'' - 115 \text{ ſ. } (L'' - \odot) + 2421 \text{ ſ. } 2\,(L'' - \odot) + 2 \text{ ſin. } 3\,(L'' - \odot) + 18 \text{ ſin. } 4\,(L'' - \odot).$$

§. 42.

Damit wäre nun das, was man den Ort des Mondes in ſeiner Bahn heiſt, gefunden. Um ihn aber auf die Ecliptic zu bringen, werden noch zwo Gleichungen erfordert, wovon die erſte

$$-\,417'' \text{ ſin. } 2\,(L''' - \text{☊}')$$

die andere aber das Vorrücken der Nachtgleichen

$$-\,18 \text{ ſin. } 2\,\text{☊}'$$

iſt.

§. 43.

Da ferner die Mondbahn ſich gegen die Ecclipticneigt, ſo kömmt auch die Berechnung der Breite vor. Dazu gebraucht **Mayer** zwo Gleichungen

$$+ 18542'' \sin.(L''' - \text{☊}') - 6 \sin. 3 (L''' - \text{☊}')$$
$$+ \quad 530 \sin.(L''' + \text{☊}' - 2\odot).$$

§. 44.

Endlich kömmt noch die Parallaxe vor, welche durch drey Gleichungen beſtimmt wird, ſo, daß

$$p = 57' 8'' - 188 \cos. A' + 10 \cos. 2 A'$$
$$- 38 \cos. [2(L' - \odot) - A']$$
$$- \tfrac{3}{2} \cos.(L''' - \odot) + 26\tfrac{1}{2} \cos. 2(L''' - \odot)$$

§. 45.

Aus der Parallaxe wird ſodann der Halbmeſſer des Mondes gefunden, weil dieſer immer, nach **Mayern**, $\frac{3}{11}$ von jener iſt. Dieſer Halbmeſſer iſt immer ſo genommen, als wenn der Mond unter dem Aequator am Horizonte, oder aus dem Mittelpuncte der Erde geſehen würde, und ſo iſt auch die parallaxis aequatoria zu verſtehen, in ſofern ſie wegen der abgeplatteten Figur der Erde einer Reduction bedarf, die vom Aequator bis zum Pol bis auf $\frac{1}{4}$ Minute anwachſen kann.

IV.

IV. Beſtimmung der Ungleichheiten des Mondlaufes durch die mittlere Bewegungen.

§. 46.

Dieſes ſind demnach die ſämtliche Formeln, nach welchen die Mayerſchen Tafeln berechnet ſind. Sie ſind, wie man ſieht, nicht wenig weitläuftig, und müſſen dem Erfinder ungemein viele Mühe gekoſtet haben, bis er ſie in dieſe geſchmeidigere Form gebracht hat. Auch muß noch angemerkt werden, daß ſich, nebſt den angeführten Gleichungen, eine Menge von kleinern Gleichungen müſſen dargebothen haben. Mayer ſagt aber, er habe ſie ſämtlich weggelaſſen, und nur diejenigen beybehalten, die ſich über $\frac{1}{2}$ Minute erſtreckten. Nun müſte man ſie ſämtlich mitnehmen, wenn man den Mondlauf bis auf einzelne Secunden beſtimmen wollte oder könnte: denn die Unvollkommenheiten der Beobachtungen laſſen keine ſo genaue Data zu. Solche kleinere Gleichungen kommen aber dennoch wieder zum Vorſchein, wenn man die Mayerſchen Formeln in andere verwandeln will, und da können ſie ſodann ebenfals weggelaſſen werden, weil ſie faſt immer einander ganz aufheben.

§. 47.

Was bey den Mayerſchen Tafeln ſogleich in die Augen fällt, iſt, daß er die Verbeſſerungen

gen nicht mit einem male, ſondern nach und nach vornimmt, und überdies ſogleich den wahren Ort der Sonne gebraucht. Ich habe mir demnach etliche Tage Zeit nicht reuen laſſen, um ſeine Formeln in ſolche zu verwandeln, welche den wahren Ort des Mondes unmittelbar durch die mittlern Bewegungen geben ſollten. Eine Rechnung, die etliche Tage Zeit gebrauchte, werde ich wohl nicht herſetzen, ſondern mich begnügen, die zuletzt herausgebrachte Gleichung anzugeben, und zwar mit Weglaſſung ſehr vieler Kleinigkeiten, die nicht über 20 Secunden gehen. Es ſey demnach der mittlere Ort der Sonne = S, daß übrige wie vorhin (§. 36), ſo iſt $L''' = \text{☽}$

$$
\begin{aligned}
&- 22652\,\text{ſ}\,M - 122\,\text{ſ}(\text{☽} - S) - 150\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2S - a)\\
&+ 773\,\text{ſ}\,2M + 2391\,\text{ſ}\,2(\text{☽} - S) - 46\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2S + a - M)\\
&- 36\,\text{ſ}\,3M + 23\,\text{ſ}\,4(\text{☽} - S) + 235\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2S - a - M)\\
&+ 680\,\text{ſ}\,a - 4586\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2S - M) + 47\,\text{ſ}(2\text{☊} - 2S)\\
&- 10\,\text{ſ}\,2a + 31\,\text{ſ}(4\text{☽} - 4S - 2M) + 58\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} - M)\\
&- 105\,\text{ſ}(M + a) - 175\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2S + M)\\
&+ 145\,\text{ſ}(M - a) + 210\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2S - 2M)\\
&\qquad + 24\,\text{ſ}(\text{☽} - S - M)\\
&\qquad - 52\,\text{ſ}(4\text{☽} - 4S - M).
\end{aligned}
$$

§. 48

Unter den weggelaſſenen Gliedern ſind folgende:

$$
\begin{aligned}
&+ 19\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2S + 2M)\\
&- 13\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2S - 3M)\\
&- 11\,\text{ſ}(2\text{☽} - 1S - a - 2M)
\end{aligned}
$$

+ 10 ſ(2☽ − 2S + 2a − M)
+ 7 ſ(2M + a)
− 7 ſ(2M − a)

die beträchtlichſten, die übrigen ſind ſämtlich geringer.

§. 49.

Da aber auch Mayer ſolche kleinern Glieder weggelaſſen, ſo kann ich nicht ſagen, ob ſie die erſt angeführten würden vergröſſert oder vermindert haben. Der Natur der Sache nach aber ſollte das letztere ſeyn, weil die Coefficienten der doppelt, dreyfach ꝛc. genommenen Winkel ſehr ſtark convergiren. Der Erfolg indeſſen iſt, daß die (§. 47) herausgebrachte Formel faſt immer um etwas von den Mayerſchen Formeln abweicht, dabey aber ſelten eine Minute Unterſchied giebt. Ich habe ſie in Tabellen verwandelt, wovon unten die Rede ſeyn wird. Man ſieht aus der Formel, daß von ſolchen Tabellen eigentlich nur vier ſind, die eine beträchtliche Gröſſe haben. Und dieſe ſind, wenn man Kürze halber ☽ − S = E ſetzt

I°. − 22652 ſM
+ 773 ſ2M
− 36 ſ3M

II°. − 122 ſin. E
+ 2391 ſ2E
+ 23 ſ4E

III°. − 4586 ſ(2E − M)
+ 31 ſ(4E − 2M)

IV°. + 680 ſa
− 10 ſ2a.

Dazu

Dazu kommen ſodann noch

V.° — 105 ſ(a + M)	XI.° — 150 ſ(2E — a)
VI.° — 145 ſ(a — M)	XII.° — 46 ſ(a — M + 2E)
VII.° — 175 ſ(M + 2E)	XIII.° — 235 ſ(a + M — 2E)
VIII.° — 24 ſ(M — E)	XIV. — 58 ſ(M + 2☊ — 2☽)
IX.° — 210 ſ(2M — 2E)	XV. — 47 ſ(2S — 2☊)
X.° — 52 ſ(4E — M)	

Es ſind demnach in allen 15 Gleichungen oder Tafeln, wenn man dieſe einfach laſſen will. Will man aber Tafeln zu doppelten Eingången machen, ſo laſſen ſich No. VII — X in eine zuſammen ziehen, weil dieſe nur von M und E abhången. Ferners können No. V, VI in eine zuſammen gezogen werden, weil dieſe nur von a und M abhången. Und damit würde die Sache auf 11 Tafeln gebracht. Allenfalls lieſſen ſie ſich auf 7 herunter ſetzen, wenn man

No. I, II, III, VII, VIII, IX, X

und

No. IV, V, VI

zuſammen nehmen, und daraus Tafeln zu doppelten Eingången machen wollte. Allein da würde es, wegen des Interpolirens, Schwůrigkeiten geben, oder die Tafeln můſten weitlåuftiger gemacht werden, als es ſich, wenigſtens bis man noch genauere hat, der Můhe lohnt. Da indeſſen die 11 letzten Tafeln ſich faſt immer compenſiren, ſo kan man ſich allemal,

wo

man den Ort des Mondes nur bis auf einige Minuten genau wiſſen will, mit den vier erſten Tafeln begnůgen, und dazu ſind ſie vortheilhafter eingerichtet, als die Mayerſchen.

§. 50.

Die gefundene Formel (§. 47), wird fůr die Zeit des mittlern Neumondes geſchmeidiger, weil alsdann $E = 0$ iſt. Und damit hat man fůr dieſe Zeit $L''' = \text{☽}$

$$
\begin{aligned}
&- 18168\,\text{ſ}\,M - 345\,\text{ſ}(M + a) + 47\,\text{ſ}(2\,\text{☊} - 2S)\\
&+ 553\,\text{ſ}\,2M + 199\,\text{ſ}(M - a) + 58\,\text{ſ}(2\,\text{☽} - 2\,\text{☊} - M)\\
&- 23\,\text{ſ}\,3M + 18\,\text{ſ}(2M + a)\\
&+ 844\,\text{ſ}\,a - 12\,\text{ſ}(M - 2a)\\
&- 20\,\text{ſ}\,2a - 8\,\text{ſ}(2M - a)
\end{aligned}
$$

Und eben ſo fůr die Zeit des mittlern Vollmondes, wo $E = 180^\circ$ iſt, $L''' = \text{☾}$

$$
\begin{aligned}
&- 18206\,\text{ſ}\,M - 345\,\text{ſ}(M + a) + 47\,\text{ſ}(2\,\text{☊} - 2S)\\
&+ 549\,\text{ſ}\,2M + 199\,\text{ſ}(M - a) + 58\,\text{ſ}(2\,\text{☽} - 2\,\text{☊} - M)\\
&- 23\,\text{ſ}\,3M + 18\,\text{ſ}(2M + a)\\
&+ 844\,\text{ſ}\,a - 12\,\text{ſ}(M - 2a)\\
&- 12\,\text{ſ}\,2a - 8\,\text{ſ}(2M - a)
\end{aligned}
$$

V. Betrachtung des Falls, wenn der Mond keine andere Ungleichheiten hätte, als die er zur Zeit der wahren Syzigien hat.

§. 51.

Man hat von jeden Zeiten her angemerkt, daß die meiſten Ungleichheiten des Mondlaufes, zur Zeit der wahren Neu- und Vollmonde, entweder ganz wegfallen, oder wenigſtens

ſtens ſehr geringe werden; daher ließ man es für dieſe zween Fälle bey der Gleichung bewenden, die von der Eccentricität der Mondbahn hergenommen wurde. Hingegen fanden ſich für jede andere Fälle, wo der Mond nicht in den Syzigien war, ſolche Ungleichheiten, die nicht von der Eccentricität hergeleitet werden konnten, und daher eine zweyte Verbeſſerung erforderten. Dieſe war bereits dem Ptolemaeo bekannt. Sie gab aber nur den wahren Ort des Monds in den Quadraturen auf eine erträgliche Art, und fieng gegen die Octanten zu, an, ſehr merklich abzuweichen. Tycho, der auf dieſen Umſtand Acht hatte, erfand daher eine dritte Gleichung, welche er die Variation nennte. Und dies war die dritte Verbeſſerung. Deſſen unerachtet, fieng Kepler an zu bemerken, daß ſelbſt in den Syzigien noch Ungleichheiten zurücke blieben, die von der Jahrszeit abhiengen. Er fand, daß die Finſterniſſe im Frühling bey 20 Minuten ſpäther, im Herbſte aber um eben ſo viel früher eintrafen, als es die Berechnung mit ſich brachte. Die Urſache hievon ließ er der Nachwelt aufzuſuchen übrig, weil zu ſeinen Zeiten dieſe vierte Gleichung noch nicht anders als bey den Finſterniſſen waren bemerkt worden. Da er die Sache inzwiſchen auf die Anomalie der Sonne reducirte, und die 20 Minuten, die er angab, nicht viel fehlen, ſo iſt er auch hiemit ſo ziemlich auf die Spur gekommen.

§. 52.

Die Nachwelt hat indeſſen auch hierin Keplers Verlangen erfüllt. Newton hat die Urſachen, und Mayer die eigentliche Maaſſe angegeben. Aus Newtons Theorie folgt ebenfalls, daß die Ungleichheiten des Mondlaufes in den Syzigien meiſtens wegfallen. Wir haben demnach noch aus Mayers Formeln zu ſehen, welche dann eigentlich dabey zurücke bleiben, und wie groß ſie ſind. Laßt uns demnach zu dieſen Formeln zurücke kehren.

§. 53.

Einmal fällt die letzte Gleichung (§. 41), welche die Variation vorſtellt, weg, weil in dem Zeitpunct des wahren Neu- oder Vollmondes $L''' = L''$ wird: denn L''' iſt $= \odot$ für den Neumond, oder $= \odot + 180°$ für den Vollmond. Setzt man demnach in der Gleichung des §. 41 $\odot$ ſtatt L''', ſo verwandelt ſie ſich in

$$L'' - \odot = 115\,\text{ſ}(L'' - \odot) - 2421\,\text{ſ}2(L'' - \odot) - 2\,\text{ſ}3(L'' - \odot) - 18\,\text{ſ}4(L - \odot)$$

Dieſes geht aber nicht an, dafern nicht $L'' - \odot = 0$, und demnach $L'' = L'''$ iſt. Wiederum ſetze man für den Vollmond $L''' = \odot + 180°$, oder $\odot = L''' - 180°$, ſo verwandelt ſich die Gleichung des §. 41 in

$$L'' - L''' = -115\,\text{ſ}(L'' - L''') - 2421\,\text{ſ}(2L'' - 2L''') + 2\,\text{ſ}3(L'' - L''') - 18\,\text{ſ}4(L'' - L''')$$

welches

welches wiederum nicht angeht, dafern man nicht $L'' = L'''$ ſetzt.

§. 54.

Da demnach für die Syzigien $L'' = L'''$ iſt, ſo iſt in der Gleichung des §. 40

$$2\,(L' - \odot) = 2\,(L' - L'')$$

weil ſowohl im Vollmond als im Neumond $2\,\odot = 2\,L''$ iſt. Demnach verwandelt ſich dieſe Gleichung in

$$L' - L'' = 22706\,\sin.\,A' - 780\,\text{ſ}\,2\,A' + 36\,\text{ſ}\,3\,A' + 4842\,\sin.\,[2\,(L' - L'') - A'] - 36\,\text{ſ}\,[4\,(L' - L'') - 2\,A']$$

§. 55.

Dieſe Gleichung aufgelöſt, giebt

$$L'' = L'' = L' - 17917\,\text{ſ}\,A' + 328\,\text{ſ}\,2\,A' - 4\,\text{ſ}\,3\,A'.$$

Und auf dieſe Art werden für die Syzigien die drey letzten Mayerſchen Tafeln, welche die aequationes centri, eueстionis und variationis enthalten, auf eine einige herunter gebracht, welche ſchlechthin nur von der einmal abgeglichenen Anomalie A′ (§. 39) abhängt. Da aber auch L′ der bereits einmal verbeſſerte Ort des Mondes iſt (§. 38), ſo dürfen nur die (§. cit.) beſtimmten Werthe von A′ und L′ in der Gleichung

$$L''' = L' - 17917''\,\text{ſ}\,A + 328\,\text{ſ}\,2\,A - 4\,\text{ſ}\,3\,A$$

dergeſtalt geſetzt werden, daß man ihre Coefficienten, die Secunden eines Grades vorſtellen,

in Theile des Halbmeſſers verwandelt, um L'' durch ☽ und M beſtimmen zu können.

§. 56.

Dieſe Rechnung, die ebenfalls langwierig iſt, habe ich, deſſen unerachtet, vorgenommen, und damit die Gleichung

$$\begin{aligned}
\text{☽} - L''' = 17865'' \sin. M &+ 166\,\text{ſ}(a+M) \\
- 132\,\text{ſ}\,2M &- 58\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} - M) \\
- 23\,\text{ſ}\,3M &- 47\,\text{ſ}\,2(\text{☊} - \odot) \\
- 691\,\text{ſ}\,a & \\
+ 10\,\text{ſ}\,2a &
\end{aligned}$$

gefunden, welche für den Neumond iſt. Verſchiedene kleine Theile habe ich dabey weggelaſſen, worunter

$$\begin{aligned}
&+ 6\,\text{ſ}(a - M) \\
&- 12\,\text{ſ}(a + 2M) \\
&+ 9\,\text{ſ}(a - 2M) \\
&+ 3\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊}) \\
&- 3\,\text{ſ}(2M - 2\text{☽} + 2\text{☊})
\end{aligned}$$

die beträchtlichſten ſind.

§. 57.

Für den Vollmond hingegen kömmt die Gleichung

$$\begin{aligned}
\text{☽} - L''' = 17807''\,\text{ſ}M &+ 166''\,\text{ſ}(a+M) \\
- 130\,\text{ſ}\,2M &- 58\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} - M) \\
- 23\,\text{ſ}\,3M &- 47\,\text{ſ}\,2(\text{☊} - \odot) \\
- 691\,\text{ſ}\,a & \\
+ 10\,\text{ſ}\,2a &
\end{aligned}$$

heraus,

heraus, worin eben die kleinern Theile, wie bey der Gleichung für den Neumond (§. 56), weggelaſſen ſind. Hier iſt demnach nur das erſte Glied um 58 ſin. M kleiner; das zweyte differirt nur um 2″ ſin. 2 M, welches nichts ſagen will.

§. 58.

Dieſe Gleichungen ſind nun viel einfacher als die, ſo wir oben (§. 47) für jede Umſtände des Mondlaufes herausgebracht haben. Sie läßt ſich auf fünf Tafeln bringen, wozu noch eine, wegen des Unterſchiedes der Neu- und Vollmonde, kommen müſte. Die erſte dieſer Tafeln würde für

$$17865 \, \text{ſ} M - 132 \, \text{ſ} 2 M - 23 \, \text{ſ} 3 M$$

berechnet. Dieſe Gleichung ſollte nun, nach Keplern, elliptiſch ſeyn. Sie iſt es aber nicht. Denn mit Beybehaltung des erſten Gliedes würde man

$$17865 \, \text{ſ} M - 484 \, \text{ſ} 2 M + 18 \, \text{ſ} 3 M$$

und damit die Eccentricität 0, 04333 erhalten. Der Unterſchied aber iſt

$$= 352 \, \text{ſ} 2 M - 41 \, \text{ſ} 3 M$$

und daher 5 bis 6 Minuten. Für die Eccentricität hat Kepler 0, 04362 angenommen, und damit würde die Gleichung

$$17990 \, \text{ſ} M - 493 \, \text{ſ} 2 M + 16 \, \text{ſ} 3 M$$

ſeyn, welches ebenfalls um

$$125 \, \text{ſ} M - 361 \, \text{ſ} 2 M + 39 \, \text{ſ} 3 M$$

von dem, was die Mayerſchen Tafeln geben, verſchieden iſt.

§. 59.

Die andere Tafel würde für

$$- 691 \sin. a + 10 \sin. 2a.$$

berechnet. Dieſes iſt nun die Verbeſſerung, die Kepler vermuthet hatte, aber, aus Mangel genugſamer Beobachtungen, der Nachwelt zu beſtimmen überließ. Sie hat allerdings einen Einfluß auf die Zeit der Finſterniſſe, und macht, daß ſie im Frühling um ungefähr 22 Minuten ſpäter, im Herbſte um ſo viel früher eintreffen. Kepler gab 20 Minuten an, und dies kann ſich, wenn der Mond bey ſeiner Erdnähe iſt, auch wirklich einfinden. Es erhellet demnach, daß er hier die Sache ſehr gut getroffen.

§. 60.

Die drey übrigen Tafeln würden nach

$$+ 166 \sin. (a + M)$$
$$- 58 \sin. (2☽ - 2☊ - M)$$
$$- 47 \sin. (2☊ - 2☉)$$

und die für den Vollmond, nach

$$- 58 \sin. M$$

berechnet. Man ſieht leicht, daß Kepler von dieſen Verbeſſerungen, weil ſie nur einzelne Minuten betreffen, gar keinen Anlaß ſie zu vermuthen haben konnte. Denn zu ſeiner Zeit war

war an Berichtigung des Mondlaufs bis auf einzelne Minuten gar nicht zu gedenken.

§. 61.

Die für den Neumond und Vollmond beſonders heraus gebrachten Formeln (§. 56. 57) laſſen ſich in eine zuſammenziehen, welche ſo vorgeſtellt werden kann:

$$\text{☽} - L''' = 17865 \sin M + 166\,\text{ſ}(a+M) - 132\,\text{ſ}\,2M - 58\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} - M) - 23\,\text{ſ}\,3M - 47\,\text{ſ}\,2(\text{☊} - \odot) - 691\,\text{ſ}\,a - 58\,\text{ſ}(M + \text{☽} - \odot) + 10\,\text{ſ}\,2a$$

Wenn es demnach nur darauf ankömmt, den Ort des Mondes zur Zeit des wahren Neumondes oder Vollmondes zu beſtimmen; ſo kann man ſetzen, der Mond laufe in einer Bahn, welche durch dieſe Gleichung beſtimmt wird. Es iſt dieſes ein erdichteter Mondlauf, motus lunae fictus, ſo wie Kepler nach ſeiner Theorie zur Beſtimmung der Syzigien einen ähnlichen gebraucht hat. Dieſer gedichtete Lauf trift mit dem wahren jedesmal in den Syzigien zuſammen.

§. 62.

Es ſind aber auch die übrigen Umſtände in den Syzigien einfacher. Denn da alsdann $2\odot = 2L'''$ iſt (§. 54), ſo wird in der Formel für die Neigung der Mondbahn gegen die

Ecliptic (§. 43)

$$L''' + \text{☊}' - 2\odot = -(L''' - \text{☊}')$$

und demnach die Formel ſelbſt auf

$$18012'' \,\text{ſ}(L''' - \text{☊}') - 6\,\text{ſ}\,3(L''' - \text{☊}')$$

abgekürzt.

§. 63.

Eben ſo iſt für die Parallaxe (§. 44)

$L''' - \odot = 0$ für den Neumond,

$L''' - \odot = 180°$ für den Vollmond,

demnach

$$2(L''' - \odot) = 0$$

Ferner (§. 38. 39)

$$L' = \text{☽} + 680''\,\text{ſin. } a + \&c.$$

$$A' = M + 1916''\,\text{ſin. } a + \&c.$$

demnach

$$2L' - 2\odot - A' = 2(\text{☽} - \odot) - M - 556''\,\text{ſin. } a - \&c.$$

und

$$2(\text{☽} - L''') = 2(\text{☽} - \odot) = (17865''\,\text{ſ}M - 691\,\text{ſ}\,a + \&c.).\,2$$

Werden damit die behörigen Subſtitutionen und Reductionen vorgenommen, ſo findet ſich die Parallaxe für die Neumonde

$$57'.30'' - 3'.46''\,\text{coſ}\,M + 13''\,\text{coſ}\,2M$$

für die Vollmonde 3″ mehr, demnach

$$57'.33'' - 3'.46''\,\text{coſ}\,M + 13''\,\text{coſ.}\,2M.$$

VI. Die ſtündliche Bewegung des Mondes.

§. 64.

In den aſtronomiſchen Tafeln wird gemeiniglich auch die wahre tägliche oder ſtündliche Bewegung der Planeten angegeben. Mayer ließ ſie aber für den Mond aus ſeinen Tabellen weg. Und es iſt, überhaupt betrachtet, zu vermuthen, daß es deswegen geſchehen, weil er in ſeinen Tafeln ſchlechthin nur das unumgänglich Nothwendige mitnahm. Es konnte aber beſonders hiebey noch ein anderer Grund ſeyn, und dieſer findet ſich, wenn man über die wahre ſtündliche Bewegung des Mondes die Rechnung vornimmt. Die Formeln werden ſo weitläuftig, daß man aus ſeinen Tafeln faſt eben ſo geſchwinde noch einen zweyten Ort des Mondes berechnet, und daraus auf ſeine ſtündliche Bewegung den Schluß macht. Dies iſt nun für die übrigen Planeten und die Sonne viel kürzer, weil ihre tägliche und ſtündliche Bewegung nur von der Anomalie abhängt, und daher in einer Tafel vorgeſtellt werden kann.

§. 65.

So z. E. wenn die mittlere Anomalie der Sonne = a iſt, ſo bewegt ſie ſich in 24 Stunden von einem fürgegebenen Tag auf den folgenden um

$59' 8'' 9''' + 1'' 2''' \sin a - 0'' 1''' \sin 2a$
$- 119.26 \cos a + 2.31 \cos 2a - 0'' 3''' \cos 3a$

und hinwiederum in 24 Stunden von dem vorhergehenden auf dem fürgegebenen um

$59' 8'' 9''' - 1'' 2''' \sin a + 0'' 1''' \sin 2a$
$+ 119.26 \cos a + 2.31 \cos 2a - 0'' 3''' \cos. 3a$

und für jede Stunde um

$2' 27' 50''' - 4'' 59''' \cos a + 0'' 6''' \cos 2a$

wofür man

$2' 28'' - 5'' \cos a$

ſetzen, und die Sache in einer ſehr einfachen Tabelle vorſtellen kann, wie man dann ſolche in jeden aſtronomiſchen Tafeln findet.

§. 66.

Mit dem Monde aber ſieht es ganz anders aus, wenn man ſeine ſtündliche Bewegung nur bis auf einzelne Secunden beſtimmen will. Sie hängt von allen Ungleichheiten ab, denen der Mondlauf ſelbſt unterworfen iſt. Ich habe, um ſie durch die mittlere Bewegung zu beſtimmen, die oben (§. 47) gefundene Gleichung gebraucht, welche den wahren Ort des Monds L''' durch den mittlern ☽ und die hinzukommenden Verbeſſerungen angiebt. Nun iſt die ſtündliche mittlere Bewegung

	′	″	‴	IV	
des ☽	32	56	27	34	
Apog. ☽	0	16	41	4	
☊ = =	0	7	56	35	rückwärts
☉ = =	2	27	50	58	
Apog. ☉	0	0	0	27	

dem-

demnach

	′	″	‴	IV
☽ — ⊙ =	30	28	36	36
☽ — apog. ☽	32	39	46	30
☽ — ☊ =	33	4	24	9
⊙ — apog. ⊙	2	27	50	31
⊙ — ☊ =	2	35	47	33

§. 67.

Dieſe Bewegungen müſten in Theilen des Halbmeſſers, der = 1 geſetzt wird, ausgedrückt werden. Ich werde ferner in der Rechnung den Buchſtaben E, M, a, ☊, S &c. eben die Bedeutung laſſen, und durch x einen jeden beliebigen Theil einer Stunde andeuten. Werden nun E, M, a, ☊, S &c. für einen fürgegebenen Zeitpunct angenommen, ſo verwandelt ſich nach Verfluß der Zeit x,

E	in	E	+ 0,0088653. x
M	in	M	+ 0,0095012. x
a	in	a	+ 0,0007167. x
⊙ — ☊	in	⊙ — ☊	+ 0,0007538. x
☽ — ☊	in	☽ — ☊	+ 0,0095453. x

§. 68.

Werden nun dieſe ſo verwandelten Werthe in der Gleichung des §. 47 geſetzt, und jede Reductionen vorgenommen, ſo erhält man für die Bewegung des Mondes in der Zeit x, in Secunden und deren Decimaltheilen folgenden ſehr weitläuftigen Ausdruck:

1976″,

§. 69.

1976″, 459 . x.

− 215,221 . x . coſ M − 1,081 x . coſ E − 2,552 x coſ (2 E − a)

+ 1,021 x x . ſin M + 0,005 x^2 ſin E + 0,021 x^2 . ſin (2 E − a)

+ 0,003 x^3 . coſ M + 42,393 x . coſ 2 E − 0,273 x . coſ (2 E + a − M)

+ 14,688 x coſ 2 M − 0,376 x^2 ſin 2 E + 1,288 x . coſ (2 E − a − M)

− 0,140 x^2 ſin 2 M − 0,002 x^3 coſ 2 E − 0,006 x^2 ſin (2 E − a − M)

− 0,001 x^3 coſ 2 M + 0,815 x coſ 4 E − 0,087 x . coſ (2 ☊ − 2 ⊙)

− 1,026 x coſ 3 M − 0,014 x^2 ſin 4 E

+ 0,015 x^2 . ſin 3 M − 37,740 x coſ (2 E − M) + 0,556 x . coſ (2 ☽ − 2 ☊ − M)

+ 0,487 x . coſ a + 0,155 x^2 ſin (2 E − M) − 0,002 x^2 ſin (2 ☽ − 2 ☊ − M)

− 0,002 x^2 . ſin a + 0,510 x . coſ (4 E − 2 M)

− 0,001 x . coſ 2 a − 0,004 x^2 ſin (4 E − 2 M)

− 1,072 x . coſ (M + a) − 4,765 x coſ (2 E + M)

+ 0,005 x^2 . ſ (M + a) + 0,065 x^2 ſ (2 E + M)

+ 1,273 x coſ (M − a) + 0,267 x . coſ (2 E − 2 M)

− 0,005 x^2 ſ (M − a) + 0,015 x . coſ (E − M)

− 1,350 x . coſ (4 E − M)

+ 0,002 x^2 ſin (4 E − M)

§. 69.

Dieſer Ausdruck iſt aber nur deswegen weitläuftig, weil jede Coefficienten die gröſſer als $\frac{1}{1000}$ einer Secunde ſind, beybehalten worden, damit wenn auch x von 3, 4, 5 Stunden genommen wird, keine Secunde gefehlt werde. Und da man auch x negativ nehmen kann, ſo zeigt dieſe Formel, wie der Mondlauf bis auf 6, 7, 8 Stunden, vor und nach jeder fürgegebenen Zeit, ungleich wird. Eben ſo läßt ſichs, wenn x unendlich klein angenommen wird, die wirkliche Geſchwindigkeit des Mondes für jeden Augenblick finden. Denn da fallen die mit x^2, x^3 multiplicirten Glieder weg, und indem man die übrigen durch x dividirt, ſo erhält man, wie viele Secunden eines Grades der Mond mit der Geſchwindigkeit, die er jedesmal hat, in einer Stunde Zeit durchlaufen würde.

§. 70.

Setzt man aber in der Formel ein für allemal $x = 1$, ſo erhält man die wahre ſtündliche Bewegung, und da können die Decimaltheile wegbleiben, indem man, was über $\frac{1}{2}$ Secunde iſt, als eine Secunde nimmt, und was kleiner, als $\frac{1}{2}$ Secunde iſt, wegläßt. Dieſes kürzt ſodann die Formel merklich ab, und ſie iſt

$$
\begin{aligned}
1976'' &+ 1''\,\text{ſin}\,M && - 1''\,\text{coſ}\,E \\
&- 215\,\text{coſ}\,M && + 42\,\text{coſ}\,2E \\
&+ 15\,\text{coſ}\,2M && + 1\,\text{coſ}\,4E \\
&- 1\,\text{coſ}\,3M && - 38\,\text{coſ}\,(2E - M) \\
&- 1\,\text{coſ}\,(M + a) && + 1\,\text{coſ}\,(4E - 2M) \\
&+ 1\,\text{coſ}\,(M - a) && - 5\,\text{coſ}\,(2E + M) \\
& && - 1\,\text{coſ}\,(4E - M) \\
& && - 3\,\text{coſ}\,(2E - a) \\
& && + 1\,\text{coſ}\,(2E - a - M) \\
& && + 1\,\text{coſ}\,(2☽ - 2☊ - M)
\end{aligned}
$$

§. 71.

Da man aber, fürnemlich bey den Finſterniſſen, die ſtündliche Bewegung des Mondes zu wiſſen nöthig hat, wo ſie, gleich wie jede andere Umſtände, merklich einfacher iſt; ſo habe ich für die Zeit des wahren Neumondes die ſtündliche Bewegung des Mondes

$$
\begin{aligned}
2014'' &- 258\,\text{coſ}\,M && - 3\,\text{coſ}\,a \\
&+ 19\,\text{coſ}\,2M && + 3\,\text{coſ}\,(M - a) \\
&- 1\,\text{coſ}\,3M && - 1\,\text{coſ}\,(M + a)
\end{aligned}
$$

gefunden, welche Formel nun ungleich geſchmeidiger iſt. Hingegen müſſen für die Zeit des wahren Vollmondes noch 2'' addirt werden, und ſo iſt für den Vollmond die ſtündliche Bewegung

$$
\begin{aligned}
2016'' &- 258\,\text{coſ}\,M && - 3\,\text{coſ}\,a \\
&+ 19\,\text{coſ}\,2M && + 3\,\text{coſ}\,(M - a) \\
&- 1\,\text{coſ}\,3M && - 1\,\text{coſ}\,(M + a) \\
&+ 1\,\text{ſin}\,M
\end{aligned}
$$

§. 72.

Auf eine ähnliche Art ſuchte ich auch die ſtündliche Bewegung des Monds nach der Breite, und fand ſie überhaupt

$$
\begin{array}{ll}
+178'' \cos(L''' - \text{☊}') & -\tfrac{7}{4}.\cos(L''' - \text{☊}' + 2E - M) \\
+\quad 5 \cos(L''' + \text{☊}' - 2\odot) & -\tfrac{7}{4}\cos(L''' - \text{☊}' - 2E + M) \\
-\quad 10 \cos(L''' - \text{☊}' + M) & +2 \cos(L''' - \text{☊}' + 2E) \\
-\quad 10 \cos(L''' - \text{☊}' - M) & +2 \cos(L''' - \text{☊}' - 2E) \\
+\tfrac{2}{3} \cos(L''' - \text{☊}' + 2M) & \\
+\tfrac{2}{3} \cos(L''' - \text{☊}' - 2M) &
\end{array}
$$

§. 73.

Auch dieſe Formel läßt ſich für die Zeit der Syzigien abkürzen, und auf die viel einfachere

$$
\begin{array}{ll}
+187'' \cos(L''' - \text{☊}') & +\tfrac{2}{3}\cos(L''' - \text{☊}' + 2M) \\
-\quad 12 \cos(L''' - \text{☊}' + M) & +\tfrac{2}{3}\cos(L''' - \text{☊} - 2M) \\
-\quad 12 \cos(L''' - \text{☊}' - M) &
\end{array}
$$

herunter bringen. Es ſind aber dieſe beyde Formeln ſo zu verſtehen, daß wenn ſie einen poſitiven Werth geben, ſie allemahl gegen den Nordpol der Ecliptic müſſen gerechnet werden. Sie vermehren demnach die nördliche Breite und vermindern die ſüdliche. Das Gegentheil geſchieht bey den negativen Werthen.

§. 74.

Die Parallaxe ändert ſich in einer Stunde nicht merklich, weil die Aenderung nur

$$
1'',8.\sin M - 0'',2 \sin 2M + 0'',3 \sin(2E - M) - 0'',5 \sin 2E
$$

beträgt, wofür zumal für die Syzigien $2''\,\text{ſ}\,M$ genommen werden kann.

VII. Die Kepleriſche Beſtimmung des Mondlaufes.

§. 75.

Kepler, der in Abſicht auf die Planeten ſo glücklich geweſen, auf die wahre Spur zu kommen, gab ſich ebenfalls Mühe, das Geſetz der den Zeiten proportionalen Flächenräume auf den Mond anzuwenden, und zwar ſelbſt, ſofern deſſen Ungleichheiten von dem Laufe der Sonne abhängen. Er erfand dabey eine ſehr ſinnreiche Hyotheſe, wodurch er die ſogenannte Evection des Mondes ziemlich gut beſtimmte, und ſelbſt auch, in Abſicht auf die Tychoniſche Variation etwas dabey fand, ſo zwar derſelben nicht an Gröſſe gleich, aber doch proportional war. Endlich würde ihm auch die vierte beträchtliche Ungleichheit, die von der Anomalie der Sonne abhieng, gelungen ſeyn, wenn er genugſam vorräthige Beobachtungen vor ſich gefunden hätte (§. 51. 59), und ſo würde er wenigſtens die beträchtlichſte Umſtände ins Reine gebracht, und ſeine Tafeln bis auf einige Minuten berichtiget haben. Ein erſter Verſuch, der bey ſo vielen Schwürigkeiten, dennoch ſo weit gelungen, verdient doch immer, daß man ihn näher betrachte.

§. 76.

Fig. I. Es ſey ABPD die Mondbahn, T der Mittelpunct der Erde, A das Apogaeum, P das Peri-

Perigäum, L der wahre Ort des Mondes, TC die Eccentricität, ſo iſt nach der bloß elliptiſchen Theorie der Flächenraum TALT der Zeit proportional. Um nun wenigſtens die gröſſere Ungleichheit des Mondlaufes, die von der Sonne herrührt, mitzunehmen, ſo zieht Kepler die Linie TS gegen die Sonne, und verlängert ſie in V. Sodann fällt er aus C auf STV die ſenkrechte Linie Ca, und zieht aL zuſammen; dadurch erhält er den geradlinichten Triangel TLa, deſſen Flächenraum nebſt dem elliptiſchen Flächenraum der Zeit proportional geſetzt wird. Wenn dieſe beyden Räume auf einander fallen, wie es in der Figur geſchieht, ſo wird ihre Summe, widrigenfalls aber, wenn ſie nemlich auſſer einander fallen, ihre Differenz genommen und der Zeit proportional geſetzt. Durch dieſe Vorausſetzung wird die zweyte Ungleichheit oder die Evection noch ziemlich beſtimmt. Die dritte oder die Variation richtet ſich fürnemlich nach dem Sinus des doppelten Winkels STL oder TLV. Da nun $\sin 2 LTV = 2 . \sin LTV . \cos LTV$ iſt, ſo lieſſe ſich ohne Mühe noch ein rechtwinklichter Triangel conſtruiren, deſſen Flächenraum, mit den zween vorhin erwähnten, der Zeit proportional ſeyn würde. Man dürfte nur auf TL eine beſtändige Linie aus T gegen L nehmen, und ſodann eine ſenkrechte Linie auf TV fällen, ſo würde man einen ſolchen Triangel erhalten. Kepler merkte

dieſes ganz wohl, allein da er dabey die Geſchmeidigkeit nicht fand, die bey dem Triangel TLa war, ſo begnůgte er ſich, es anzuzeigen, indem er fůr die beſtåndige Linie die Eccentricitåt CT nahm, welche aber den Raum in die 18 mal zu klein angab. Die vierte Ungleichheit (§. 51) war ihm nur noch ůberhaupt bekannt; wenn er aber mehrere Beobachtungen vorråthig gehabt håtte, ſo iſt kein Zweifel, daß er ſie nicht wůrde auf die ganze Mondbahn bezogen haben. Auch låßt ſie ſich noch ziemlich durch den Flåchenraum eines Triangels vorſtellen. Sie wåchſt wie der Sinus der Anomalie der Sonne. Wenn man demnach eine Linie TB gegen das Apogåum der Sonne zieht, und darauf die Diſtanz TE von gehőriger Grőſſe annimmt, ſo darf man nur ES ziehen, und SETS wird der Triangel ſeyn, nach deſſen Flåchenraum die vierte Ungleichheit des Mondlaufes ſich ſo ziemlich genau richtet. Auf dieſe Art laſſen ſich wenigſtens die vier Hauptungleichheiten des Mondlaufes ſo vorſtellen, wie es Kepler wůrde gethan haben, wenn ihn nicht der Mangel an Beobachtungen aufgehalten håtte.

§. 77.

Doch, wir wollen nun auch die Formeln berechnen. Es ſey demnach

AC =

$AC = CP = 1$	der wahre Ort der Sonne $= \sigma$ in S
$CT = e$	der wahre Ort des Mondes $= \lambda$ in L
$ATV = s$	die wahre Anomalie der Sonne $= \alpha = BTS$
$CD = b$	die wahre Anomalie des Mondes $= \mu = ATL$

ſo iſt $s = \sigma - \lambda - 180^\circ + \mu$

$\mu - s = \lambda - \sigma + 180^\circ$

ferner $Ta = e . \cos s$

$$TL = \frac{1 - ee}{1 = e \cos \mu}$$

demnach der Flächenraum des

$$\Delta TLa = \frac{e(1 - ee) \cos s . \sin(\mu - s)}{2(1 - e \cos \mu)}$$

Dieſer Raum muß doppelt genommen werden, wenn derſelbe einen Circulbogen vorſtellen ſoll.

§. 78.

Ferner iſt die elliptiſche Proſtaphaereſis

$$= \frac{2e(1 + b)}{(1 + b)} \sin \mu + \frac{2 . (1 + 2b)}{2(1 + b)^2} \sin 2\mu$$
$$+ \frac{2(1 + 3b)}{3(1 + b)^3} \sin 3\mu + \&c.$$

Dieſe zu dem Triangel TLa doppelt genommen, addirt, giebt die ganze Proſtaphaereſis, welche die zwo erſten Ungleichheiten des Mondlaufes beſtimmt.

§. 79.

Sie iſt demnach

$$= \frac{e(1-ee)\cos s.\sin(\mu-s)}{2(1-e\cos\mu)} + \frac{2e(1+b)}{(1+b)}\sin\mu$$

$$+ \frac{2(1+2b)}{2(1+b)^2}\sin 2\mu + \frac{2(1+3b)}{3(1+b)^3}\sin 3\mu$$

$$+ \frac{2(1+4b)}{4(1+b)^4}\sin 4\mu + \&c.$$

§. 80.

Nun ſetzte Kepler die Eccentricität

$$e = 0,04362$$

Nimmt man damit die Rechnung und alle Reductionen vor, ſo erhält man die Gleichung in Secunden

$$\begin{array}{llll} +\ 22489'' \sin\mu & +\ 4494'' \sin(\mu-2s) \\ +\ 395 \sin 2\mu & +\ 99 \sin(2\mu-2s) \\ +\ 8 \sin 3\mu & +\ 2 \sin(3\mu-2s) \\ -\ 99 \sin 2s & -\ 2 \sin(\mu+2s) \end{array}$$

§. 81.

Dazu kömmt aber noch die Variation, welche Kepler, nach dem Tycho

$$= -2430'' \sin(\lambda-\sigma)$$

ſetzt, und die von der Anomalie der Sonne herrührende Ungleichheit

$$= -610'' \sin\alpha$$

Setzt man demnach für s deſſen Werth $\sigma-\lambda-180^\circ+\mu$, und den mittlern Ort des Mon-

des

des $= ☽$, ſo iſt $\lambda = ☽$

$$
\begin{array}{llll}
-22489'' \sin \mu & -4494'' \sin (2\lambda - 2\sigma - \mu) \\
-\quad 395 \sin 2\mu & -\quad 99 \sin (2\lambda - 2\sigma - 2\mu) \\
-\quad 8 \sin 3\mu & -\quad 2 \sin (2\lambda - 2\sigma + \mu) \\
+\quad 2331 \sin 2(\lambda - \sigma) & -\quad 2 \sin (2\lambda - 2\sigma - 3\mu) \\
+\quad 610 \sin \alpha.
\end{array}
$$

Dieſes iſt alſo die Gleichung, die man, den Keplerſchen Angaben zufolge, heraus bringt. Sie drückt die Proſtaphaereſin durch die wahren Bewegungen aus, und in ſofern läßt ſie ſich nicht unmittelbar mit der oben (§. 47) gegebenen Formel vergleichen. Man ſieht aber überhaupt, daß Kepler die gröſſern Ungleichheiten des Mondlaufes bis auf einige Minuten Unterſchied angegeben, und wenn man mitnimmt, daß die kleinern Ungleichheiten ſich faſt immer gegen einander aufheben, ſo läßt ſich daraus begreifen, warum die Rudolphiniſchen Tafeln bis zu der Zeit, da die Mayerſchen zum Vorſchein kamen, auch in Abſicht auf den Mondlauf, durch einen Zeitraum von faſt anderthalbhundert Jahren bey ihrem Credit erhielten, und denen an die Seite geſetzt werden konnten, die Caßini, La Hire, Streete, und andere Neuere herausgegeben hatten, ungeachtet dieſe zu deren Verfertigung ungleich mehrere Hülfsmittel hatten, als Kepler zu ſeiner Zeit haben konnte.

VIII. Beſtimmung der Zeit zwiſchen den wahren und mittlern Syzigien.

§. 82.

Die Art, wie man vermittelſt der Mayerſchen Tafeln die Zeit der wahren Neu- und Vollmonde beſtimmt, hat etwas ſehr indirectes und weitläuftiges, weil ſie nur durch wiederholte Verſuche gefunden werden kann. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, dieſe Zeit, ohne ſolche Umwege, geradehin zu beſtimmen, und dazu konnten die oben (§. 56. 57) für die wahren Neu- und Vollmonde gefundene Formeln ſehr bequem gebraucht werden. Dieſe Formeln gaben den Unterſchied zwiſchen dem wahren und mittlern Ort des Mondes, zur Zeit der wahren Syzigien, an. Es iſt demnach nur zu ſehen, wie die Zeit zwiſchen den wahren und mittlern Syzigien daraus gefunden werden könne. Dieſes geht nun auf folgende Art an:

§. 83.

Zur Zeit des wahren Neumondes ſey die Sonne und der Mond in V, der mittlere Ort der Sonne in S, des Mondes in ☽, demnach

beyde

beyde ſchon weiter vorgerückt. Ferner ſey zur Zeit des mitlern Neumondes der mittlere Ort der Sonne und des Mondes in M: ſo iſt klar, daß in der Zeit vom mittlern bis zum wahren Neumond die Sonne nach ihrer mittlern Bewegung von M in S, der Mond aber von M in ☽ fortgerückt iſt, und demnach der Mond ſich in eben der Zeit von der Sonne um den Raum S☽ entfernt hat. Demnach wird die Zeit zwiſchen den wahren und mittlern Neumond gefunden, wenn man S☽ durch den Unterſchied der mittlern ſtündlichen Bewegung der Sonne und des Mondes (§. 66)

$$30' \; 28'' \; 36''' \; 36^{IV}$$

dividirt. Es iſt aber VS die Proſtaphaereſis der Sonne, V☽ des Mondes zur Zeit des wahren Neumondes, demach S☽ der Unterſchid zwiſchen beyden.

§. 84.

Setzt man demnach die mittlere Anomalie der Sonne zur Zeit des wahren Neumondes $= \mathfrak{A}$, des Mondes $= \mathfrak{M}$, die mittlere Entfernung der Sonne vom ☊ $= \varkappa$, des Mondes $= \lambda$, ſo iſt

$$VS = 6943'' \sin \mathfrak{A} - 73'' \sin 2\mathfrak{A} + 1 \sin 3\mathfrak{A}$$

die Proſtaphaereſis der Sonne, und (§. 56) die für den Mond

$$
\begin{aligned}
V☽ = & \; 17865'' \sin \mathfrak{M} - 58'' \sin(2\lambda - \mathfrak{M}) \\
- & \; 132 \sin 2\mathfrak{M} - 47 \sin 2\varkappa \\
- & \; 23 \sin 3\mathfrak{M} + 3 \sin 2\lambda \\
- & \; 691 \sin \mathfrak{A} - 3 \sin 2(\mathfrak{M} - \lambda) \\
+ & \; 10 \sin 2\mathfrak{A} \\
+ & \; 166 \sin(\mathfrak{A} + \mathfrak{M}) \\
+ & \; 6 \sin(\mathfrak{A} - \mathfrak{M}) \\
+ & \; 9 \sin(\mathfrak{A} - 2\mathfrak{M}) \\
- & \; 12 \sin(\mathfrak{A} + 2\mathfrak{M})
\end{aligned}
$$

Setzt man demnach die Zeit zwiſchen dem wahren und mittlern Neumond, $= \tau$ Stunden, ſo wird man

$$\tau = \frac{V☽ - VS}{30'\ 28''\ 36'''\ 36^{IV}}$$

erhalten.

§. 85.

Für den Vollmond ſtellt S nicht die Sonne, ſondern den derſelben entgegenſtehenden Punct der Ecliptic vor. Dieſes ändert aber an der Rechnung nichts; nur muß alsdann (§. 57)

$$
\begin{aligned}
V☽ = & \; 17807'' \sin \mathfrak{M} \quad \text{ꝛc.} \\
- & \; 130 \sin 2\mathfrak{M}
\end{aligned}
$$

genommen werden.

§. 86.

Da man aber die Zeit τ durch die zur Zeit des mittlern Neumondes, oder Vollmondes, vorkommenden Umſtände eigentlich ſucht, ſo ſey für dieſe Zeit der mittlere Ort

der Sonne $= ☉$
des Mondes $= ☽$
des Knoten $= ☊$

Fer-

Ferner die mittlere Anomalie
der Sonne $= a$
des Mondes $= M$

Hieraus findet ſich (§. 66)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= a + (2'\ 27''\ 50'''\ 31^{IV})\tau \\
\mathfrak{M} &= M + (32\ 39\ 46\ 30)\tau \\
\lambda &= \text{☽} - \text{☊} + (33\ 4\ 24\ 9)\tau \\
\varkappa &= \odot - \text{☊} + (2\ 35\ 47\ 33)\tau
\end{aligned}$$

§. 87.

Dieſe Werthe müſſen nun in den Formeln (§. 84. 85) geſetzt werden, um die Gleichungen zu erhalten, welche τ durch $\odot$, ☽, ☊, a, M beſtimmen. Nimmt man dieſe Subſtitution vor, und löſt die Gleichungen auf, ſo erhält man durch eine nicht wenig weitläuftige und langwierige Rechnung, in Secunden Zeit ausgedrückt

$$\begin{array}{llll}
\tau = 35141 \,\text{ſin}\, M & - 114 \,\text{ſin}(2\text{☽} - 2\text{☊} - M) \\
+ 1378 \,\text{ſin}\, 2M & + 11 \,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} - 2M) \\
+ 34 \,\text{ſin}\, 3M & - 92 \,\text{ſ}\, 2(\text{☊} - \odot) \\
- 15007 \,\text{ſin}\, a & + 4 \,\text{ſ}(2\text{☊} - 2\odot + M) \\
+ 187 \,\text{ſin}\, 2a & + 2 \,\text{ſ}(2\text{☊} - 2\odot - M) \\
- 420 \,\text{ſ}(M + a) & + 2 \,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} + a) \\
+ 632 \,\text{ſ}(M - a) & - 2 \,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} - a) \\
- 53 \,\text{ſ}(2M + a) & \\
+ 32 \,\text{ſ}(2M - a) & \\
- 4 \,\text{ſ}(3M + a) & \\
+ 7 \,\text{ſ}(M + 2a) & \\
+ 1 \,\text{ſ}(M - 2a) & \\
- 2 \,\text{ſ}\, 2(M + a) &
\end{array}$$

 oder,

oder, wenn man die Kleinigkeiten wegläßt

$$\begin{aligned}
\tau = 35141 \sin M & \quad - 114 \sin(2\text{☽} - 2\text{☊} - M) \\
+ 1378 \sin 2M & \quad + 92\,\text{ſ}\,2(2\odot - 2\text{☊}) \\
+ 34 \sin 3M & \\
- 15007 \sin a & \\
+ 187 \sin 2a & \\
- 420\,\text{ſ}(M + a) & \\
+ 632\,\text{ſ}(M - a) & \\
- 53\,\text{ſ}(2M + a) & \\
+ 32\,\text{ſ}(2M - a) &
\end{aligned}$$

§. 88.

Dieſe Formel iſt für den Neumond. Für den Vollmond muß 114 ſin M und 7 ſin 2M ſubtrahirt werden, und ſo iſt

$$\begin{aligned}
\tau = 35027'' \sin M & \quad - 114\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} - M) \\
+ 1371 \sin 2M & \quad + 92\,\text{ſ}(2\odot - 2\text{☊}) \\
+ 34 \sin 3M & \\
- 15007 \sin a & \quad + 187 \sin 2a \\
- 420\,\text{ſ}(M + a) & \\
+ 632\,\text{ſ}(M - a) & \\
- 53\,\text{ſ}(2M + a) & \\
+ 32\,\text{ſ}(2M - a) &
\end{aligned}$$

§. 89.

Die durch dieſe Formeln beſtimmte Zeit τ, muß nun zu der Zeit der mittlern Syzigien addirt oder ſubtrahirt werden, je nachdem ſie poſitiv oder negativ gefunden wird, und ſo erhält man die Zeit der wahren ☌ oder ☍ in orbita: denn dieſe iſt nun eigentlich berechnet wor-

worden. Sie kann von der Zeit der wahren ☌ oder ☍ in eccliptica um $\frac{1}{4}$ Stunde verſchieden ſeyn. Ich habe aber dieſe letztere nicht berechnen wollen, um die Formeln nicht ohne Nothwendigkeit allzuweitläuftig zu machen, weil ſie nachgehends leichter beſonders geſucht wird.

§. 90.

Ich habe nun die erſtgefundenen Formeln in Tabellen verwandelt, und dieſes ſind folgende:

Tab V. iſt für

$$35141 \sin M + 1378 \sin 2M + 34 \sin 3M$$

und ſtellt denjenigen Theil der Zeit τ vor, welcher ſchlechthin nur von der mittlern Anomalie des Monds abhängt, und ſich bis auf 9 St. 46′ 54″ belaufen kann.

Tab. VI. iſt für

$$-15007'' \sin a + 187'' \sin 2a$$

und giebt den Theil der Zeit τ, welcher ſchlechthin nur von der mittlern Anomalie der Sonne abhängt, und ſich bis auf 4 St. 10′ 11″ belaufen kann.

Tab. VII. iſt für

$$-420'' \sin (M + a)$$

und

Tab. VIII. für

$$+632'' \sin (M - a)$$

Dieſe beyden Theile der Zeit τ hängen von beyden Anomalien M, a zugleich ab, und können ſich auf 17′ 32″ belaufen.

Tab.

Tab. IX. iſt für

$$-\ 53 \sin (2M + a)$$
$$+\ 32 \sin (2M - a)$$
$$-\ 114 \sin (2☽ - 2☊ - M)$$
$$+\ 92 \sin (2☉ - 2☊)$$

und ſtellt dieſe vier Theile der Zeit in τ in eben ſo vielen Columnen vor. Eigentlich ſind ſie ſo vorgeſtellt

$$-\ 53 \sin (2M + a)$$
$$-\ 32 \sin (a - 2M)$$
$$-\ 114 \sin (2☽ - 2☊ - M)$$
$$-\ 92 \sin (2☊ - 2☉)$$

welches deswegen geſchehen, damit die Zeichen —+ für alle vier Columnen der Tafel zugleich dienten. Endlich iſt in eben dieſer Tafel die fünfte Columne für

$$-\ 114 \sin M$$

berechnet, und dabey bemerkt, daß ſie für den Vollmond iſt, weil dieſer, wie wir vorhin (§. 88) geſehen, darin von dem Neumonde abgeht.

§. 91.

Vermittelſt dieſer Tafel, findet ſich nun die Zeit zwiſchen den wahren und mittlern Syzigien auf eine ganz directe und kurze Art. So z. E. haben wir oben (§. 30) für den eccliptiſchen Neumond 1706, May 1. 0. 6. 54 gefunden

Arg.

Arg. latit. ☋ +	5°	24′	54″		= ☽ − ☋
long. ☉, ☽	1	19	47	12	= ☉ = ☽
anom. ☉	10	11	56	47	= a
anom. ☽	7	10	34	35	= M

demnach iſt

long. ☋	1	14	22	18	= ☊

Hieraus ergiebt ſich nun

		St. ′ ″	St. ′ ″
M = 7. 10. 34. 35	Tab. 5 - - - -		− 5 58 45
a = 11. 4. 3. 33	Tab. 6	+ 1. 46. 56	
a + M = 6. 14. 38	Tab. 7 -	0. 1. 46	
a − M = 3. 23. 29	Tab. 8 - - - -		− 0 9 40
a + 2 M = 1. 25. 13	T. 9. Col. 1 - - -		− 43
a − 2 M = 8. 12. 54	- - 2 +	30	
2(☽ − ☊) − M = 5. 0. 15	- - - 3 - - -		− 57
2(☋ − ☉) = 11. 19. 10	- - - 4 +	17	
		+ 1. 49. 29	− 6 10 5
		− 6. 10. 5	
		− 4. 20. 36	
	1760. May 1.	0. 6. 54	Zeit des mittlern Neumonds.
	1760. May 0.	19. 35. 18	Zeit des wahren Neumonds.

demnach

demnach war die Syzigia in orbita 1706 den 30ten April, alten Calenders, 19 St. 35′ 18″ nach Mittag, oder den 12ten May, neuen Calenders, um 7 Uhr 35′ 18″ vor Mittag, und zwar nach der Pariſer Uhr, mittlerer Zeit.

IX. Tafeln zur Berechnung der Syzigien und Finſterniſſe.

§. 92.

Den bereits oben (§. 17. 25. 19. 90) beſchriebenen Tafeln, habe ich noch die übrigen beygefügt, die zur vollſtändigen Beſtimmung jeder Umſtände der Syzigien und Finſterniſſe dienen können. Und zwar habe ich die Regeln (§. 31) wegen des Vollmondes, und (§. 20) wegen der Biſſextilform, der zweyten Tafel angehenkt, und gleich nach der dritten Tafel die Lage einiger Oerter folgen laſſen, deren geographiſche Länge und Breite genau beſtimmt ſind.

§. 93.

Da man ferners in den zwo erſten Tafeln nur die Data für die Zeit der mittlern Syzigien findet, und eben dieſe Data ſodann auch für die Zeit der wahren Syzigien gefunden werden müſſen, ſo habe ich in der zehnten Tafel die mittlere Bewegungen für Tage, Stunden und Minuten beygefügt, damit man ſie für

die

die nach Tab. V, VI, VII, VIII, IX beſtimmte Zeit zwiſchen den mittlern und wahren Syzigien leicht berechnen könne. Auf der erſten Seite dieſer Tafeln iſt ſtatt an. ⊙ nur die Bewegung des apog. ⊙ geſetzt, woraus aber jene leicht gefunden wird.

§. 94.

Hat man hiedurch den mittlern Ort der Sonne und ihre mittlere Anomalie für die Zeit der wahren Syzigien gefunden, ſo findet ſich gleich darauf in Tab. XI. die Gleichung des Mittel-Puncts der Sonne, um daraus den wahren Ort der Sonne und zugleich auch des Monds zu beſtimmen, weil der Mond, zur Zeit der wahren Syzigien, entweder bey der Sonne oder 6 Zeichen davon entfernt iſt.

§. 95.

Hierauf lieſſe ſich in der Tab. XII. die Gleichung der Zeit vorſtellen, damit die gefundene mittlere Zeit der wahren Syzigien auf die wahre Zeit reducirt werden könne. Es ſind, wie man ſieht, eigentlich zwo Tafeln, die ſich für jedes Jahrhundert in eine zuſammen ziehen laſſen, und ſo findet man ſie auch in den meiſten aſtronomiſchen Tabellen. Ich habe ſie aber lieber unzuſammengeſchmolzen gelaſſen, weil ſie auf dieſe Art von allgemeinem Gebrauche ſind, und nicht mehr Mühe veurſachen.

§. 96.

§. 96.

Die Tab. XIII. dient ſodann um aus dem für die Zeit der wahren ☌ ☍ gefundenen Ort des ☊, deſſen wahren Ort zu finden. Es iſt dieſes die oben (§. 36) erwähnte Mayerſche Gleichung des ☊.

§. 97.

Eben ſo iſt auch Tab. XIV. von Mayer, und beruht auf der erſten Formel des §. 42. Sie dient, zu finden, wie groß zur Zeit der wahren ☌ ☍ in orbita der Unterſchied der Länge des Monds von der Länge der Sonne iſt.

§. 98.

Die Tab. XV. iſt nach der Formel des §. 62 berechnet, und dient daher auch nur für die Zeit der wahren Syzigien. Das Argument ☽ ver. — ☊ ver. wird nach §. 94. 96. genommen, und ſo findet ſich damit die Breite des Monds in ☌ ☍.

§. 99.

Die Tab. XVI. hat 3 Columnen, welche nach §. 73 ebenfalls für die Zeit der wahren Syzigien berechnet ſind. In dieſen beyden Tafeln habe ich die Zeichen + — ſo genommen, daß + gegen Norden, — gegen Süden bedeutet.

§. 100.

§. 100.

Die Tab. XVII. iſt nach der erſten Formel des §. 71 berechnet, und ſtatt der zweiten iſt angemerkt, daß für die Vollmonde noch zwo Secunden addirt werden müſſen, damit man deſſen ſtündliche Bewegung in orbita richtig erhalte.

§. 101.

Die Parallaxe, Tab. XVIII. habe ich ebenfalls für den Neumond nach §. 63. gerechnet, und unten an der Tafel die 3 Secunden angemerkt, die für den Vollmond noch müſſen addirt werden.

§. 102.

Die Tab. XIX. iſt aus Mayer, und gründet ſich, wie oben (§. 45) erwähnt worden, darauf, daß der Halbmeſſer des Mondes $\frac{3}{11}$ von der parallaxi aequatoria iſt.

§. 103.

Die Tab. XX. habe ich aus dem La Caille genommen. Und da man die Parallaxen und Halbmeſſer zur Beſtimmung der Gröſſe der Finſterniſſe gebraucht, ſo habe ich auch, da es der Raum zulieſſe, die Regeln dafür unten an Tab. XIX. und XX. angezeichnet.

§. 104.

Die Tab. XXI, XXII, XXIII, ſind aus La Caille, und ſetzen die Schiefe des Thier-

 kreiſes

kreiſes auf 23° 28′ 20″. Sie werden fürnemlich bey Berechnung und Entwerfung der Sonnenfinſterniſſen gebraucht.

§. 105.

Dieſe Tafeln finden ſich nun überhaupt ſo angeordnet, daß man bey Berechnung der Syzygien und Finſterniſſen denſelben, der Ordnung nach, folgen kann. Die Rechnung läßt ſich ſehr füglich auf eine Quartſeite bringen, wie man es aus den vier beygefügten Beyſpielen ſehen kann. Ich habe ſie ſämtlich für Berlin berechnet; und werde nun, was zu fernerer Erläuterung dienen kann, noch beyfügen.

X. Berechnung und Entwerfung der Mondsfinſterniſſe.

§. 106.

Es ſey die erſte Mondsfinſterniß 1771 zu berechnen und zu entwerfen. Man ſehe das erſte Beyſpiel. Hier werden aus der erſten Tafel die Epochen des nächſt vorhergehenden 1759ſten Jahrs ausgeſchrieben. Sodann zieht man 1759 von 1771 ab, und der Ueberreſt 12 zeigt, daß in der zweyten Tafel der zwölfte Jahrgang aufzuſchlagen iſt, wenn man, wie es hier geſchieht, in der erſten Tafel die Tage vom Ende des Jahrs gebraucht (§. 27). Dieſe Tage ſind ſubtractiv, und ſo müſſen im

zwölf-

zwölften Jahrgange die nächſt gröſſern genommen werden. Schlägt man demnach den zwölften Jahrgang auf, ſo findet ſichs, daß der Neumond No. 141 eccliptiſch iſt, und da er auf ☋ folgt, ſo iſt der demſelben vorhergehende Vollmond aufzufinden. Zu dieſem Ende werden die Data bey No. 141 ausgeſchrieben, und zu denen von 1759 aus der erſten Tafel addirt. Und ſo finden ſich die Data für den eccliptiſchen Neumond, welchem der geſuchte Vollmond vorgeht. Man ſchlägt demnach die zu Ende der zweyten Tafel befindlichen Data für die Vollmonde auf, und ſubtrahirt ſie; ſo bleiben die Data für den mittlern Vollmond. Daß hiebey ☊ = 0 und ☋ = 6 Zeichen bedeute, iſt bereits oben (§. 30) angemerkt worden.

§. 107.

Es ſind demnach dieſe Data

I°	☊ — 10° 48′ 19″,	das will ſagen, der Mond iſt 10° 48′ 19″ vor dem ☊,
II°	108 T. 2 St. 1′ 47″	vom Anfang des Jahrs 1771 Biſſextilform, mittlere Zeit und Pariſer Uhr.
III°	1ſ 7 3 18	Länge der Sonne nach ihrer mittlern Bewegung.
IV°	9 28 1 59	mittlere Anomalie der Sonne = a.
V°	8 18 22 6	mittlere Anomalie des Monds = M.

Hieraus findet ſich, weil es Vollmond iſt

7^s	7°	$3'$	$18''$	Länge des Monds nach ſeiner mittlern Bewegung.
7	17	51	37	Länge des ☊ nach ſeiner mittlern Bewegung.

Ferners müſſen nach der Regel zu Ende der zweyten Tafel 18 Stunden addirt werden, um die Biſſextilform in die gemeine Jahrform zu verwandeln. Und da der Vollmond für Berlin berechnet werden ſoll, welcher Ort nach der vierten Tafel 44′ 25″ mehr zählt als Paris, ſo werden in allem 18 St. 44′ 25″ addirt, dies giebt ſodann in der dritten Tafel

April 17 T. 20 St. 46′ 12″

Das will ſagen: der mittlere Vollmond iſt zu Berlin, mittlerer Zeit, 1771 den 18. April Morgens um 8 Uhr, 46′ 12″. Man ſehe nun, wie alles dieſes in dem Formular des Beyſpiels angezeichnet iſt.

§. 108.

Bisher ſind die vier erſten Tafeln gebraucht worden; nun folgen die 5 = = 9te, welche dienen, um die Zeit zwiſchen dem mittlern und wahren Vollmonde zu finden. Dieſes habe ich unten auf der vordern Hälfte des Formulars gethan, und zwar nach der Ordnung, wie die Tafeln auf einander folgen. Der Erfolg iſt, daß der wahre Vollmond oder ☍ in orbita 5 St. 52′ 28″ vor dem mittlern, und demnach

April

April 17 T. 14 St. 53′ 44″

das will ſagen:

1771 den 18. Apr. Morgens früh um 2 Uhr 53′ 44″.

nach der Berliner Uhr, alten Calenders und mittlerer Zeit iſt.

§. 109.

Für dieſe Zeit müſſen nun die übrigen Umſtände berechnet werden. Dazu dient nun erſtlich die nächſtfolgende zehnte Tafel. Es werden nemlich für die 5 St. 52′ 28″ die mittlern Bewegungen ausgeſchrieben und zuſammen gerechnet. Da der wahre Vollmond vor dem mittlern iſt, so ſind die Summen ſubtractiv, die für den ☊ ausgenommen, weil der ☊ ſich rückwerts bewegt. Man findet demnach, wie es aus dem Formular zu erſehen, für die Zeit der ☍ in orbita

ſ	°	′	″	
7	17	52	24	= ☊′ reducirte mittlere Länge des ☊
1	6	48	50	mittlere Länge der ☉,
9	27	47	31	anom. med. ☉ = a′
8	15	10	14	anom. med. ☽ = M′
7	3	49	48	mittlere Länge des ☽ = ☽′.

§. 110.

Hierauf folgt die eilfte Tafel, welche

+ 1 41 22

für die Gleichung des Mittelpuncts der Sonne, und demnach

1 8 30 12 = ☉ v.

für ihren wahren Ort, und demnach auch

7 8 30 12 = ☽ v.

für den wahren Ort des Vollmonds in orbita giebt.

§. 111.

Nach dieſen Datis giebt nun die nächſtfolgende Tab. 12. die Gleichung der Zeit

— 6′ 46″ ſo von a′

+ 9 32 ſo von ☉ v

abhängt, und demnach die Summe

+ 2 46

und dadurch

1771. April 17. 14 St. 56′ 30″

für die ☍ in orbita, Berliner Uhr wahrer Zeit, alten Calenders.

§. 112.

Die dreyzehnte Tafel, ſo hierauf folgt, giebt die Gleichung für ☊

— 8′ 59″

demnach

7 17 43 25 = ☊ v. den wahren Ort des ☊ welches von

7 8 30 12 = ☽ v

abgezogen, das wahre arg. latit.

11 20 46 47 = ☽ v — ☊ v

giebt.

§. 113.

Mit dieſem wahren arg. latit. findet ſich in der 14. und 15. Tafel

+ 2′

+ 2′ 12 Red. ad Eccl.
— 48 3 latit. ☽.

Dieſes zeigt an (§. 99), daß die Breite des Mondes ſüdlich iſt. Sodann erhellet daraus, daß die Länge des Mondes in der Ecliptic bereits gröſſer als die Länge der Sonne iſt, und demnach die ☍ in ecliptica, der ☍ in orbita vorgeht.

§. 114.

Die folgenden Tafeln beziehen ſich auf die (§. 109) gefundenen Data, und geben, wie unten auf der hintern Hälfte des Formulars zu ſehen:

Tab. 16	+ 3′ 12″		für die ſtündliche Zunahme der Breite,
da nun	— 48	3	die Breite zur Zeit der ☍ iſt, ſo iſt
	— 44	51	die Breite eine Stunde nachher.
17	+ 34	47	die ſtündl. Bewegung des ☽ in orbita,
18	58	19	die Parallaxis aequatoria.
19	15	53	der Halbmeſſer des ☽,
20	15	55	der Halbmeſſer der ☉,
	2	25	die ſtündliche Bewegung der ☉,
19	42	31	den Halbmeſſer des Erdſchattens, wobey die Parallaxe der ☉ = 10″ geſetzt worden.

§. 115.

Die letzten 3 Tafeln (Tab. 21, 22, 23) gebraucht man bey den Mondsfinſterniſſen nicht anders, als wenn man z. E. vermittelſt der Declination die Stunde des Auf- und Unterganges der Sonne finden will, um zu ſehen,

ob die Mondsfinſterniß ganz, oder zum theil, oder gar nicht unter Tagen eintrift. Eben ſo dienen die Tab. 22. 23 nur, um die ſcheinbare Geſtallt der Finſterniß über dem Horizont, die Himmelsgegend ꝛc. zu finden, wo ſie geſehen wird.

§. 116.

Aus den gefundenen Datis läßt ſich nun die Mondsfinſterniß ohne Mühe entwerfen. Ich werde nur noch vorerſt erklären, was es mit der Reduct. ad Ecclipt. für eine Bewandtnis hat. Man ſetze, eine Mondsfinſterniß ſey nach dem aufſteigenden Knoten, wo folglich die Breite nördlich, die Reduct. ad Ecclipt. aber negativ iſt. In der zwoten Figur ſtelle
Fig. 2. D E die Ecclipticvor; C ſey der Mittelpunct der Sonne, oder des demſelben gegenüberſtehenden Puncts. C D die Reduct. ad Eclipticam, ſo wird die Breite aus D aufwerts in D L getragen, und L iſt der Ort des Mondes in orbita; L F iſt ſodann die ſtündliche Zunahme der Breite. Durch F wird F G mit D E parallel, oder auf D F ſenkrecht gezogen, und mit der ſtündlichen Bewegung des ☽ beſchreibt man aus L durch F G einen Circulbogen G, ſo iſt L G die Projection der Mondbahn und ihre Lage gegen die Ecclipticr und der Mond bewegt ſich von L in G, die Sonne von C gegen E.

§. 117.

§. 117.

Da man aber in ſolchen Projectionen nur auf die relative Bewegung ſieht, ſo zieht man die Bewegung der Sonne von der Bewegung des Mondes ab, welches auf folgende Art geſchieht: Man trägt die ſtündliche Bewegung der Sonne rückwerts aus G in H, und zieht L H. Dieſe Linie iſt demnach die ſcheinbare Mondbahn, in Beziehung auf die Sonne, und L H die ſtündliche Bewegung des Monds, in Beziehung der in C bleibenden Sonne.

§. 118.

Zieht man nun C K auf H L ſenkrecht, ſo iſt C K die kleinſte Entfernung der Mittelpuncte, zur Zeit der gröſten Verfinſterung.

§. 119.

Solle nun dieſes berechnet werden, ſo ſey

$CD = -r$ die reduct. ad ecclipt.
$DL = +\lambda$ latit. ☽.
$LF = +\eta$ incr. horar. latit.
$LG = +H$ horar. ☽ in orbita,
$GH = +h$ horar. ☉.

Hieraus findet ſich

$$FG = \surd(H^2 - \eta^2)$$
$$FH = \surd(H^2 - \eta^2) - h$$

demnach

$$\frac{CD}{FH} = -\frac{r}{\surd(H^2 - \eta^2) - h}$$

 die

die Zeit zwiſchen ☌ ☍ in orbita und in eccliptica. Ferners

$$LH = \sqrt{[FH^2 + FL^2]}$$
$$= \sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]}$$
$$HM = \sqrt{(H^2 - \eta^2)} + r$$
$$MN = [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} + r]\eta : [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h]$$
$$CN = \lambda + \eta - [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} + r]\eta : [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h]$$
$$CK = \frac{HF . CN}{LH} = \frac{CM . FH - FL . MH}{LH}$$
$$= \frac{\lambda\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - \lambda h - \eta h - \eta r}{\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]}}$$
$$KN = (\lambda\eta . \sqrt{(H^2 - \eta^2)} - \eta\lambda h - \eta^2 h - \eta^2 r) : (\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]} . [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h])$$
$$LN = \frac{r\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]}}{\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h}$$
$$KL = (\eta\lambda\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - \eta\lambda h - \eta^2 h - \eta^2 r + rH^2 + rh^2 - 2rh\sqrt{(H^2 - \eta^2)}) : (\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]} . [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h]).$$

§. 120.

Dieſe Formeln laſſen ſich durch die Betrachtung, daß h, η, r mit H verglichen, ſehr klein ſind, merklich abkürzen, wenn man die Wurzelgröſſen in unendliche Reihen auflöſt, und von dieſen die erſten Glieder allein behält. Auf dieſe Art wird man

$\sqrt{(H^2}$

$$\sqrt{(H^2 - \eta^2)} = H - \frac{\eta\eta}{2H} + \&c.$$

$$\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]} = H - h + \frac{h\eta\eta}{2HH} - \&c. = LH$$

$$CK = \lambda - \eta + \frac{r\eta}{H}$$

$$KL = r + \frac{\eta\lambda}{H} - \frac{\eta\eta}{H}$$

$$LN = r + \frac{r\eta\eta}{2HH}$$

erhalten.

§. 121.

Da hiebey $\frac{h\eta\eta}{2HH}$ höchſtens $\frac{1}{2}$ Secunde iſt, ſo kann man ſchlechthin die ſtündliche Bewegung

$$LH = H - h$$

ſetzen, und indem man

$$\frac{LF}{LH} = \frac{\eta}{H - h} = \sin\omega$$

ſetzt, ſo wird man

$MN = FL - FM . \sec\omega$
$CN = DL + FM . \sec\omega$
$CK = CN \cos\omega = DL \cos\omega + FM$
$KN = CN . \sin\omega = DL \sin\omega + FM . \tang\omega$
$LN = FM . \sec\omega$
$KL = DL \sin\omega - FM (\sec\omega - \tang\omega)$

finden.

§. 122.

§. 122.

Es ſey nun, um die erſtberechnete Finſterniß zu conſtruiren, in der dritten Figur A B die Eccliptic, C der Mittelpunct des Erdſchattens. Nach einer angenommenen Scala mache man C D = + 2′ 12″ = der Reduction des Monds auf die Eccliptic. Und da die Breite — 48′ 3″ iſt, ſo wird ſie aus C in L herunterwerts getragen. Ferner da das increm. latit. horar. = + 3′ 12″, ſo trägt man ſie aus L aufwärts in F, und zieht F H mit C B parallel oder auf D F ſenkrecht. Sodann trägt man den Unterſchied der ſtündlichen Bewegung 34′ 27″ — 2′ 25″ = 32′ 2″ aus L in H, und zieht L H, welches die relative Mondsbahn, und zugleich die ſtündliche Bewegung des Monds in dieſer Bahn iſt. Theilt man demnach L H in 60 Minuten, ſo laſſen ſich leicht die Stunden ſo auftragen, daß der Punct L auf 14 St. 56′ 30″ falle. Ferners zieht man C a auf L H ſenkrecht, und ſo iſt a der Punct der gröſten Verfinſterung. Endlich trägt man die Summe der Halbmeſſer des Erdſchattens und des Mondes 42′ 31″ + 15′ 53″ = 58′ 24″ aus C in b und c, und dieſe Puncte fallen auf den Anfang und das Ende der Verfinſterung. Doch iſt zu merken, daß der Erdſchatten, wegen der Athmoſphäre der Erde, um etwas gröſſer iſt, als er ohne dieſelbe ſeyn würde. Mayer giebt die Regel an, daß man die Parallaxe des Mondes um

Fig. 3

$\frac{1}{60}$

$\frac{1}{60}$ Theil vermehren müſte; und ſo würde der Halbmeſſer des Erdſchattens $= 43' \, 32'' =$ $CA = CB$, und $Cb = Cc = 43' \, 32'' + 15.53 = 59' \, 25''$ ſeyn. Endlich kann man mit den Halbmeſſer des Mondes aus a, b, c Circul beſchreiben, und damit die Gröſſe der Verfinſterung beſtimmen.

§. 123.

Die Berechnung iſt nun folgende. Es iſt

$CD =$	$2'$	$12'' =$	$132''$
$DL =$	48	$3 =$	2883
$LF =$	3	$12 =$	192
$LH =$	32	$2 =$	1922
$AC =$	43	$32 =$	2612
$cd =$	15	$53 =$	953
$Cc =$	59	$25 =$	3565

demnach wenn $LHF = \omega$ geſetzt wird

$$\sin \omega = \frac{192}{1922} = 0,09091.$$

$$\omega = 5^\circ \, 13'$$

$$CN = LD + CD \,.\, \operatorname{tang} \omega = 2895''$$

$$LN = CD \sec \omega = 132''$$

$$Na = CN \sin \omega = 263''$$

$$Ca = CN \cos \omega = 2883''$$

Hieraus findet ſich nun der verfinſterte Theil

$mn = an + Cm - Ca = Cc - Ca = 682''$,

demnach

$an : mn = 953'' : 682'' = 6$ Zoll : 4 Zoll. 17′

Ferner um NL und Na in Zeit zu verwandeln, ſchlieſt man

LH:

LH:NL = 1922:132 = 3600″:247″
LH:Na = 1922:263 = 3600 :493

Demnach durchläuft der Mond
NL in 4′ 7″
Er iſt aber in L um 14 St. 56 30

demnach in N um 14 . 52 23 die Zeit der ☍ in ecclíptica. Ferner durchläuft er
Na in 8′ 13″

demnach iſt er in a um 15 St. 0 36 die Zeit der gröſten Verfinſterung. Endlich findet ſich

$ab = ac = \sqrt{(Cc^2 - CN^2)} = 2093''$

dieſes giebt

LH:ac = 1922:2093 = 3600″:3920″

Und ſo durchläuft der Mond ac = ab in 3920″ oder 1 St. 5′ 20″. Er iſt demnach
in b um 13 St. 55′ 16″
c um 16 . 5 56
daher die Dauer der Finſterniß
2 . 10 40

Dieſes iſt nach der erſterwähnten Mayerſchen Beſtimmung des Erdſchattens. Nach der gemeinen Beſtimmung würde für die Zeit
in b um 13 St. 58′ 57″
c um 16 . 2 15
heraus gekommen ſeyn.

§. 124.

Nach dieſer umſtändlichern Erläuterung des erſten Beyſpiels werde ich mich bey dem zweyten

ten kürzer aufhalten. Es betrift den letzten ecliptiſchen Vollmond 1773, den 19. Sept. Abends um 7 Uhr, 3 Minuten, 38 Secunden, alten Calenders, wahrer Zeit und Berliniſcher Uhr. Die ganze Berechnung iſt auf eben die Art angeordnet, wie bey dem erſten Beyſpiele, und die Conſtruction findet ſich in der vierten Figur. A B iſt wiederum die Ecliptic, C der Mittelpunct des Erdſchattens, C D die Reduction auf die Ecliptic, wird, weil ſie negativ iſt, vorwärts getragen. D L die Breite wird ebenfalls, weil ſie negativ iſt, herunterwerts, und L F das increm. latit. horar. da es gleichfalls negativ iſt, aus L in F herunterwerts getragen. F H iſt auf D F ſenkrecht oder mit C B parallel, und L H wird dem Unterſchiede der ſtündlichen Bewegung gleich gemacht, und in 60 Minuten getheilt; damit laſſen ſich die Stunden ſo auftragen, daß L auf 7 Uhr 3′ 38″ falle. C B iſt der Halbmeſſer des Erdſchattens, c d der Halbmeſſer des Mondes. Dabey findet ſich nun, wenn man die Rechnung anſtellt, die Zeit Fig. 4.

des Anfangs um	5 St.	32′	33″
des Mittels um	6 „	59	34
des Endes um	8 „	26	35

und die Gröſſe 8 Zoll 27′, jedoch alles mit Vorausſetzung der gemeinen Berechnung des Erdſchattens.

XI.

XI. Berechnung und Entwerfung der Sonnen- und Erdfinſterniſſe.

§. 125.

Die Berechnung der Sonnen- und Erdfinſterniſſe iſt, in Abſicht auf die dazu erforderlichen Data von der erſtbeſchriebenen Art, weiter nichts verſchieden, als daß die für den Vollmond beſonders hinzukommenden Beſtimmungen (§. 100, 101, 106, 122) wegbleiben. Man kann die ganze Anlage der Rechnung in dem dritten und vierten Beyſpiele ſehen, und ſie wird, nach dem bisher geſagten, keine Schwürigkeit haben. Hingegen werde ich mich bey der Entwerfung dieſer beyden Finſterniſſe etwas länger aufhalten, und zwo Methoden gebrauchen, davon ich die erſtere bereits in der ecliptiſchen Tafel beſchrieben, und von der andern eben daſelbſt nur kurz Erwähnung gethan.

§. 126.

Es ſey demnach die Sonnenfinſterniß, welche im dritten Beyſpiel beſchrieben worden, ſo zu entwerfen, wie ſie zu Berlin wird geſehen werden können. Dazu dient nun die fünfte Figur.
Fig. 5. Man zieht darin die Ecliptic A C B, und ſetzt in C den Mittelpunct der Sonne. Da nun die reduct. ad eccl. = −0′ 52″ und demnach negativ iſt, ſo wird ſie von der Scala α aus C in

C in D getragen. Die Breite + 18′ 58″ iſt poſitiv, und ſo trägt man ſie aus D in L aufwärts; und da auch das incr. lat. horar. = + 3′ 29″ poſitiv iſt, ſo kömmt es ebenfalls aufwerts aus L in F. F H wird auf D F ſenkrecht oder mit D B parallel gezogen, und den Unterſchied der ſtündlichen Bewegung 37′ 43″ — 2′ 23″ = 35′ 20″ trägt man aus L in H, ſo iſt L H die ſcheinbare Mondbahn, in Beziehung auf die in C bleibende Sonne. L H wird auf der Scala 𝔊 in 60 Minuten Zeit eingetheilt, und damit laſſen ſich die Stunden dergeſtalt auftragen, daß L auf 4 Uhr 30′ 53″ falle. A C = C B wird dem ſemid. ♁ = 61′ 0″ gemacht, und damit der Circul A E B R beſchrieben, welcher die vom Monde beſchattete Erde vorſtellt. Auf der beyderſeits verlängerten Linie L H oder der ſcheinbaren Mondbahn lieſſen ſich nun ſowohl mit dem ſemid. umbrae 0′ 54″ als mit dem ſemid. penumbrae = 32′ 28″ Circul beſchreiben, welche die von dem Monde für jede Zeit ganz, oder zum theile beſchattete Theile der Erdfläche vorſtellen würden. Eben ſo lieſſen ſich auf L H die Puncte finden, wo der Mond anfängt oder aufhört die Erde zu beſchatten, ingleichen wo das Mittel hintrift ꝛc. bis dahin iſt demnach die Entwerfung der Erdfinſterniſſe, der Entwerfung der Mondfinſterniſſe ganz ähnlich. Der Unterſchied iſt nur, daß hier andere Halbmeſſer genommen werden, und der Schatten beweglich iſt.

§. 127.

Da nun A E B R die Erde vorſtellt, und zwar ſo, wie ſie zur Zeit der Finſterniß aus der Sonne geſehen wird, ſo iſt C immer der Punct, über welchem in jedem Augenblicke die Sonne vertical oder im Zenith iſt. A E B R iſt der äuſſerſte Rand oder Limbus, der von den Sonnen beleuchteten Halbkugel. E iſt der nördliche Pol der Eccliptic, und E C ſtellt demnach den gröſten Circul vor, welcher aus E in C, als den Ort der Sonne gezogen wird, = 88° 39′ 53″.

§. 128.

Um nun auch den Meridianum durch C zu ziehen, ſo gebraucht man den ang. ecclipt. 88° 39′ 53″ dazu, oder deſſen Zuſatz zu 90 Graden 1° 20′ 7″. Dieſer Winkel wird von E gegen A oder gegen B genommen, je nach dem die Sonne nach oder vor 0 ♋ iſt, wie man es aus der ſechſten Figur ſehen kann. In gegenwärtigem Fall, da die Länge der Sonne 3ˢ 3° 4′ 38″ iſt, wird bemeldter Winkel von E gegen A genommen, und daher E C V = 1° 20′ 7″ gemacht, und V C R gezogen, welches demnach der Meridianus univerſalis in der Projection iſt, und zugleich auch die Erdachſe vorſtellt, ſo wie dieſe aus der Sonne zur Zeit der Finſterniß geſehen wird.

§. 129.

Sieht man nun A C = C B als den Radius an, ſo laſſen ſich zwo Scalen γ, δ verfertigen,

fertigen, wo die Grade der Winkel da gezeichnet werden, wo auf γ ihre Sinus, auf δ die Tangenten der halben Winkel hinfallen. Dieſe Scalen dienen, um die ſogenannte ortographiſche Projection in die ſtereographiſche, oder auch dieſe in jene zu verwandeln.

§. 130.

Auf der Scala δ nimmt man nun den Abſtand der Sonne vom Pol 66° 33′ 51″, und trägt ſie aus C in P. Ferners nimmt man darauf die doppelte Declination der Sonne = 46° 52′ 18″ und trägt ſie aus C in m. Sodann zieht man J C K durch V C R ſenkrecht, und aus m mit dem Halbmeſſer m P beſchreibt man durch P einen Circulbogen, welcher zugleich durch J, K gehen, und den Mittagskreis der ſechſten Stunde ſtereographiſch vorſtellen wird. Hiebey iſt zu merken, daß, wenn die Declination auſtral iſt, ſie als negativ angeſehen, und demnach C m aufwerts getragen werden muß.

§. 131.

Um nun auch den Berliniſchen Parallelkreis zu entwerfen, ſo nimmt man die Aequatorshöhe von Berlin 37° 20′ 30″, und addirt und ſubtrahirt ſie zu und von dem Abſtande der Sonne vom Pol, 66° 33′ 51″. Die Summe 104° 1′ 21″ und die Differenz 29° 6′ 21″ nimmt man auf der Scala δ, und trägt jene

aus C in N, dieſe aus C in Q. Auf N Q, als einen Durchmeſſer, beſchreibt man den Circul N M Q S, welcher der Parallelkreis von Berlin und jeder anderer Oerter von eben der Polhöhe ſeyn wird. Dieſer Circul muß nun noch in Stunden getheilt werden, ſo, daß Q der Mittag, S die ſechſte Stunde Abends, N Mitternacht, und M die ſechſte Stunde Morgens ſey.

§. 132.

Um dieſes zu verrichten, ſo zieht man M S zuſammen, und aus dem Mittelpunct T mit dem Radius T S = T M beſchreibt man einen Circul, wovon in der Figur nur der Bogen a S gezeichnet iſt, weil die Finſterniß Abends eintrift. Dieſer Circul a S wird nun in 24 gleiche Theile, als ſo viele Stunden, getheilt, wovon aber in der Figur nur die 4, 5, 6, 7 Nachmittagsſtunden gezeichnet ſind. Durch jede dieſer Stunden, wie z. E. durch die vierte, zieht man gerade Linien a P in den Pol P, und dieſe werden den Parallelcircul Q S N ſtereographiſch in Stunden theilen.

§. 133.

Iſt dieſes geſchehen, ſo zieht man z. E. für die vierte Stunde die blinde Linie C b, und mit dieſer die Linie c d parallel. Man trägt C b auf die Scale δ, und ſo viel Grade ſie daſelbſt anzeigt, ſo viele nimmt man auf der Scala γ, und trägt ſie aus c in d. Eben ſo verfährt man

man mit den übrigen Stunden, und dadurch wird man die Linie d q, in Stunden eingetheilt, erhalten.

§. 134.

Dieſe Linie ſtellt nun die ſcheinbare Mondbahn vor, wie ſie zu Berlin geſehen wird. Man kann darauf den Punct f finden, welcher dem Mittelpunct der Sonne am nächſten iſt. Nimmt man ferner auf der Scala α den Halbmeſſer der Sonne 15′ 47″, und beſchreibt aus C, als dem Mittelpunct, den Circul r w, ſo ſtellt dieſer die Sonne vor. Aus f beſchreibt man ſodann mit dem Halbmeſſer des Monds 16′ 41″ den Circul t w, welcher den Mond zur Zeit der gröſten Verfinſterung vorſtellt. Eben ſo kann der Mond aus g und h beſchrieben werden, wo der Anfang und das Ende der gröſten Verfinſterung iſt.

§. 135.

Will man aber hiebey genauer verfahren, ſo iſt zu bemerken, daß der Halbmeſſer des Monds, ſo wie derſelbe durch die Berechnung gefunden worden, nur alsdann dient, wo der Mond am Horizonte erſcheint, und folglich für die Oerter die in jedem Augenblicke der Finſterniß am Rande der beleuchteten Halbkugel AEBR herum liegen. Für die übrigen Oerter wird der Halbmeſſer des Monds gröſſer genommen, je nachdem derſelbe höher über dem Horizonte iſt. Es ſey

ω = der Höhe des Mondes über dem Horizonte,
P = der Parallaxe des Mondes,
S = dem horizontalen Halbmeſſer des ☽.
x = deſſen Halbmeſſer in der Höhe ω,
ſo wird

$$x = S(1 + \sin P . \sin \omega)$$

genommen.

§. 136.

So z. E. um dieſe Vergröſſerung für 4 Uhr zu Berlin zu berechnen, trägt man Cb auf die Scala δ, wo ſie auf 53 Grad fällt. Dieſes kann man für die Diſtanz des ☽ vom Zenith anſehen, und ſo iſt

$$\omega = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

Ferner iſt

$$P = 1^\circ \; 1' \; 10''$$
$$S = 0 \; 16 \; 41 = 1001''$$

Dieſes giebt

$$\sin \omega = 0,\; 602$$
$$\sin P = 0,0178$$

demnach

$$x = 1012'' = 16' \; 52''$$

Der Unterſchied x — S würde noch gröſſer ſeyn, wenn die Finſterniß um die Mittagsſtunde wäre. In allem kann derſelbe bis auf 18″ anwachſen, und dieſes iſt, wenn man leicht die Finſterniß auf einem Regalbogen entwirft, allerdings merklich. Wir werden aber in folgenden ſehen, daß dieſe Berechnung ganz wegbleiben kann.

§. 137.

Die ſcheinbare Mondbahn d q iſt keine gerade Linie, ungeachtet ſie ſich ſehr wenig krůmt. Sodann ſind auch die Stunden darauf nicht von gleicher Grôſſe. Sie muß demnach wenigſtens von 10 zu 10 Minuten nach der vorhin beſchriebenen Art eingetheilt werden, wenn man dadurch die Zeit von jedem Grade der Finſterniß genau beſtimmen will. Sie dient ůbrigens nur fůr den Ort, fůr welchen ſie conſtruirt iſt, und muß fůr jeden andern Ort beſonders conſtruirt werden. Will man es fůr viele Oerter thun, ſo iſt das beſte, wenn man ſtatt des einigen Parallelcirculs Q S alle Mittags- und Parallelkreiſe von 5 zu 5, oder wenigſtens von 10 zu 10 Graden entwirft. Da ich dieſes bereits in der ecclíptiſchen Tafel beſchrieben, ſo werde ich mich hier nicht damit aufhalten.

XII. Allgemeine Entwerfung der Erdfinſterniſſe.

§. 138.

Wenn die Erde, wåhrend dem ſie vom Monde beſchattet wird, ſich nicht um ihre Axe drehete, ſo důrfte man ſie nur ſo entwerfen, wie ſie zur Zeit der Finſterniß von der Sonne beleuchtet, und von dem Monde bechattet wird, und man wůrde den ganzen

Verlauf der Finſterniß eben ſo leicht entwerfen können, wie es bey den Mondsfinſterniſſen geſchieht, und wie es auch bey den Erdfinſterniſſen geſchieht, wenn man dabey die Erde nur als eine Kugel betrachtet, ohne auf die ſich während der Finſterniß verändernde Lage der Länder zu ſehen. Da man aber auf dieſe Veränderung allerdings zu ſehen hat, wenn man ſehen will, wie tief jeder Ort im Schatten liegt, und wie groß folglich an jedem Orte die Verfinſterung iſt; ſo habe ich auf Mittel gedacht, die bey ſolchen Entwerfungen vorkommende Hinderniſſe wegzuräumen; und dieſe werde ich nun durch die Betrachtung des vierten Beyſpiels angeben.

§. 139.

Die Berechnung dieſes Beyſpiels iſt, wie die vom vorhergehenden. Es betrift die Sonnenfinſterniß 1769, May 23. 21 St. 20′ 59″ alten Calenders, oder den 4. Junii Morgens um 9 Uhr 20′ 59″ neuen Calenders, Berliner Uhr und wahre Zeit. Die übrigen Data ſind in dem Formular des Beyſpiels zu ſehen. Dieſe Finſterniß habe ich in der 7ten Figur ſowohl ortographiſch als ſtereograpiſch entworfen, und dazu noch in der 8ten Figur das nördliche Planiſphärium gezeichnet, ſo wie es aus dem Südpol geſehen, auf der Fläche des Aequators entworfen wird. Die ſtereographiſche Entwerfung der Finſterniß iſt ebenfalls ſo entworfen,

worfen, wie die Beſchattung der Erde aus dem Südpol geſehen, auf der Fläche des Aequators erſcheinen würde; und ſo entworfen iſt m Q n der Weg des Mondſchattens, g q k der Weg des äuſſerſten Randes des Schattens, und die dazwiſchen gezogenen 3 beynahe concentriſche Circul der Weg der 3, 6, 9 zölligen Verfinſterung. Bey dieſer Entwerfung iſt die Erde ſchlechthin nur als eine Kugel betrachtet. Der Erfolg aber iſt, daß wenn die 7te oder 8te Figur auf ölgetränktem Papier gezeichnet und damit durchſichtig gemacht wird, ſie auf die andere gelegt, und darauf ſo herumgedreht werden kann, wie ſich die Erde, während der Beſchattung, um ihre Axe herumdreht, jedoch ex fumo lucem! Wir müſſen ſehen, wie die beyden Figuren entworfen werden.

§. 140.

Um bey der 7ten Figur und zwar bey der ortographiſchen Projection anzufangen, ſo ſtellt die gerade Linie A C B die Ecliptic vor, und es wird A C = C B = 61′ 13″ = dem ſemid. ♁ gemacht. Dieſe 61′ 13″ habe ich auf der Scala ε genommen, und dieſe Scale dergeſtallt getheilt, damit der Circul AEBR eben ſo groß würde als der gleichnahmigte Circul der fünften Figur. Dieſes iſt nur deswegen geſchehen, damit ich die Scala δ auch hier brauchen konnte. Der Circul AEBR ſtellt nun auch hier, in ſofern es die ortographiſche Projection betrift, den Rand der von der Sonne Fig. 7.

beleuchteten Halbkugel der Erde vor. C iſt der Mittelpunct der Erde und zugleich auch die Projection der Oerter, durch deren Zenith, während der Finſterniß, die Sonne geht.

§. 141.

Nun iſt hier die Reduction auf die Ecliptic + 2′ 32″ poſitiv, und ſo wird ſie von der Scala ε genommen aus C in D getragen. Sodann zieht man CE und DL auf ACB ſenkrecht, und trägt die Breite + 55′ 31″ auf der Scala ε genommen, weil ſie poſitiv iſt, aus D in L aufwerts. Das incr. latit. horar. — 3′ 27″ iſt negativ, und ſo wird es, auf eben der Scala ε genommen, aus L in F herunterwerts getragen. FH wird auf DL ſenkrecht gezogen, und DH = 37′ 59″ — 2′ 23″ = 35′ 36″ = dem Unterſchiede der ſtündlichen Bewegung gemacht, und LH gezogen, und auf beyden Seiten verlängert. LH wird ſodann auf der Scala ζ in 60 Minuten getheilt, und damit laſſen ſich die Stunden auf LH ſo auftragen, daß L auf 21 St. 20′ 59″ falle, weil zur Zeit der ☌ in orbita, der Mond in L, die Sonne in C iſt. Ferner nimmt man auf der Scala ε den Halbmeſſer des Schattens 56″, und des Halbſchattens 32′ 34″, und trägt beyde aus L auf der Linie LD herunterwerts, und erſtern auch heraufwerts. Man ſollte auch letztern heraufwerts tragen, es iſt aber hier unnöthig, weil der Punct weit auſ-
ſerhalb

ſerhalb der Erde fällt. Es iſt demnach λ l der Raum des Halbſchattens, und wird in 12 Zolle getheilt, welches aber in der Figur nur von 3 zu 3 Zoll geſchehen iſt, um ſie nicht mit Linien zu überhäufen. Durch die Theilungspuncten werden gerade Linien mit L H parallel gezogen, und dieſe ſtellen in der ortographiſchen Projection den Weg der 0, 3, 6, 9 zölligen Verfinſterung zur Zeit der an jedem Orte ſcheinbaren Coniunction in ecclipticа vor, weil die Eintheilung auf L D als einer auf der Ecclіptic A C B ſenkrechten Linie geſchehen. Endlich werden durch die auf L H gezeichneten Stunden, und ſo auch von 10 zu 10 Minuten Parallellinien in L D gezogen, welches in der Figur bey den Stunden ganz, bey den Minuten aber nur bis an den Rand A E B geſchehen iſt, weil ſie in folgenden nicht weiter gebraucht werden. Auch muß alles, was die ortographiſche Projection betrift, nur blind gezeichnet werden, damit man es, wenn die ſtereographiſche Projection zu Ende iſt, wieder auslöſchen könne. Dieſes iſt beſonders bey Finſterniſſen nöhig, die näher bey dem Mittelpunct C ſind, weil ſodann die eine Projection, wenigſtens zum Theil, auf die andere fällt.

§. 142.

Um nun aus dieſer ortographiſchen Projection die ſtereographiſche herzuleiten, wo C der Nordpol, A E B R der Aequator werden ſolle; ſo

ſo nehme man den ang. eccl. cum merid. 83° 7′ 12″, und nach Anleitung der ſechſten Figur mache man JCB = 83° 7′ 12″ und ziehe JR gerade durch C, ſo iſt JCR der meridianus univerſalis, und dieſer iſt beyden Projectionen gemein. Ferner aus der reduct. ecclipt. ad aequatorem — 1° 22′ 11″ und dem Ort der Sonne 2^s 13° 51′ 57″ leite man die Rectaſcenſion 2° 12 29′ 46″ her, und dieſem Bogen mache man den Bogen RC♈ gleich, und ſo läßt ſich der colurus aequinoctiorum ♈C♎, und damit auch der colurus ſolſtitiorum r ♋C♑ ziehen. Nun wird auf der Scala δ (Fig. 5) die Schiefe der Ecliptic 23° 28′ 20″ auf ♑C♋ aus C in e, das doppelte 46° 56′ 40″ aus C in h, das Complement 66° 31′ 40″ aus C in ♋ getragen; und ſo läßt ſich aus dem Mittelpunct h die Ecliptic ♈♋♎ beſchreiben, e wird ihr Pol, und S der Ort der Sonne ſeyn.

§. 143.

Der Aequator ARBE wird nun in 24 gleiche Theile als ſo viele Stunden getheilt, und jede Stunde kann ſodann, wo es wird nöthig ſeyn, noch von 10 zu 10 Minuten eingetheilt werden. Die Stunden werden beygeſchrieben, wie in der Figur zu ſehen. Durch die 18te und 6te Stunde in den Punct e wird ſodann ein Circul gezogen, deſſen Mittelpunct auf der verlängerten Linie C S unterhalb R, und

und zwar da ſeyn wird, wo das Complement der Declination $90° - 22° 29' 45'' = 67° 30' 15''$ doppelt genommen $135° 0' 30''$ und von der Scala δ (Fig. 5) aus C herunterwerts getragen, auf der verlängerten Linie CSR hintrift. Der Circul a, 18, e, b, 6 ſtellt den Rand der von der Sonne beleuchteten Hälfte der Erdfläche vor, und S iſt deſſen Pol.

§. 144.

Auf dieſen Circul muß nun alles gebracht werden, was bey der ortographiſchen Projection auf dem Circul A E B war. Und dieſes iſt nun gar nicht ſchwer, weil der Punct S dazu gebraucht werden kann. Denn man darf für jeden Punct P der ortographiſchen Projection nur eine gerade Linie P S ziehen, und p wird die ſtereographiſche Projection des Puncts P ſeyn.

§. 145.

Man bemerke nun ferner, daß in der ortographiſchen Projection jede gerade Linien MN, GK wirkliche Circul vorſtellen, und zwar wenn ſie parallel laufen, ſo ſtellen ſie auch Circul vor, die einerley Pol haben; und wie auch immer die geraden Linien gezogen ſind, ſo liegt der dazu gehörende Pol allemal am Rande AEBR, und zwar mitten zwiſchen den Durchſchnittspuncten. Daher wird auch der Rand AERB alle die Circul, ſo durch die gerade Linien vorgeſtellt

geſtellt werden, ſenkrecht durchſchneiden. Dieſes erleichtert die Möglichkeit, dieſe Circul ſtereographiſch zu entwerfen: denn bey dieſer Projectionsart behalten alle Winkel ihre Gröſſe.

§. 146.

Es ſey demnach z. E. der Weg des Schattens MN ſtereographiſch zu entwerfen. Nach §. 144 fallen die Durchſchnittspuncten M, N in m, n, und ſo muß durch m n ein Circulbogen gezogen werden, welcher den Rand a e b in m und n ſenkrecht durchſchneide. Es iſt klar, daß man dazu das Centrum findet, wenn man an m und n Tangenten zieht. Denn wo dieſe ſich durchſchneiden, da iſt das Centrum, aus welchem ſich der Bogen m Q n ziehen läßt, und dieſer ſtellt nun den ſtereographiſch entworfenen Weg des Schattens vor. Auf gleiche Art werden auch die Wege der beyden Ende des Schattens und jede Zolle des Halbſchattens ſtereographiſch entworfen. So z. E. verwandelt ſich die gerade Linie GK, welche ortographiſch den äuſſern Rand des Halbſchattens vorſtellt, ſtereographiſch in den Circulbogen g q k, und ſo iſt das ganze Revier der Beſchattung in den Raum g e k q g eingeſchloſſen. Die Mittelpuncte der Circul m Q n, g q k &c. liegen ſämtlich in einer geraden Linie 2c.

§. 147.

§. 147.

Auf gleiche Art verfährt man auch mit den Stundenlinien. So z. E. durchſchneidet in der ortographiſchen Projection die Linie der 22ſten Stunde den Rand A E B in P, und nach §. 144 fällt P in p. Da nun A der Pol für die Stundenlinien der ortographiſchen Projection iſt, weil ſie mit L D parallel, demnach mit A C B ſenkrecht ſind, ſo fällt nach §. 144 der Pol A ſtereographiſch in a, ſo wie B in b. Zieht man durch b C a eine gerade Linie, ſo werden auf dieſer die Centra liegen, aus welchen die Circulbögen p, 20, π dergeſtallt gezogen werden müſſen, daß ſie ſowohl in p als π rechte Winkel machen, und a iſt die ſtereographiſche Entwerfung ihres gemeinſchaftlichen Pols.

§. 148.

Auf dieſe Art werden demnach die Stundenlinien entworfen, und die Stunden beygeſchrieben. Zieht man nun durch einen beliebigen Punct t eine gerade Linie C t w, ſo ſchließt man folgendermaſſen: Der Punct t liegt auf den Bogen p t v, welchen die 6 zöllige Verfinſterung durchläuft. w trift auf die 22te Stunde, demnach iſt an dem Ort der Erdfläche, wo der Punct t hintrift, 22 Uhr, das will ſagen 10 Uhr vor Mittag. Da aber t nahe bey der 21ſten Stundenlinie, und zwar bey 20 St. 57′ liegt, ſo iſt zu gleicher Zeit zu Berlin 20 Uhr 57′ Minuten. Der Ort t liegt

demnach

demnach um 1 St. 3′ Zeit öſtlicher als Berlin. Trägt man endlich Ct auf die Scala δ (Fig. 5) ſo findet man 31 Grad für den Abſtand des Puncts t vom Pol. Demnach iſt ſeine Polhöhe 90 — 31 = 59 Grad, dadurch findet ſichs, daß der Punct t hinter dem Ladogaſee liegt, und daß daſelbſt um 10 Uhr vor Mittag die ☌ ☽ ☉ eintrift, und die Verfinſterung von 6 Zollen iſt.

§. 149.

Um aber dieſes Nachrechnen zu erſpahren, ſo iſt dazu die achte Figur entworfen, wo die Grade der Breite vom Pol ausgerechnet von der Scala δ (Fig. 5) genommen ſind. Und da die ganze Conſtruction nach der Berliner Uhr iſt, ſo iſt auch darin der Berliniſche Mittagscircul C O beſonders gezogen. Man legt ſodann die ſiebente Figur auf die achte, oder dieſe auf jene, ſo, daß ſie ſich um das gemeinſame Centrum oder den Pol C drehen laſſen, bis daß z. E. für den Punct t der Berliniſche Mittagscircul C O auf 20 Uhr 57′ bey z fällt. Und ſo wird ſichs finden, daß der Punct t (Fig. 8) über den Punct y zu liegen kömmt. Eben ſo auch, wenn C O (Fig. 8) auf C φ, 20 (Fig. 7) gelegt wird, ſo fällt die Stundenlinie p, 20 (Fig. 7) auf μ ξ (Fig. 8), demnach wenn es zu Berlin 20 Uhr iſt, ſo iſt an allen auf μ ξ liegenden Orten die ſcheinbare ☌ ☽ ☉, und beſonders in η die Finſterniß von

3 Zollen. In μ geht alsdann die Sonne auf, weil p (Fig. 7) am weſtlichen Rande der beleuchteten Halbkugel liegt, und p auf μ trift. p fällt etwas über $\frac{2}{3}$ zwiſchen der Linie der 3 und 6 zölligen Verfinſterung, und ſo iſt die Finſterniß im μ bey aufgehender Sonne etwas über 5 Zoll. In ξ hingegen berührt der Mond die Sonne, und die Finſterniß iſt daſelbſt = 0.

§. 150.

Auf eben die Art wie der Punct y gefunden worden, laſſen ſich jede andere Puncte finden, wo die Finſterniß in ☌ ☽ ☉ auf eine gegebene Stunde eintrift, und von einer gegebenen Anzahl von Zollen iſt. Auch können auf dieſe Art jede Oerter gefunden werden, wo die Sonne beym Aufgange und beym Niedergange anfängt und aufhört verfinſtert zu werden.

§. 151.

So läßt ſich auch die Aufgabe abändern. Man kann z. E. fragen, welcher Punct der Erdfläche in t ſey, wenn die Finſterniß daſelbſt anfängt und aufhört. Dieſe Frage hängt von einem einigen Umſtande ab. Denn welcher Ort immer in t ſeyn mag, ſo iſt es daſelbſt allemal 22 Uhr, und die Polhöhe bleibt ebenfalls einerley. Es kommt daher ſchlechthin nur auf den Unterſchied der Mittagskreiſe oder der Zeit an, um welche die Oerter vom Anfang, Mittel und Ende der Finſterniß, früher und ſpäter,

in t kommen. Da nun t auf dem Kreiſe der 6 zölligen Verfinſterung liegt, ſo nehme man auf der Scala ε die Summe der Halbmeſſer der Sonne und des Mondes 15′ 49″ + 16′ 45″ = 32′ 34″, und trage ſie aus i in ψ und ω. Da nun ψ auf 20 St. 16′, und ω auf 21 St. 51′ fällt, i aber auf der 21ſten Stundenlinie genommen worden, ſo iſt

21 St. — 20 St. 16′ = 0 44′
21 St. 51′ — 20 St. = 0 51′

Demnach trift der Anfang der Verfinſterung um 44′ früher, das Ende um 51′ ſpäther in t als die ☌ ☽ ☉. Und eben dieſes gilt von allen Puncten auf dem Kreiſe der 6 zölligen Verfinſterung. Dieſe Puncten liegen für den Anfang der Finſterniß um 44′ Zeit öſtlicher, für das Ende aber um 51′ weſtlicher als ſie nach §. 149. 150. für die Zeit der ☌ ☉ ☽ gefunden werden. Wenn demnach dieſe gefunden ſind, ſo finden ſich jene ohne Mühe.

XIII. Die Genauigkeit der Projectionen.

§. 152.

Man giebt gemeiniglich den Vorſchlag, die Projectionen der Erdfinſterniſſen auf einen Regalbogen vorzunehmen, ſo, daß der Diameter der Erde wenigſtens einen Fuß groß ſey. Damit wird der Halbmeſſer von 6 Zoll

oder

oder 72 Linien. Und da dieſer in ſo viele Minuten getheilt wird als die Parall. ☽ — Parall. ⊙ beträgt, ſo wird eine Minute immer gröſſer als eine Linie, und eine Minute der ſtündlichen Bewegung gröſſer als ½ Linie. Es läßt ſich daher die Zeit von 15 zu 15 Secunden noch ſehr gut unterſcheiden. Und da ſelbſt die Berechnungen nicht zuverläßiger ſind, ſo kann man ſich aus dieſem Grunde ganz füglich der Conſtruction bedienen.

§. 153.

Deſſen unerachtet behauptet La Caille, daß bey der Conſtruction vieles nur beynahe richtig angenommen werde, und daß daher mehrere kleine Fehler entſtehen, die ſich zuſammen bis auf 3 Minuten belaufen können. Dieſer Ausſpruch, den La Caille ſchlechthin nur vorträgt, gründet ſich vermuthlich auf eine von ihm angeſtellte Unterſuchung, vielleicht auch nur auf eine bloſſe Vergleichung deſſen, was er durch Rechnung und durch Conſtruction gefunden. Da indeſſen allerdings einige kleinere Umſtände bey der Conſtruction nicht geachtet werden, ſo bleibt immer zu unterſuchen, ob ſie ſo viel betragen, und ob ſie in ſolchem Fall nicht können mitgenommen werden, ohne daß die Conſtruction dadurch mühſamer werde. Dieſen beyden Abſichten gemäß, werde ich nun die Unterſuchung vornehmen.

§. 154.

Bey den Projectionen der Erdfinſterniſſen ſetzt man voraus, daß ſie die Finſterniß dergeſtallt entwerfen ſollen, wie ſie aus dem Mittelpunct der Sonne erſcheinen würde; das heiſt nun aus einer Entfernung die über 20000 Halbmeſſer der Erde beträgt. Man kann ſie als unendlich anſehen, und thut es dadurch in der That, daß man die Erde wirklich ortographiſch entwirft, weil dieſe Entwerfung eine unendliche Entfernung des Geſichtpuncts voraus ſetzt. Ich werde bey dieſer Vorausſetzung nach aller Schärfe bleiben, und darüber Rechnung tragen, was die nicht unendliche Entfernung der Sonne auf ſich haben mag.

§. 155.

Fig. 9. Es ſey demnach in der neunten Figur S der Mittelpunct der Sonne F E. T ſey der Mittelpunct der Erde. Das Auge des Zuſchauers befinde ſich in der geraden Linie T S in einer unendlichen Entfernung. Die Diameter F E, A B ſeyn auf S T ſenkrecht. Der Mittelpunct des Mondes L ſey etwas unterhalb der Linie S T. Zieht man demnach L C, R G ſenkrecht auf A B, ſo iſt C die ortographiſche Projection des Mittelpuncts des Monds, und G die von ſeinem obern Rande, und es iſt C T = L W, und C G = L R. Eben ſo entwirft ſich jeder Punct h der Oberfläche der Erde mittelſt der ſenkrechten Linie in H.

§. 156.

§. 156.

Man ziehe nun aus H die gerade Linie HRV, welche den Mond in R berühre, ſo wird einem Zuſchauer in H der Theil der Sonne VE von dem Monde bedeckt erſcheinen, und eben dieſes erſcheint auch dem Zuſchauer in m, weil der Punct m in der Linie HRV liegt. Wenn demnach H die Projection des Puncts m wäre, ſo gieng alles bis ſo weit ganz richtig. Allein H iſt die Projection des Puncts h; und wenn man aus h eine den Mond bey R berührende gerade Linie ziehen wollte, ſo würde dieſe unterhalb V treffen, und daher eine geringere Bedeckung der Sonne von dem Monde angeben. Der Winkel hHm kann bis auf 16 Minuten eines Grades oder $\frac{1}{4}$ Grad betragen, und daher die Lage der Länder bis auf 4 Meilen verrücken. Indeſſen iſt es leicht, darüber Rechnung zu tragen, weil, wenn man die Finſterniß und ihre Gröſſe für den Ort m beſtimmen will, man ſtatt deſſen den Ort h in H entwirft. Dieſes wird ſich im folgenden ergeben.

§. 157.

Man ſetze nun

den halben Diam. des Monds	LTM = ☽.
den halben Diam. der Sonne	STE = ☉.
die Parallaxe des Monds	TLD = P.
die Parallaxe der Sonne	AST = p.
die Breite des Mondes	LTW = λ
den Halbmeſſer der Erde	TA = r
den Winkel - - - -	NTh = ω

ſo iſt

$$LT = BD : \sin TLD = r : \sin P.$$
$$LW = LT . \sin LTW = r . \sin \lambda : \sin P = TC$$
$$LR = LT . \sin LTM = r . \sin ☽ : \sin P$$
$$HT = TN . \sin NTh = r . \sin \omega$$
$$LC = LT . \cos LTW = r . \cos \lambda : \sin P.$$

demnach

$$HC = r \sin \omega + r \sin \lambda : \sin P$$

$$LH = \sqrt{(LC^2 + HC^2)} = \frac{r}{\sin P} \sqrt{(1 + 2 \sin \omega \sin P + \sin \omega^2 \sin P^2)}$$

$$RH = \sqrt{(LH^2 - LR^2)} =$$

$$LH = \sqrt{(LC^2 + HC^2)} = \frac{r}{\sin P} . \sqrt{(1 + 2 \sin \omega \sin \lambda \sin P + \sin \omega^2 \sin P^2)}$$

$$RH = \sqrt{(LH^2 - RL^2)} = \frac{r}{\sin P} . \sqrt{(1 + 2 \sin \omega \sin \lambda \sin P + \sin \omega^2 \, ſP^2 - ſ☽^2)}$$

Ferner findet ſich

$$\sin LHR = LR : LH$$
$$\cos LHR = RH : LH$$
$$\sin LHC = LC : LH$$
$$\cos LHC = HC : LH$$

und damit

$$\sin RHC = \frac{LR . HC + LC . RH}{LH^2}$$

$$\cos RHC = \frac{RH . HC - LR . LC}{LH^2}$$

folglich

$$\cot RHC = \tang HKT = \frac{RH . HC - LR . LC}{LR . HC + LC . RH}$$

Nun

Nun iſt

$$HT + SV = ST \cdot \cot RHC$$
$$ST = r : \sin p$$

demnach

$$SV = \frac{r \cdot \cot RHC}{\sin p} - HT$$

oder

$$SV \cdot \sin p = r \cdot \cot RHC - HT \cdot \sin p$$

Setzt man in dieſer Formel die oben gefundene Werthe, ſo findet ſichs $\frac{SV \cdot \mathit{ſ}p}{r}$

$$= [(\sin\omega\, \mathit{ſ}P + \mathit{ſ}\lambda)\sqrt{(1 + 2\mathit{ſ}\omega\, \mathit{ſ}\lambda\, \mathit{ſ}P + \mathit{ſ}\omega^2\, \mathit{ſ}P^2 - \mathit{ſ}☽^2)} - \mathit{ſ}☽ \cdot \mathrm{coſ}\lambda] : [\mathrm{coſ}\lambda \cdot \sqrt{(1 + 2\mathit{ſ}\omega\, \mathit{ſ}\lambda\, \mathit{ſ}P + \mathit{ſ}\omega^2\, \mathit{ſ}P^2 - \mathit{ſ}☽^2)} + \mathit{ſ}☽(\mathit{ſ}\omega\, \mathit{ſ}P + \mathit{ſ}\lambda)] - \sin\omega \cdot \sin p.$$

und

$$\mathrm{coſ}RHT = [(\mathit{ſ}\omega\, \mathit{ſ}P + \mathit{ſ}\lambda)\sqrt{(1 + 2\mathit{ſ}\omega\, \mathit{ſ}\lambda\, \mathit{ſ}P + \mathit{ſ}\omega^2 \mathit{ſ}P^2 - \mathit{ſ}☽^2)} - \mathit{ſ}☽\, \mathrm{coſ}\lambda] : [1 + 2\mathit{ſ}\omega \cdot \mathit{ſ}\lambda \cdot \mathit{ſ}P + \mathit{ſ}\omega^2 \cdot \mathit{ſ}P^2]$$

§. 158.

Dieſe Formeln ſind nun nach aller Schärfe richtig. Sie ſind aber auch ſo weitläuftig, daß man allerdings darauf denken muß, ſie abzukürzen. Dieſes kann aber ganz füglich und ſehr merklich geſchehen. Denn bey den Finſterniſſen bleibt immer $\mathit{ſ}\lambda < \frac{1}{38}$, $\mathit{ſ}P < \frac{1}{56}$, $\mathit{ſ}\odot$ und $\mathit{ſ}☽ < \frac{1}{215}$. Wenn wir demnach auch $\mathit{ſ}\omega = 1$ ſetzen, ſo geben dieſe Werthe

$$\sqrt{}(1 + 2\,ſ\omega\,ſ\lambda\,ſP + ſ\omega^2\,ſP^2 - ſ☽) = \sqrt{}\left(1 + \frac{1}{1014} + \frac{1}{3136} - \frac{1}{46225}\right)$$
$$= 1{,}0006416. = 1 + \frac{1}{1560}$$

wofür, ohne Bedenken, 1 geſetzt werden kann, weil $\frac{1}{1560}$, in Abſicht auf SV oder die Gröſſe der Finſterniß, auch wenn V in E fällt, keine $\frac{1}{4}$ Minute eines Zolles, oder kaum eine halbe Secunde eines Grades austrägt. Der ganze Ausdruck aber wird.

$$\frac{SV.\,ſp}{r} = (ſP + ſ\lambda)\,.\,1{,}0001384 - (1 - 0{,}0008556)\,ſ☽ - ſ\omega.\,ſp.$$

Und wenn wir

$$ſ\lambda = \frac{56}{38}\,ſP$$
$$ſ☽ = \frac{56}{215}\,ſP$$

nehmen, ſo wird

$$\frac{SV.\,ſp}{r} = ſP + ſ\lambda - ſ☽ + 0{,}0005653.\,ſP.$$

Und ſo iſt $0{,}0005653.\,ſP$ der $\frac{1}{1771}$ Theil der Mondparallaxe, und beträgt demnach höchſtens nur 2 Secunden. Da nun dieſes der gröſte mögliche Unterſchied iſt, ſo können wir ſchlechthin

$$\frac{SV.\,\mathrm{ſin}\,p}{r} = ſ\omega\,ſP + ſ\lambda - ſ☽ - ſ\omega.\,ſp$$

oder

$$\frac{SV.\,\mathrm{ſin}\,p}{r} = (ſP - ſp)\,ſ\omega + ſ\lambda - ſ☽$$

ſetzen. Und eben ſo wird auch

$$\mathrm{coſ}\,RHT = ſ\omega.\,ſP + ſ\lambda - ſ☽$$

Da

Da endlich

$$\frac{SE.\text{ſ}p}{r} = \sin\odot$$

iſt, ſo wird ſich

$$SE:SV = \text{ſ}\odot : [\text{ſ}\omega(\text{ſ}P - \text{ſ}p) + \text{ſ}\lambda - \text{ſ}☽]$$

verhalten.

§. 159.

Wenden wir nun den Ausdruck

$$SV.\text{ſ}p = r\text{ſ}P.\text{ſ}\omega - r\text{ſ}p\,\text{ſ}\omega + r\,\text{ſ}\lambda - r\text{ſ}☽$$

auf die Figur an, ſo findet ſich

$$r\sin\omega = TH$$

$$\frac{r\sin\lambda}{\text{ſ}P} = TC$$

$$\frac{r\sin☽}{\text{ſ}P} = CG$$

demnach

$$SV.\text{ſ}p = TH.(\text{ſ}P - \text{ſ}p) + TC.\text{ſ}P - CG.\text{ſ}P$$

§. 160.

Man ziehe nun SRg, SLc, ERn, ſo ſieht man in g den Mittelpunct S, in n den Rand E von dem Rande des Mondes R, in c aber den Mittelpunct S von dem Mittelpunct L bedeckt, und es iſt

$$SE:SV = gn:gH$$

Ferner iſt

$$Tg:TG = Tc:TC = ST:SL = \sin P:(\text{ſ}P - \text{ſ}p)$$

und

$$\sin nRc : \text{ſ}\odot = \text{ſ}P : (\text{ſ}P - \text{ſ}p)$$

Hieraus ergiebt ſich

$$ng = \frac{r}{ſP - ſp} . ſ☉$$

$$gc = \frac{r}{ſP - ſp} . ſ☽$$

$$Tc = \frac{r}{ſP - ſp} . ſ\lambda$$

§. 161.

Da auch

$$TA = \frac{r}{ſP - ſp} . (ſP - ſp)$$

ſo kann man $r = ſP - ſp$, demnach $\frac{r}{ſP - ſp} = 1$ ſetzen. Man kann aber auch ſtatt der Sinus von ☉, ☽, λ, P, p ſchlechthin nur die Winkel nehmen, und ſo wird

$AT = P - p$, $ng = ☉$, $gc = ☽$, $Tc = \lambda$

gemacht. Dabey iſt nun kein Fehler der über den vorhin erwähnten $\frac{1}{1771}$ Theil von P oder AT gehe.

§. 162.

Es kömmt demnach bey der ortographiſchen Projection ſchlechthin nur auf den Winkel mHh an. Da nun $hHT = 90°$ iſt, ſo iſt

$$\cos mHT = \sin mHh$$

demnach

$$\sin mHh = ſ\omega . ſP + ſ\lambda - ſ☽$$

oder $ſ mHh \backsim HG$

wofür wir ohne Bedenken

$$hHm \backsim SV$$

und damit den Winkel $hHm = SHV$ ſetzen können,

können, welcher die in H geſehene Entfernung des Mondrandes vom Mittelpunct der Sonne iſt. Nun iſt hH auf HT ſenkrecht, und der Winkel hHm < 16′. Dieſes hat den Erfolg, daß auch immer der Bogen mh dem Winkel hHm gleich iſt. Hingegen mit der Perpendiculäre hp hat es eine andere Bewandtnis. Dieſe iſt = hH. ſin hHm. Setzt man demnach in der ortographiſchen Projection Hr = hp = hH. ſin hHm, ſo iſt r der Punct, wo die aus V durch R und h gezogene Linie eintrift; und der Zuſchauer in r wird die Bedeckung eben ſo ſehen, als der in h. Hieraus erhellet demnach, wie viel man vor- und nachgeben muß, wenn man für jeden Punct h die Bedeckung der Sonne vom Monde, vermittelſt der ortographiſchen Projection, bis auf 2 Secunden eines Grades, das will ſagen, ſo genau es auf einem Regalbogen möglich iſt, beſtimmen will.

§. 163.

Nun iſt rH am gröſten, wenn H in T, und V in E fällt: denn alsdenn wird Hh = P − p, und hHm = 16′, welches ich hier für den Halbmeſſer der Sonne ſetze. Demnach wird, wenn man P − p = 61′ ſetzen, in dieſem Fall rH = 61′. ſin 16′ = 17″, welches, wenn es auch auf die Zeit des Anfanges und des Endes der Finſterniß ganz ſeinen Einfluß hat, keine 28″ Zeit beträgt; und für ½ Minute Zeit kann

man

man in der ganzen Sache ohnehin nicht gut ſtehen. Für die Europäiſchen Länder, welche ohnehin nicht unter der Sonne, ſondern näher gegen den Pol liegen, wird der Unterſchied noch merklich geringer. Es iſt übrigens auch c nicht vollkommen die ortographiſche Projection von dem Punct k. Da aber der Winkel CLc, auch wenn C in B fällt nur = p = 10″ iſt, ſo wird der daher entſtehende Fehler in die 96 mal geringer als der bey hHm, und hat demnach vollends nichts zu ſagen.

§. 164.

Ich ſehe alſo nicht, wie La Caille einen Fehler von 3 Minuten finden kann. Es bleibt aber noch ein Umſtand zurücke, und dieſer rührt von der ſphäroidiſchen Figur der Erde her, wo die Axe um $\frac{1}{230}$ Theil kürzer iſt als der Durchmeſſer des Aequators. Dieſes giebt auf die Parallaxe von 61′ einen Unterſchied von 16″, und iſt daher weder mehr noch minder bemerkbar als der vorhergehende, ja, er hebt denſelben, beſonders zur Zeit der Aequinoctien, gröſtentheils auf, weil alsdenn TN den Aequator, und AB die Axe vorſtellt. Da es aber nicht mehr Mühe macht die ſphäroidiſche als die ſphäriſche Erde ortographiſch zu entwerfen, ſo kann der daherrührende Fehler ganz gehoben werden. Und da man, wenn man ſo genau gehen will, den vorhergehenden immer nachholen kann, ſo hat die ortographiſche Projection

alle

alle Zuverläßigkeit, die man von der Gröſſe eines Regalbogens erwarten kann.

§. 165.

Endlich könnte es vielleicht auch noch daran fehlen, daß man bey der ortographiſchen Projection die Bewegung des Mondes von der Sonne gleichförmig ſetzt, da doch der Mond ſeine Geſchwindigkeit ſtündlich, ja augenblicklich ändert. Allein dieſe Beſorgnis iſt nicht ſo groß als ſie ſcheint. Wir dürfen zu dem Ende nur die oben (§. 68) gegebene allgemeine Formel der ſtündlichen Bewegung vornehmen. In dieſer geben alle Glieder, die nur mit der erſten Dignität von x multiplicirt ſind, den gleichförmigen Theil der Bewegung des Mondes in x Stunden. Die mit x^2 und x^3 multiplicirten Glieder geben den ungleichförmigen Theil, auf den wir hier eigentlich ſehen. Wenn wir unter dieſen diejenigen weglaſſen, die ſelbſt, wenn x = 3 Stunden iſt, auf keine Secunde anwachſen, ſo ſind die übrigen

$$= +1,021\, x^2 \int M - 0,376 x^2 \int 2E$$
$$- 0,140 x^2 . \int 2M + 0,155 x^2 \int (2E - M)$$

Es dauert aber keine Erdfinſterniß 6 Stunden. Wenn wir demnach x = ± 3 ſetzen, ſo beträgt die Ungleichheit

$$= +9'',189 \int M - 3,384 \int 2E$$
$$- 1,260 \int 2M + 1,395 \int (2E - M)$$

Und da ſich hier 2 E = 0 ſetzen läßt, ſo wird die

die Ungleichheit für 3 Stunden Bewegung

$= 7'',794\ ſ M$

$- 1,260\ ſ\, 2\, M.$

Für 2 Stunden iſt ſie nur

$= + 3,464\ ſ M - 0,560\ ſ\, 2\, M$

und für 1 Stunde nur

$= 0,866\ ſ M.$

Man kann ſich demnach, wenn man ſo genau gehen will, dieſer Formeln bedienen, um der Ungleichheit auf eine ſehr leichte Art Rechnung zu tragen; und ſo iſt auch dieſem Anſtande geholfen. Die Ungleichheit in dem increm. latit. horar. und ſo auch in der Parallaxe beträgt für 3 Stunden eine unerhebliche Kleinigkeit; und ſo bleibt die Mondbahn in der ortographiſchen Projection eine gerade Linie. Endlich beträgt die Aenderung der Axe V R (Fig. 6) für 3 Stunden Zeit ebenfalls ſo viel als nichts, beſonders bey den Aequinoctien. Sie iſt bey den Solſtitien am gröſten; und beträgt daſelbſt die 3 ſtündige Bewegung der Sonne 7' 23'' = 0,002148 mit dem Sinus der Neigung der Ecliptic ſin (23° 28' 20'') = 0,3983 multiplicirt, demnach = 0,0008554 des Halbmeſſers, oder P — p = 61' gerechnet, 3 Secunden, das will ſagen, auf einen Regalbogen einen Punct. Aus allem erhellet demnach, daß die ortographiſche Projection von dem Fehler von drey Minuten, die ihr La Caille vorgeworfen, ganz frey iſt, und daß

ſie

ſie, mit leichter Mühe, ſo zuverläßig gemacht werden kann, als man es verlangt.

XIV. Die Zeit der gröſten Verfinſterung.

§. 166.

Die Finſterniß iſt aller Orten am gröſten, wenn der Mittelpunct des ☽ und der ☉ einander am nächſten ſind. Dieſe kleinſte Entfernung läßt ſich bey der ortographiſchen Projection, durch Verſuchen, ſehr leicht und genau finden. Und dieſes iſt auch der Vorſchlag, der gewöhnlich gegeben wird. Hingegen geht es dabey mit der Beſtimmung der Zeit nicht ſo leicht, weil ſich dieſe Entfernung in 2 bis 3 Minuten Zeit ſehr wenig ändert. Die Sache muß demnach aus dem Differentialcalcul gefunden werden, und da verfällt man auf eine tranſcendente Formel, welche für den Fall, wo man für einen gegebenen Ort die Zeit der gröſten Verfinſterung ſucht, ohne unendliche Reihen oder andere Näherungsarten nicht aufgelöſt werden kann. Hingegen läßt ſie ſich für einen ganzen Parallelcircul der Erde geometriſch conſtruiren, wenn die Oerter darauf zu beſtimmen ſind, wo die gröſte Verfinſterung zu einer fürgegebenen Stunde eintrift. Dieſe Conſtruction werde ich nun in der zehnten Figur folgendermaſſen beſchreiben.

§. 167.

§. 167.

Fig. 10. Dieſe Figur ſtellt eben die Finſterniß wie die fünfte Figur vor. Der Unterſchied iſt nur, daß der Parallelcircul von Berlin M T N hier ortographiſch entworfen, als eine Ellipſe erſcheint, deren längere Axe M N, die kürzere m n iſt. E V iſt die ſcheinbare Mondbahn in Stunden getheilt. Auf M N beſchreibt man den halben Circul M H N, und durch H wird die Linie H L auf die Mondbahn E V ſenkrecht gezogen, und es wird

$$LH = \frac{12}{3,14159\ldots} = \frac{42}{11}$$

einer Stunde der Mondbahn gemacht. Auf dieſe Art wird der Circul M H N in q L Q hinaufgerückt, ſo, daß H in L fällt, und L O mit H O parallel bleibt. Der Circul q L Q wird ſodann in Stunden getheilt. Ferners trägt man n H, welcher der Unterſchied der beyden halben Axen der Ellipſe M n N iſt, aus D in G und g, und theilt D G und D g nach den Sinus der Stundenbögen ein, welches, vermittelſt des Circuls g F G, leicht geſchehen kann. Und damit iſt nun die Sache vorbereitet.

§. 168.

Soll nun z. E. gefunden werden, welcher Ort auf dem Berliniſchen Parallelkreiſe in T um 4 Uhr nach Mittag die gröſte Verfinſterung hat; ſo nimmt man die vierte Stunde

auf

auf DG und auf den Bogen LQ, und zieht ſie durch eine gerade Linie RS zuſammen. Mit dieſer Linie wird ſodann TV parallel gezogen, und damit iſt V der Mittelpunct des Mondes, zu der Zeit, wo der Mond aus T geſehen die Sonne am meiſten bedeckt. Nun fällt V auf 5 Uhr 23′ nach der Berliner Uhr, in T aber iſt es erſt 4 Uhr. Demnach liegt der Ort T um 1 St. 23′ Zeit weſtlicher als Berlin, welches in Grade verwandelt $20\frac{3}{4}$ Grad giebt. Der Ort T fällt demnach mitten in Irrland auf dem Berliniſchen Parallelcircul, von 52° $32\frac{1}{2}$′ Breite. Eben ſo verfährt man auch für jede übrigen Stunden. Man findet dadurch eigentlich nur den geringſten Abſtand der Mittelpuncte. Man kann aber ſodann ohne Mühe ſehen, ob eine Finſterniß dabey möglich iſt, weil dieſer Abſtand TV kleiner als die Summe der Halbmeſſer der ☉ und des ☽ ſeyn muß. Für jede andere Parallelcircul muß die Conſtruction beſonders vorgenommen werden.

§. 169.

Die Linien RS ſind unter ſich von der parallelen Lage nicht ſehr verſchieden, und wenn die Finſterniß im Aequinoctio iſt, ſo wird der Unterſchied am geringſten, weil alsdann Dn = o iſt, und demnach G, N und S, T zuſammen fallen. Dieſer Umſtand von der faſt parallelen Lage der Linien RS macht, daß man die Aufgabe umkehren, und durch eine

ſehr geſchwinde Näherung finden kann, um wie viel Uhr die Finſterniß an einem fürgegebenen Orte am gröſten iſt. So z. E. für Berlin, wo T und V auf eine Zeit treffen müſſen, ſieht man ſogleich, daß dieſes gegen $5\frac{1}{2}$ Uhr geſchehen müſſe. Man ſucht demnach welcher Ort auf dem Berliniſchen Parallelkreiſe um $5\frac{1}{2}$ Uhr die gröſte Verfinſterung hat, und findet, daß dieſer Ort nur $2\frac{1}{2}$ Minuten öſtlicher liegt. Da nun der Mondſchatten, beſonders gegen 6 Uhr, vielfach ſchneller fortläuft, ſo darf man nur dieſe $2\frac{1}{2}$ Minuten von halb 6 Uhr abziehen, und die gröſte Verfinſterung zu Berlin wird auf 5 Uhr $27\frac{1}{2}$ Minuten fallen. Für andere Oerter muß man die Stunden auf E V dergeſtalt ändern, als wenn die Figur für dieſelben conſtruirt worden wäre, oder werden ſollte.

§. 170.

Dieſes Verfahren habe ich vermittelſt des Differentialcalculs gefunden. Es läßt ſich aber auch bloß aus der Zuſammenſetzung der Bewegung herleiten. Man beſtimmt die Geſchwindigkeit des Puncts T nach ſeiner tangentialen Richtung durch den Raum, den derſelbe mit dieſer Geſchwindigkeit in einer Stunde durchlaufen könnte. Dieſes giebt die erſte Seite des Parallelogramms. Die andere Seite giebt die ſtündliche Bewegung des Mondes auf E V, welche aber rückwerts getragen wird. Die Diagonale giebt ſodann die relative Bewegung

des

des Puncts T in Beziehung auf den ſtehenblei-benden Mond, und V T wird auf dieſer Diagonale ſenkrecht ſeyn. Denn es ſey in der eilften Figur T t die Geſchwindigkeit des Puncts T in ſeinem Parallelkreiſe, T λ die Geſchwindigkeit des Monds in ſeiner Bahn, welche hier rückwerts genommen wird. Man vollende das Parallelogramm T λ d t und ziehe die Diagonale T d, ſo ſtellt dieſe die relative Geſchwindigkeit und Bewegung des Puncts T, in Beziehung auf den Mond, vor. Zieht man demnach T V auf T d ſenkrecht, ſo wird V der Punct ſeyn, wo der Mond in ſeiner Bahn V E die kleinſte Entfernung von T hat. Fig. 11.

XV. Die Zuverläßigkeit bey den Finſterniſſen.

§. 171.

Wenn es überhaupt nur die Frage iſt, ob eine Finſterniß ſeyn werde, ſo hat es damit keine Schwürigkeit, ſo oft die Finſterniß, nach der Berechnung, eine merkliche Gröſſe hat. Ich habe in der eccliptiſchen Tafel gezeigt, daß man damit ausreicht, wenn man dabey ſchlechthin nur die mittlern Bewegungen gebraucht, und allenfalls auf eine von der Jahrszeit abhängende kleine Verbeſſerung mit acht hat. Hingegen giebt es Umſtände, wo mehrere Schärfe gebraucht werden muß, und

wobey auch die genaueſten Berechnungen fehl ſchlagen können. So z. E. wenn eine Sonnenfinſterniß total iſt, ſo ſucht man, beſonders wenn ſie auf Europa fällt, die Oerter zu beſtimmen, wo ſie total geſehen wird. Hiebey wird nun der geringſte Fehler in den Tafeln merklich; und wer dieſe Oerter mit allzuvieler Zuverläßigkeit angeben würde, der würde ſich und die Aſtronomie dem Gelächter, ſelbſt des gemeinen Mannes, bloß geben, und von denen, die einer ſolchen Erſcheinung zu Gefallen eine Reiſe vergeblich vornehmen würden, nichts wenigers als Dank und Segen erhalten. Eben ſo verlangt man von den Tafeln die äuſſerſte Genauigkeit, wenn man vermittelſt derſelben und der Beobachtung die geographiſche Länge des Ortes finden will, wo eine Finſterniß beobachtet worden.

§. 172.

Soll nun hiebey der Grad der Zuverläßigkeit beſtimmt werden, ſo kömmt es fürnehmlich auf den Fehler der Länge und der Breite des Mondes zur Zeit der Finſterniß an. Der Fehler in der Länge kann zuweilen auf eine Minute eines Grades anwachſen, und allenfalls, wiewohl nur ſelten, etwas gröſſer ſeyn. Dieſes verſteht ſich von den Mayerſchen Tafeln. Denn die, ſo vor denſelben herauskamen, fehlen wohl zuweilen 8 bis 10 und mehr Minuten, und ſind daher um eben ſo viel unzuverläßiger.

Dazu

Dazu kömmt nun noch, daß man bey der Beobachtung ſelbſt gar leicht eine Minute fehlen kann. Es kann und muß aber dieſer Fehler nicht auf Rechnung der Tafeln geſetzt werden.

§. 173.

Mit der Breite des Mondes hat es eine andere Bewandtnis. Sie hängt bey den Finſterniſſen dergeſtalt von dem Orte des ☊ ab, daß, wenn man dieſen Ort und den Ort der Sonne und die Neigung der Mondbahn gegen die Ecliptic weiß, die Gröſſe der Finſterniß, oder vielmehr der geringſte Abſtand der Mittelpuncte dadurch, auch ohne Rückſicht auf die Zeit, gefunden werden kann. Und dieſes iſt auch der Grund, warum die ſchlechteſten Tafeln, in Abſicht auf die Breite des Mondes, noch ſo ziemlich zuſammen treffen, ſo ſehr ſie auch, in Anſehung der Zeit, von einander abgehen. Aus eben dieſem Grunde lieſſen ſich die Finſterniſſe, in Abſicht auf ihre Gröſſe, auf der ecliptiſchen Tafel vorſtellen, ungeachtet dieſelbe nach den mittlern Bewegungen conſtruirt iſt, welche doch zuweilen die Finſterniß bis auf 14 Stunden früher oder ſpäther angeben, als ſie wirklich zutreffen.

§. 174.

So lange man die in der 13ten Tafel vorgeſtellte Ungleichheit in der Bewegung des Knoten nicht wuſte; ſo konnte hieraus ein Fehler

entſtehen, der aber, in Abſicht auf die Breite des ☽ ſich nur auf 1 Minute belaufen könnte. Denn da dieſe Ungleichheit ſich nur auf 10′ 18″ beläuft, und daher das argum. latit. nur um ſoviel zu groß oder zu klein wird, ſo erhellet aus der funfzehnten Tafel, wo für 1 Grad höchſtens nur 5′ 14″ Breite gerechnet wird, daß der daher entſtehende Fehler ſich nur auf 51″ 48‴ und daher nicht ganz auf eine Minute belaufen kann. Die Neigung der Mondbahn und den Ort des ☊ hatte man vorzeiten fürnemlich aus den Finſterniſſen geſchloſſen, und erſtere, als eine runde Zahl, von 5 Graden genommen. Die funfzehnte Tafel giebt ſie für die Syzigien nur um 18″ gröſſer. Und dieſes beträgt für die Finſterniſſe, die 5 und mehrmal näher bey dem Knoten ſind, eine unbemerkbare Kleinigkeit.

§. 175.

Bis dahin gieng demnach alles richtig. Es hat aber der Mondlauf auch in Abſicht auf die Breite ſolche Ungleichheiten, wobey die Rechnung nicht mehr ſo einfach bleibt. Mayer begnügt ſich zwar mit den zwo oben (§. 43) angegebenen Gleichungen. Und dieſe mögen wohl überhaupt deswegen einfacher ſeyn, weil er dabey den wahren Ort der Sonne, des Mondes und des Knoten gebraucht. Ich habe aber, um den Unterſchied zu finden, aus dieſen beyden Gleichungen diejenige hergeleitet,

wo die Breite des Mondes durch die mittlern Bewegungen vorgeſtellet wird, und dieſe war lange nicht mehr ſo einfach. Es ſey, alles nach den mittlern Bewegungen,

☽ — ☊ = λ
☽ — ☉ = E
anom. med. ☽ = M
anom. med. ☉ = a

ſo iſt nach der darüber angeſtellten Rechnung, die Breite des Mondes in Secunden eines Grades ausgedrückt

$$
\begin{aligned}
&= 18484 . \sin\lambda && - 1015\,\text{ſ}(\lambda + M) && + 20\,\text{ſ}(2E - \lambda - 2M) \\
&- \quad 12\,\text{ſ}\,3\lambda && + 1033\,\text{ſ}(\lambda - M) && + 19\,\text{ſ}(2E - \lambda + a) \\
&+ 626\,\text{ſ}(2E - \lambda) && + \quad 63\,\text{ſ}(\lambda - 2M) && - 12\,\text{ſ}(2E - \lambda - a) \\
& && + 118\,\text{ſ}(2E + \lambda) && - 12\,\text{ſ}(4E - \lambda - M) \\
& && - 227\,\text{ſ}(2E + \lambda - M) && \\
& && - 169\,\text{ſ}(2E - \lambda + M) &&
\end{aligned}
$$

wo noch eine Menge von kleineren Gliedern, die unter 12″ ſind, weggelaſſen worden. Solche kleinere Glieder ſollten ſich nun auch bey der Mayerſchen Gleichung (§. 43) befinden. Allein Mayer ſagt ausdrücklich, daß er aus Ermanglung tauglicher Beobachtungen, daran nicht habe denken können, und daß er daher für 1 Minute Fehler nicht gut ſtehe. Indeſſen glaubt er, daß dieſe Minute ſich bey den Finſterniſſen auf 20″ herunterbringen laſſe, oder nicht beträchtlicher ſey.

§. 176.

Nun wird bey der Projection der Erdfinſterniſſe der Halbmeſſer der Erde, welcher 860

Meilen iſt, durch den Unterſchied der Parallaxen P—p vorgeſtellt (§. 161). Dieſer Unterſchied, wenn p = 10″ genommen wird, iſt, vermög der achtzehnten Tafel, dergeſtalt veränderlich, daß er von 53′ 47″ bis auf 61′ 19″ in den Syzigien anwachſen kann. Es iſt demnach

53′ 47″ : 860 = 1′ : 15, 99
61 : 19 : 860 = 1 : 13, 65

Und ſo beträgt 1 Minute Fehler in der Projection einen Fehler von $13\frac{2}{3}$ bis 16 Meilen. Iſt demnach die Mayerſche Beſtimmung der Breite bis auf 20″ in den Finſterniſſen richtig, ſo beträgt dieſes eine Ungewißheit von nicht mehr denn 5 Meilen. Es iſt aber dieſes nicht von der Erdfläche, ſondern von dem plano projectionis zu verſtehen: denn auf der Erdfläche ſelbſt nimmt der Fehler beynahe in umgekehrter Verhältnis des Sinus der Sonnenhöhe zu.

§. 177.

Es iſt ferner bey den Erdfinſterniſſen der Halbmeſſer des Schattens = ſemid. ☽ — ſemid. ☉. Nimmt man demnach aus der 18 und 19ten Tafel den gröſten Halbmeſſer des ☽ = 16′ 46″, und aus der 20ſten Tafel den kleinſten Halbmeſſer der ☉ = 15′ 47″, ſo iſt der Unterſchied = 0′ 59″. Und dieſes iſt demnach der gröſte mögliche Halbmeſſer des Schattens. Da derſelbe alsdann ſtatt findet, wenn P = 61′ 29″ iſt, demnach auf 1 Mi-

nute Fehler $13\frac{2}{5}$ Meilen gerechnet werden, ſo iſt

$$60'' : 59'' = 13,65 : 13,42$$

Demnach iſt auf dem Projectionsplan die halbe Breite des Schattens von $13\frac{2}{5}$ Meilen. Dieſe Breite wird ebenfalls in umgekehrter Verhältnis des Sinus der Sonnenhöhe gröſſer.

§. 178.

Die Folge, die wir hieraus ziehen können, iſt, daß in denen Fällen, wo der Schatten am gröſten iſt, diejenigen Oerter, welche nach der Rechnung der Mittelpunct des Schattens trift, die Sonne ganz gewis völlig von dem Monde bedeckt ſehen. Denn wenn auch der Fehler wegen der Breite in Projectionsplan ſich auf 10 Meilen belaufen ſollte, ſo liegen ſolche Oerter dennoch noch $3\frac{2}{5}$ Meilen tief im Schatten, und ſehen folglich die Sonne ganz verfinſtert. Um ſo viel mehr noch, wenn der Fehler ſich höchſtens nur auf 5 Meilen beläuft.

§. 179.

Iſt hingegen ſemid. ☽ < ſemid. ☉, ſo erſcheint die Sonne ringförmig. Der gröſte mögliche Ring iſt, wenn der Mond in der Erdferne, die Sonne aber in der Erdnähe iſt: denn alsdenn iſt

$$\text{ſemid. ☽} = 14' \; 43''$$
$$\text{ſemid. ☉} = 16 \;\; 20$$

$$\text{der Unterſchied} = - \; 1 \;\; 37$$

Da nun alsdann 1 Minute Fehler 16 Meilen beträgt, ſo iſt

$$60'' : 16 \text{ M.} = 97'' : 25,87 \text{ M.}$$

Es ſind daher die Grenzen, wo man den gröſten möglichen Ring ſehen kann, faſt doppelt weiter als die Grenzen der gröſten möglichen Verfinſterung. Und um ſo viel Zuverläßiger kann, wer den Ring ſehen will, die Reiſe nach dem nächſten Orte, wo nach der Rechnung der Mittelpunct des Halbſchattens durchgeht, anſtellen.

§. 180.

Wenn hingegen der ſemid. ☽ und ☉ ganz, oder beynahe gleich ſind, ſo wird auch dieſer Grad von Zuverläßigkeit vermindert, weil es dabey geſchehen kann, daß der Halbmeſſer des Schattens keine halbe Meile breit ausfällt, die Tafeln aber um 5 Meilen fehlen können. Man kann ſich ſodann begnügen, die Finſterniß, ſo fern man ſie an ſeinem Wohnorte ſieht, zu beobachten.

§. 181.

Die Zolle der Verfinſterung ſind zwölfte Theile des Sonnendurchmeſſers, oder ſechſte Theile des Halbmeſſers der Sonne. Nun verändert ſich der Halbmeſſer der Sonne von 15, 47″ bis zu 16′ 20″. Dieſes giebt für die Breite von 6 Zollen

$$1' : 15' \, 47'' = 13,65 \text{ Meil.} : 215,44 \text{ Meil.}$$
$$1' : 16 \;\; 20 \;\; = 15,99 \qquad : 261,17$$

dem-

demnach für 1 Zoll 35, 91 und 43, 53 Meilen. Inner dieſen Grenzen iſt demnach auf dem Projectionsplan die Gröſſe eines Zolles der Verfinſterung veränderlich. Kann ſich nun der Fehler der Tafeln auf 5 Meilen belaufen, ſo iſt die Beſtimmung der Gröſſe der Finſterniß um $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{8}$ Zoll unzuverläßig.

§. 182.

Was endlich die Fehler betrift, ſo von der Länge des Mondes abhängen, ſo betreffen ſie die Zeit und etwann auch die geographiſche Beſtimmung der Länge der Oerter, wo die Finſterniß beobachtet wird. Wenn hiebey die Unzuverläßigkeit der Tafeln auf 1 Minute eines Grades geſetzt wird, ſo beträgt dieſes ungefehr 2 Minuten Zeit, weil die ſtündliche Bewegung des Monds von der Sonne zwiſchen 27 und 36 Minuten fällt. Dieſer Fehler hat demnach eben den Erfolg, als wenn die Tafeln für einen Ort berechnet wären, welcher um 2 Minuten Zeit öſtlicher oder weſtlicher liegt. Der Irrthum oder die Unzuverläßigkeit in Beſtimmung der geographiſchen Länge, trägt demnach $\frac{1}{2}$ Grad aus; dazu kann aber noch $\frac{1}{2}$ Grad kommen, ſofern man in der Beobachtung ſelbſt um 1 Minute fehlen kann.

XVI. Tafeln für den Mondlauf auſſer den Syzigien.

§. 183.

Den bisher beſchriebenen Tafeln für die Syzigien, habe ich noch einige andere beygefügt, um den Mondlauf auch auſſer den Syzigien zu berechnen, ohne daß dazu beſondere Epochen nöthig wären. Man verwandelt nemlich die Zeit, für welche der Mondlauf berechnet werden ſolle, in die Biſſextilform und alten Calender. Sodann findet man aus der erſten und zweyten Tafel die Zeit und Umſtände des nächſtvorhergehenden mittlern ecliptiſchen Neumonds, welches, wie wir oben (§. 29. 30) geſehen haben, durch eine bloſſe Addition geſchieht. Dieſe Zeit wird von der fürgegebenen abgezogen, damit man für jede Tage, Stunden, Minuten ꝛc. aus der zehnten Tafel die mittlere Bewegungen addiren, und dadurch die Umſtände für die fürgegebene Zeit finden könne.

§. 184.

Da man aber dadurch nur den mittlern Ort des ☽, der ☉ ꝛc. findet, ſo müſſen dieſe erſt noch auf den wahren Ort reducirt werden. Dazu dienen nun folgende Tafeln.

1°. Für die Sonne, wird ſo wie oben die Tab. 12 gebraucht.

2°. Für

2°. Für die Gleichung der Zeit, die nächſtfolgende Tab. 13, und was dieſe austrägt, wird aus der Tab. 10 nachgeholt.

3°. Für den wahren Ort des ☊ die Tab. 13.

4°. Für den wahren Ort des Monds in ſeiner Bahn die Tab. 24, 25, 26, 27, 28, welche nach den Formeln des §. 49. berechnet ſind.

5°. Für die Reduction des Monds auf die Ecliptic die Tab. 14, wie oben.

6°. Für die Breite des Monds die Tab. 29, welche die zwo Mayerſchen (§. 43) vorſtellt, weil die Formeln des §. 175, ohne Noth, mehrere Tafeln würden erfordert haben.

7°. Für die Parallaxe die Tab. 30, welche ebenfalls die 3 Mayerſchen (§. 44) vorſtellt, weil ſie für die mittlern Bewegungen kaum um 1 Secunde verſchieden ſind.

8°. Für die ſtündliche Bewegung des Monds in ſeiner Bahn die Tab. 31, welche aus den Formeln des §. 68. 70 berechnet iſt.

9°. Für die ſtündliche Veränderung der Breite, die Tab. 32. Dieſe Tafel habe ich aus der Formel des §. 175 hergeleitet, und gefunden, daß die ſtündliche Veränderung der Breite

$$= 178'' \cos\lambda + 3\cos(2E+\lambda)$$
$$+ 5\cos(2E-\lambda) - 4\cos(2E+\lambda-M)$$
$$- 19\cos(\lambda+M) - 3\cos(2E-\lambda+M)$$

iſt.

10°.

10°. Für den horizontalen Halbmeſſer des Mondes, vermittelſt der horizontalen parall. aequatoria die Tab. 19, wie oben.

11°. Für die ſtündliche Bewegung und den Halbmeſſer der Sonne die Tab. 20, wie oben.

12°. Für die Declin. ang. eccl. und reduct. ad eccl. die Tab. 21, 22, 23, wie oben.

Die Gleichung, ſo von dem Fortrücken der Nachtgleichen herrührt, habe ich weggelaſſen. Sie beträgt höchſtens 17″ oder 18″, und kann daher mit unter die übrigen weggelaſſenen kleinern Artickel (§. 48) gerechnet werden. Sie nimmt indeſſen zu und ab, wie der Sinus der doppelten Länge des ☊, indem ſie = — 18″ ſin 2 ☊ iſt. Und ſo wird ſie, wenn die Finſterniſſe um die Zeit der Nachtgleichen eintreffen, auf nichts heruntergebracht.

§. 185.

Da ich die Tafeln von No. 1 bis No. 23 nach der Ordnung auf einander folgen laſſen, wie ſie bey Berechnung der Finſterniſſe am bequemſten iſt, ſo konnten ſie nicht zugleich auch für die übrigen Umſtände des Mondlaufes angeordnet werden. Ich habe demnach in dem vorhergehenden §. die Ordnung angegeben, wie ſie aufzuſchlagen ſind, wenn der Mond auſſer den Syzigien iſt. Man ſieht daraus, daß ſie von Tab. 24 bis Tab. 32 dennoch auf einander folgen, und nur nach Tab. 28 die Tab. 14 nach-

nachgeſchlagen werden muß. Ich werde nun den Gebrauch durch einige Beyſpiele erläutern.

XVII. Berechnung des wahren Orts der Sonne und des Mondes auſſer den Syzigien.

§. 186.

Es geſchieht ſehr oft, daß man, ohne Rückſicht auf den Mondlauf, den wahren Ort der Sonne, ihre Inclination, die Gleichung der Zeit ꝛc. zu wiſſen verlangt. Ich werde demnach damit anfangen, weil die Tafeln dazu ebenfalls eingerichtet ſind. Es muß ohnehin auch bey Berechnung des Mondlaufes, wenn die wahre Zeit fürgegeben, dieſe vorerſt in die mittlere verwandelt werden. Laßt uns demnach z. E. ſetzen, es ſey für 1769 den 3ten Brachmonat, neuen Calenders, Abends um 8 Uhr, Berliner Uhr und wahre Zeit, der wahre Ort der Sonne zu ſuchen.

§. 187.

Man ſehe dieſes erſtlich als mittlere Zeit an, und reducire ſie auf die Pariſer Uhr, welche nach Tab. 4 um 44′ 25″ ſpäther geht. Dieſes ſteht ſo

1769. Jun.	3	8	0	0
		—	44	25
1769. Jun.	3	7	15	35

Dieſe

Dieſe Zeit verwandle man nach der Regel am Ende der Tab. 2 in die Biſſextilform, ſo müſſen 6 Stunden, und wegen des alten Calenders 11 Tage, abgezogen werden. Und dann findet ſich in der dritten Tafel die Anzahl der Tage

1769. 144 T. 1 St. 15′ 35″

Für die nunmehr ſo reducirte Zeit laſſen ſich nun die Tafeln gebrauchen.

§. 188.

Zu dieſem Ende nimmt man aus der erſten Tafel die dieſer Zeit nächſtvorhergehende Epoche nebſt den mittlern Ort der Sonne und ihrer mittlern Anomalie

	T.	St.	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
1759 —	23	5	7	1	8	27	33	27	5	18	44	32

Zieht man nun 1759 von 1769 ab, ſo bleiben 10; und da hier die Tage vom Ende des Jahrs genommen worden, ſo ſchlägt man in der zwoten Tafel den zehnten Jahrgang auf, wo man ſogleich den Neumond No. 117 nehmen, und die Zeit und Bewegung der Sonne ausſchreiben kann, welches ſo ſteht

	167	19	53	40	5	15	29	20	5	15	19	1

Dieſe Zahlen werden zu denen von der Epoche addirt, und ſo findet ſich die Zeit dieſes mittlern Neumondes und der Sonnenlauf

1769 +	144	14	46	39	2	13	2	47	11	4	3	33

Dieſe Zeit wird von der fürgegebenen

1769 + 144 1 15 35

abgezogen, und ſo bleibt

— 0 13 31 4

Um

Um ſo viel iſt demnach der mittlere Neumond ſpäter als die fürgegebene Zeit; und was dieſes nach der zehnten Tafel austrägt, muß von dem für den Neumond gefundenen Ort der Sonne abgezogen werden. Demnach für

T. St. ′ ″	s ° ′ ″	s ° ′ ″
—13 0 0	—0 0 32 2	—0 0 32 2
— 31 0	— 1 16	— 1 16
— 4	0	0
—13 31 4	—0 0 33 18	—0 0 33 18

zieht man dieſe Zahlen wirklich von

1769 + 144 14 46 39 | 2 13 2 47 | 11 4 3 33

ab, ſo bleibt

1769 + 144 1 15 35 | 2 12 29 29 | 11 3 30 15

Dieſes giebt in der 11. Tafel die Gleichung des Mittelpuncts der Sonne +50 40

demnach den wahren Ort der Sonne

2 13 20 9

§. 189.

Dabey würde es ſein Bewenden haben, wenn die fürgegebene Zeit, mittlere Zeit wäre. Da ſie aber wahre Zeit iſt, ſo findet ſich aus der zwölften Tafel

für an. med. ⊙ $11^s\ 3^\circ\ 30'\ 15''$ - - $-3'\ 22''$
für ⊙ ver. 2 13 20 29 $+5\ 36$
$+1\ 16$

um ſo viel geht die wahre Zeit der mittlern vor. Nun iſt nach der zwanzigſten Tafel für

an. med. ⊙ $11^s\ 3^\circ\ 30'\ 15''$ horar. ⊙ $= 2'\ 24''$

 und

und dieſes giebt für 1′ 28″ Zeit 3″ Bewegung, und um ſo viel muß der gefundene Ort der Sonne

2ſ 13° 20′ 9″

vermindert werden. Er iſt demnach

2 13 20 6

§. 190.

Die ganze Rechnung nach der vorläufigen Reduction der Zeit (§. 187) ſteht folgender maſſen

1769		☉	anom. ☉
1759	T. St. ′ ″	ſ ° ′ ″	ſ ° ′ ″
10	— 23 5 7 1	8 27 33 27	5 18 44 32
	167 19 53 40	5 15 29 20	5 15 19 1
☌☉☽.	144 14 46 39	2 13 2 47	11 4 3 33
	144 1 15 35		
	— 13 31 4		
	— 13 0 0	— 32 2	— 32 2
	— 31 0	— 1 16	— 1 16
	— 4	— 0	— 0
		— 33 18	— 33 18
		2 12 29 29	11 3 30 15
	— 3 22	+ 50 40	
	+ 5 38	2 13 20 9	
	+ 1 16	— 3	
		2 13 20 6	

§. 191.

Dieſe Rechnung kann auf mehrerley Arten gemacht werden. So z. E. hatte ſtatt des Neumondes No. 117 ein jeder anderer aus dem

dem zehnten Jahrgange genommen werden können. Ich habe dieſen gewählt, weil er der nächſte iſt. Man nehme aber z. E. den Neumond No. 113, ſo ſteht die Rechnung folgendermaſſen.

1769				
1759	−23 5 7 1	8 27 33 27	5 18 44 32	Tab. I.
10	49 16 57 28	1 19 3 43	1 18 53 45	T.II.No.113
	26 11 50 27	10 16 37 10	7 7 38 17	
	144 1 15 35			
	+ 117 13 25 8			
	+ 90 0 0 0	2 28 42 30	2 28 42 14	
	27 0 0 0	26 36 45	26 36 40	Tab. X.
	13 0 0	32 2	32 2	
	25 0	1 2	1 2	
	8	0	0	
		3 25 52 19	3 25 51 58	
		2 12 29 29	11 3 30 15	
Tab. XII.	{ — 3 22	+ 50 40	- - - -	Tab. XI.
	{ + 5 38	2 13 20 9		
	+ 2 16	— 3	Tab. XX.	
		2 13 20 6		

Da hier der Neumond No. 113 von der fürgegebenen Zeit um 117 Tage, 13 St. ꝛc. entfernt iſt, ſo müſten für dieſen gröſſern Unterſchied auch mehr Zahlen aus der zehnten Tafel ausgeſchrieben werden, als in dem erſtern Fall. Indeſſen thut man, wegen etwann zu beſorgender Druck- oder Rechenfehler, immer gut, wenn man den Ort der Sonne auf zweyerley Arten berechnet.

§. 192.

Die Berechnung des wahren Orts des Mondes, wird, wegen der mehrern Verbeſſerungen des mittlern Ortes, etwas weitläuftiger. Man gebraucht dazu die Tab. 24 .. 32. Um dieſe Verbeſſerungen anfangs beſonders zu erläutern, werde ich die oben (§. 124) berechneten Data aus dem zweyten Beyſpiele gebrauchen. Dieſe ſind für die Zeit des wahren Vollmonds

long. ☉ med.	6	9	46	6	= ☉
an. med. ☉	3	0	42	8	= a
long. med. ☽	0	3	43	17	= ☽
an. med. ☽	10	6	23	29	= M
long. med. ☊	6	0	58	21	= ☊

Aus dieſen ſucht man erſtlich

E = ☽ − ☉ =	5	23	57	11
☉ − ☊ =	0	8	47	45
λ = ☽ − ☊ =	6	2	44	56

demnach

2 E =	11	17	54	22
4 E =	11	5	48	44
2 λ =	0	5	29	52

Dieſes wird vorläufig berechnet, damit man ſodann die Argumente durch bloſſes addiren und ſubtrahiren daraus finden, und die denſelben entſprechende Verbeſſerungen oder Gleichungen ausſchreiben könne, wie folgt:

Argu-

Argumente	Verbeſſerungen		
M = 10 6 23 29	+ 4 51 45	- - - -	Tab. 24.
E = 5 23 57 11	- - - -	− 0 8 43	Tab. 25.
2E − M = 1 11 30 53	- - - -	− 0 50 10	Tab. 26.
a = 3 0 42 8	+ 11 20	- - - -	Tab. 27.
a + M = 1 7 6 —	- - - -	— 1 3	T. 28. Col. 1
a − M = 4 24 19 —	- - - -	— 1 24	- - - Col. 2
M + 2E = 9 24 18 —	+ 2 39	- - - -	- - - Col. 3
M − E = 4 12 26 —	- - - -	— 17	- - - Col. 4
2(M − E) = 8 24 52 —	+ 3 29	- - - -	- - - Col. 5
4E − M = 0 29 25 —	- - - -	— 26	- - - Col. 6
2E − a = 8 17 12 —	+ 2 26	- - - -	- - - Col. 7
a + 2E − M = 4 12 13 —	- - - -	— 34	- - - Col. 8
a − 2E + M = 1 19 11 —	- - - -	— 2 57	- - - Col. 9
M − 2λ = 10 0 54 —	+ 49		
2(☉ − ☊) = 0 17 35 —	- - - -	— 14	
Summa	+ 5 12 28	— 1 5 48	
	— 1 5 48		
	+ 4 6 40		

Nun war

☽ m = 0 3 43 17

demnach ☽ v = 0 7 49 57

Es war aber in dem zweyten Beyſpiele

☉ v = 6 7 50 23

demnach ☉ v — ☽ v = 6 0 0 26

Dieſer kleine Unterſchied von der wahren Oppoſitione in orbita hätte = 0 ſeyn ſollen. Es trift aber ſehr ſelten zu, daß die Formeln (§. 47. 61) bis auf 1 Secunde übereinſtimmen, weil bey jeder einige kleinere Artickel weggelaſſen worden, für die man ohnehin nicht gut ſtehen

 kann,

kann, und die die Rechnung, ohne ſie zuverläßiger zu machen, nur verlängern würden (§. 48. 49. 56). Nach den Formeln (§. 36 - 41) das iſt, nach den Mayerſchen Tafeln finde ich für eben die Zeit den Ort des Mondes in orbita

$$L''' = 0\ 7\ 50\ 26$$

welcher von

$$\odot v = 6\ 7\ 50\ 23$$

oder von der ☍ in orbita nur um 3″ abgeht. Ueberhaupt ſind die für die Syzigien beſonders herausgebrachte Formeln (§. 61) zuverläßiger als die übrigen, und, aus gewiſſen Betrachtungen, zuverläßiger als die Mayerſchen Tafeln ſelbſt, ungeachtet ſie aus dieſen hergeleitet ſind. Denn für die Zeit der wahren Syzigien werden viele von den Gleichungen, die Mayer allerdings nicht bis auf einzelne Secunden beſtimmen konnte, vollends = 0, und damit fällt das Unzuverläßige von ihrer Beſtimmung weg. Dahin gehört die ſehr beträchtliche Gleichung (§. 41), welche, wie ich (§. 53) gezeigt habe, zur Zeit der wahren Syzigien = 0 wird.

§. 193.

Ich werde nun noch ein vollſtändiges Beyſpiel anführen, und dieſes iſt unter denen am Ende vorkommenden das fünfte. Anno 1783 den neunten Hornung Abends gegen 7 Uhr, Berliner Uhr neuen Calenders, tritt der Mond vor die Pleiaden und bedeckt ſie. Für dieſe

Zeit

Zeit verlangt man den wahren Ort und jede Umſtånde des Sonnen- und Mondlaufes zu wiſſen. Dieſe Zeit iſt erſtlich alten Calenders und Biſſextilform

1783, 29 T. 13 St. 0 0
— 44 25 diff. merid.

1783, 29 . 12 . 15 35

Wir wollen ſie als mittlere Zeit gelten laſſen, und erſtbemeldte Umſtånde berechnen.

§. 194.

Man ſucht hiebey Anfangs wiederum den nåchſten mittlern eccliptiſchen Neumond, nach den zwo erſten Tafeln. Dieſer fållt auf

1783. 51 T. 7 St. 34′ 52″

demnach um

21 . 19 . 19 17

ſpåter als die fůrgegebene Zeit. Fůr dieſen Zwiſchenraum werden aus der zehnten Tafel die mittlern Bewegungen ausgeſchrieben, und die Summen davon von den fůr den mittlern Neumond gefundenen Datis ſubtrahirt, bey dem ☊ aber, weil ſeine Bewegung růckwerts geht und daher negativ iſt, addirt. Damit findet ſich fůr die fůrgegebene Zeit

long. med. ☊ =	☊ =	11	29	55	7
long. med. ☉ =	☉ =	10	19	42	2
An. med. ☉ =	a =	7	10	27	52
long. med. ☽ =	☽ =	1	23	52	50
An. med. ☽ =	M =	11	5	38	43

Dieſes alles wird auf der obern Hälfte des Blatts angeordnet, wie man es in dem Beyſpiele ſieht. Man kann auch ſogleich in der eilften und dreyzehnten Tafel die Gleichung des Mittelpuncts der Sonne und des ☊ hinſchreiben, um den wahren Ort der

$$☉v = 10\ 20\ 58\ 21$$

$$☊' = 11\ 29\ 48\ 27$$

zu haben. Und damit laſſen ſich ebenfalls Tab. 12, 21, 22, 23 die Gleichung der Zeit, die Declination, die Aſcenſ. rect. und der ang. eccl. finden. Ich habe es aber, um den Raum zu ſpahren, in dem Formular des Beyſpiels weggelaſſen.

§. 195.

Noch fehlt die Gleichung, wodurch der mittlere Ort des Mondes in den wahren verwandelt wird. Dieſe findet ſich auf der vordern Hälfte des Blatts unten berechnet. Alle Argumente ſind, wie ſie nach Tab. 24 . . 28 erfordert werden, der Ordnung nach angeführt, die Gleichungen in zwo Columnen beygeſchrieben, und die Tafeln, woraus ſie genommen, mit angemerkt. Die Gleichung iſt demnach $+2° 53' 25''$, und giebt den wahren Ort des ☽ in orbita

$$L''' = 1\ 26\ 46\ 15.$$

§. 196.

§ 196.

Aus ☉ v, ☊, L''' werden ſodann die Argumente nach Tab. 14 und 29 formirt, um die Reduction des ☽ auf die Ecliptic — 6' 21'' und die Breite des ☽ = 4° 25' 22'' zu erhalten. Dieſes findet ſich mitten auf der letzten Hälfte des Blatts.

§. 197.

Die Parallaxe folgt gleich darauf. Sie gebraucht nach Tab. 29. drey von den bereits für die Gleichung des Mondes berechnete Argumente M, 2 E — M und E; und damit findet ſie ſich = 54' 28'', welches nach Tab. 19 den Halbmeſſer des Mondes = 14' 51'' giebt. Und damit iſt dieſes auch abgefertigt.

§. 198.

Noch bleibt die ſtündliche Bewegung des Mondes ſowohl in ſeiner Bahn als nach der Breite. Erſtere wird nach Tab. 31 berechnet, und fordert meiſtens die bereits für die Gleichung des Monds gefundene Argumente, nur daß zu einigen 6 oder 3 Zeichen addirt werden, welches ſchlechthin wegen der dadurch erhaltenen geſchmeidigern Einrichtung der Tafel erfordert wird. Die Argumente, und die damit aus den Tafeln No. 31 genommene Beſtimmungsſtücke der ſtündlichen Bewegung des ☽ in ſeiner Bahn, finden ſich in dem Beyſpiel

der Ordnung nach angeführt, und geben den horar. ☽ in orbita = 29′ 46″.

§. 199.

Das incr. horar. latit. und deſſen Argumente und Berechnung ſteht neben bey. In allen Argumenten kömmt λ = ☽ — ☊ vor, und alle werden aus den mittlern Bewegungen gefunden. Man ſieht auch leicht, daß 2 E, 2 E — M bereits unter den Argumenten für die Länge des Mondes ſteht, und nicht noch einmal berechnet werden darf. Damit findet ſich nach Tab. 32 das incr. latit. horar. = + 1′ 26″, welches, da es poſitiv iſt, nach Norden gerechnet wird, ſo wie auch die ebenfalls poſitive Breite.

§. 200.

Dieſe letzten Argumente, das erſte davon ausgenommen, hätten auch ſchlechthin nur in Zeichen und Graden berechnet werden können, wiewohl ſie in dem Beyſpiel die meiſten übrigen bis auf Minuten berechnet ſind. Eine ähnliche Abkürzung läßt ſich auch mit den letzten Argumenten für den horar. ☽ vornehmen, welches aber, da ſie faſt nur abgeſchrieben werden, und auch dieſes unterbleiben kann, nicht der Mühe lohnt.

§. 201.

Da Anno 1783 die Länge des hellen Sterns der Pleiaden = 1. 26. 57. 39 iſt, die Länge

des

des ☽ in orbita aber = 1. 26. 46. 15 gefunden worden, ſo iſt der Unterſchied = 11′ 24″; und dieſen hat der Mond noch zu durchlaufen, ehe er in ☌ mit dem Stern kömmt. Nun iſt ſeine ſtündliche Bewegung in orbita = 29′ 46″, demnach durchläuft der Mond die 11′ 24″ in 22′ 59″ Zeit, welches zu der fürgegebenen Zeit (§. 193)

1783. Febr. 9 7 St. 0′ 0″

hinzugethan

1783. Febr. 9 7 • 22 59

für die Zeit der ☌ ☽ ✱ pleiad. giebt. Es iſt dieſes mittlere Zeit. Nun findet ſich nach Tab. 12 die Gleichung der Zeit

a =	7 10 27 52	. . .	− 5′ 5″
☉ v =	10 20 58 21	. . .	− 9 35
			− 14 40
	1783. Febr.		9 7 22 59
	1783. Febr.		9 7 8 19

welches demnach die wahre Zeit der ☌ in orbita, neuen Calenders Berliner Uhr iſt.

§. 202.

Es muß nun aber auch die Breite des ☽ um ſo viel vermehrt werden als 22′ 59″ Zeit austragen. Da das incr. horar. latit. = 1′ 26″ gefunden worden, ſo giebt dieſes 33″. Um ſo viel iſt die Breite des Mondes 4° 25′ 11″ zur Zeit der ☌ gröſſer. Sie iſt demnach

= 4°

$= 4^{\circ}\ 25'\ 44''$. Da nun die Breite der lucid. pleiad. $= 4.\ 1.\ 18$ iſt, ſo ſieht man, daß zwar der Mond aus dem Mittelpunct der Erde geſehen, den hellen Stern der Pleiaden nicht bedecken wird, daß aber dieſe Bedeckung in den nördlichen Ländern, und beſonders in Deutſchland, wird geſehen werden können.

XVIII. Tafeln für die Bedeckung der Fixſterne von dem Monde.

§. 203.

Die Beſtimmung der Zeit, wenn der Mond einen Fixſtern bedecken wird, fordert bey dem Gebrauch der Mayerſchen Tafeln viele Weitläuftigkeiten und Verſuche, weil ſie dadurch nur auf eine indirecte Art berechnet werden kann. Da nun dieſes ein Hauptgrund mit iſt, warum man beſonders um die Länge zur See zu finden, die Mondstafeln gern genau und geſchmeidig zu haben wünſcht, ſo habe ich mir auch noch dieſe Mühe nicht reuen laſſen, einige Tage Zeit auf wirklich langwierige Berechnung geſchmeidiger Formeln zu verwenden.

§. 204.

Nach Tab. 29 iſt die gröſte mögliche Breite des Mondes $= 5^{\circ}\ 9'\ 8'' + 8'\ 50'' = 5^{\circ}\ 17'\ 58''$, und nach Tab. 30 die gröſte mögliche

Paral-

Parallaxe = $1^\circ\ 1'\ 32''$ (welche M = E = 180° voraus ſetzt, und daher in den Vollmonden ſtatt haben kann, wie es auch Tab. 18. erhellet). Demnach iſt $5^\circ\ 17'\ 58'' + 1^\circ\ 1'\ 32'' = 6^\circ\ 19'\ 30''$. Addirt man hiezu noch den gröſten möglichen horizontalen Halbmeſſer des Mondes, welcher nach Tab. 19. = $16'\ 47''$ iſt; ſo iſt die Summe = $6^\circ\ 36'\ 13''$. Und dieſes iſt demnach die gröſte mögliche Breite, die ein Fixſtern haben kann, um, von dem Monde bedeckt, irgend auf der Erde geſehen werden zu können. Ich habe ſolche in den 6 Doppelmayerſchen Charten aufgeſucht, und darin in die 260 gefunden, die eine geringere Breite haben, und die demnach der Mond zuweilen bedecken kann. Sie liegen ſämtlich in einem Streifen, der zu beyden Seiten der Ecliptic eine Breite von $6^\circ 36'\ 13''$ hat, und demnach in allem $13^\circ\ 12'\ 26''$ breit iſt. Nun iſt die Parallaxe $1^\circ\ 1'\ 32''$ und der Halbmeſſer $16'\ 47''$ doppelt genommen und zuſammen addirt = $2^\circ\ 36'\ 38''$; und dieſes iſt die Breite des Streifens den der Mond, von der ganzen Erdfläche geſehen, zu bedecken ſcheint. Dieſes iſt nur der fünfte Theil von den $13^\circ\ 12'\ 26''$, und ſo werden in der Zeit eines periodiſchen Monats auch nur der $\frac{1}{5}$ von den 260 Sternen von dem Monde bedeckt, welches demnach für eine Zeit von 4 Wochen 52 Sterne, und damit täglich zween giebt. Das will nun ſagen, es werde nicht leicht ein Tag vergehen,

da

da der Mond nicht 1, 2 oder mehrere Sterne bedecken ſolte, wenn man die ganze Erdfläche mit in Betrachtung zieht. Bindet man ſich aber an einen beſtimmten Ort der Erdfläche, ſo wird anſtatt 2° 36′ 38″ nur der Durchmeſſer des Mondes 33′ 34″ genommen, und ſo finden ſich auch nur 11 oder 12 Sterne, die in Zeit von 4 Wochen von dem Monde bedeckt geſehen werden können, dieſe ſind für einzelne Schiffer. Dahingegen, wer vollſtändige Ephemeriden für jede Schiffer und Reiſen berechnen will, die vorerwähnte 52 für jeden periodiſchen Monat berechnen muß. Da übrigens dieſes nur beyläuftig zu verſtehen iſt, ſo wird es bald mehr bald minder zu berechnen geben. Die Frage iſt nun nur, wie die Rechnung geſchmeidig einzurichten iſt.

§. 205.

Wer Ephemeriden berechnet, ſucht gemeiniglich die Umſtände des Mondlaufes für jeden Mittag durch das ganze Jahr durch, zuweilen auch für jede Mitternachtsſtunde, oder auch für die Zeit wenn der Mond durch den Mittagskreis ſeiner Sternwarte geht, damit er ſich zur Beobachtung gefaſt machen könne. Es kann aber der Mond mehrere Stunden, vor oder nach, einen Fixſtern bedecken, oder wenigſtens demſelben ſehr nahe kommen; und ſo müſte die Zeit durch Interpolation, ſo gut es angeht, gefunden, und ſodann nochmals genauer

nauer berechnet werden, wie es eigentlich erfordert wird, wenn die Rechnung den Schiffern ſtatt einer correſpondirenden Beobachtung ſolle dienen können.

§. 206.

Um dieſes abzukürzen, und die Aufgabe geradehin aufzulöſen, habe ich mir ſie ſo vorgeſtellt: **Es iſt ein Fixſtern gegeben, der von dem Monde bedeckt werden kann, und man ſolle die Zeit finden, wenn er von dem Monde bedeckt wird, oder die Zeit, wenn ☌ ☽ ✱ *in orbita* iſt.** Dieſe Aufgabe werde ich eben, ſo wie oben die von der Zeit der Syzigien, von den Ephemeriden oder andern vorläufigen Berechnungen unabhängig machen. Dahin dienen nun folgende Betrachtungen.

§. 207.

Einmal wird kein Stern allemale, wenn der Mond vorbeygeht, von demſelben bedeckt: Denn der Stern kann z. E. eine nördliche Breite von 6° 36′ 13″ haben, alldieweil der Mond eine ſüdliche Breite von fünf und mehr Grad hat, und damit 11 und mehr Grad unter demſelben vorbey geht. Es iſt demnach nothwendig, daß der ☊ an einem ſolchen Orte des Thierkreiſes ſey, wo der Mond in ☌ ☽ ✱ ungefehr eben die Breite hat, die der Stern hat. Ich ſage ungefehr: denn die Breite des

Sterns

Sterns kann um die ganze Summe der Parallaxe des Mondes und ſeines Halbmeſſers verſchieden ſeyn, und er wird dennoch, wenigſtens da, wo der Mond im Mittagskreiſe am Horizonte erſcheint, denſelben berühren. Wenn demnach die Breite des Sterns an ſich ſchon gröſſer iſt als die Breite des Mondes, nach Tab. 29, werden kann, ſo kann man immer entweder die Parallaxe, oder den Halbmeſſer des Mondes, oder die Summe von beyden, davon abziehen, und der Ueberreſt wird geringer werden, als die Breite des Mondes ſeyn kann. Man kann aber dieſes unterlaſſen, und ſich ſchlechthin begnügen, dem Mond ſeine gröſte Breite zu geben, und zwar ſüdlich oder nördlich, nachdem es die Breite des Sterns iſt. Und dadurch wird der Ort des ☊, und zugleich auch werden damit die Jahre beſtimmt, in welchen die Bedeckung möglich iſt. Denn da der ☊ in einem Jahre nicht ganz 20 Grad durchläuft, ſo kann man ohne Mühe finden, in welchem Jahre derſelbe in ein fürgegebenes Zeichen des Thierkreiſes eintrift.

§. 208.

Iſt aber die Breite des Sterns an ſich ſchon kleiner, als die Breite des Mondes werden kann, ſo kann man ſchlechthin die Breite des Sterns in der funfzehnten Tafel aufſuchen, und damit das Argumentum latitudinis des Monds finden, welches dem Mond eben die

Breite

Breite giebt. Dieſes findet man allemal auf zweyerley Arten, und beyde können gebraucht werden. Denn ſo z. E. iſt die nördliche Breite = 2° 30′ 0″, der Mond mag im Anfang des zweyten, oder im Ende des vierten Zeichens ſeines Argum. latit. ſeyn. Das ſo gefundene Argum. latit. wird von der auch nur beyläufig genommenen Länge des Sterns abgezogen, und ſo findet ſich der Ort, wo ☊ ſeyn muß, damit der Stern von dem Monde bedeckt werden könne.

§. 209.

Es hat aber dieſes ſeine ſehr weite Schranken. Denn die Breite des Sterns kann um die ganze Summe der Parallaxe und des Halbmeſſers des Mondes ſowohl vermehrt als vermindert werden, und die Summe oder der Ueberreſt in der funfzehnten Tafel aufgeſucht, wird die argum. latit. angeben, welche die Schranken der Möglichkeit der Bedeckung beſtimmen. Dieſes, durch das vorhin (§. 193 ſeqq.) berührte Beyſpiel von den Pleiaden, zu erläutern, ſo haben wir für 1783 und den hellen Stern der Pleiaden (§. 201. 202)

long. = 1ſ 26° 51′ 29″
latit. = + 4 1 18

Sucht man dieſe Breite in der funfzehnten Tafel auf, ſo entſpricht derſelben das

Argum. latit. = 1ſ 23° 30′

und

$4^{s}\ 6^{\circ}\ 30'$

Werden beyde von der Länge des Sterns abgezogen, ſo bleibt für den Ort des ☊

0 3 21

9 20 20

Man nehme ferner die Summe der mittlern Parallaxe 57′ 43″ und des mittlern Halbmeſſers des Mondes 15′ 44″, welche = 1° 13′ 37″ iſt, und addire und ſubtrahire von der Breite des Sterns, ſo iſt die

Summe = + 5 14 55

Differenz = + 2 47 41

Die Summe geht über die Breite 5° 0′ 18″ hinaus, und kömmt der größten möglichen Breite = 5° 17′ 58″ (§. 204) ſehr nahe. Demnach kann das argum. latit. aus dieſem Grunde von dem erſtbeſtimmten

$1^{s}\ 23'\ 30''$

bis zu

4 6 30

gehen, und es wird ſelten zutreffen, daß die Bedeckung nicht irgend auf der Erde ſichtbar ſeyn ſollte. Nehmen wir aber die Differenz

+ 2° 47′ 41″

ſo giebt dieſe in der funfzehnten Tafel die beyden argum. latit.

$1^{s}\ 4^{\circ}$

4 26.

Dieſes ſind demnach die äuſſerſten Schranken

für

für den hellen Stern der Pleiaden. Und wenn wir die übrigen kleinern Sterne mitnehmen, ſo erſtrecken ſich dieſe Schranken noch weiter, daß, wenn leicht der Mond eine nördliche Breite hat, einige von den Pleiaden werden bedeckt geſehen werden können. Die Breite des Mondes iſt aber faſt 10 Jahre nördlich, und ſo kann es nicht fehlen, daß die Bedeckung nicht ſehr ofte auch in Europa ſichtbar ſeyn ſollte, weil in 10 Jahren der Mond in die 130 mal bey den Pleiaden vorbey geht.

§. 210.

Bey andern Sternen ſind die Schranken, inner welche die Bedeckung möglich iſt, verſchieden, und ſehr ungleich. Die gröſten möglichen Schranken ſind für ſolche Sterne, deren Breite um die Summe der Parallaxe und des Halbmeſſers des Mondes kleiner iſt als die gröſte Breite des Monds: denn addirt man dieſe Summe zu der Breite des Sterns, ſo trift man auf das argum. latit. von 3 oder 9 Zeichen. Subtrahirt man ſie aber, ſo erhält man das kleinſte oder das gröſte mögliche arg. latit. und dieſes iſt von 3 oder 9 Zeichen am weiteſten entfernt. In dieſem Fall kann das argum. latit. von 1 bis 5, oder von 7 bis 11 Zeichen ſeyn, und demnach die Bedeckung 6 Jahre nach einander erfolgen.

§. 211.

Hingegen werden dieſe Schranken viel enger, je mehr die Breite des Sterns gröſſer oder kleiner als die erſtbeſtimmte Breite iſt. Die geringſte Möglichkeit iſt für die oben (§. 204) beſtimmte Breite von 6° 36′ 13″, weil dabey alle Umſtände zuſammen treffen müſſen, wenn der Mond den Stern auch nur berühren ſoll. Der andere Fall iſt, wenn die Breite des Sterns = 0 iſt: denn da muß das arg. latit. immer 0ˢ ± 14°, oder 6ˢ ± 14° ſeyn, wenn die Bedeckung irgend auf der Erde geſehen werden ſolle. Der Zwiſchenraum dieſer Schranken iſt = 28°. Und da der ☊ jährlich nur 20 Grad durchläuft, ſo erfolgt die Bedeckung dennoch 16 bis 17 Monate nach einander, ſo, daß man für alle die Fälle, wo die Breite des Sterns nicht gröſſer als die gröſte Breite des Mondes iſt, ſich überhaupt begnügen kann, das Jahr zu wiſſen, in welchem die Bedeckungen erfolgen.

§. 212.

Dieſe Frage kann in eine andere aufgelöſt werden, daß man nemlich den Monat des Jahrs finde, in welchem die Finſterniſſe ſich bey ☊ eräugnen. Man ſetze z. E. die Bedeckung der Pleiaden dauere nur ein Jahr. Nun haben wir vorhin gefunden, daß dieſes geſchieht, wenn der Ort des ☊ in ♈ 0° 3′ 21″ iſt.

iſt. Demnach, wenn die Finſterniſſe bey ☊ zur Zeit der Frühlings-Nachtgleiche eintreffen. Nehmen wir nun aus der erſten Tafel die Epoche von 1759, wo ☉ $= 8^s\ 27^\circ\ 33'\ 27''$ iſt, und die Finſterniß dieſer Epoche ſich bey ☊ eräugnet, ſo dörfen wir nur dieſen Ort der Sonne von dem ☊ $= 0^s\ 3^\circ\ 21'$ abziehen, und mit dem Ueberreſte $3^s\ 5^\circ\ 48'$ in die zweyte Tafel gehen, um die Jahre aufzuſuchen, wo ☋ bey ☉ $= 3^s\ 5^\circ\ 48'$, oder wenigſtens nur einige Grade davon entfernt, angezeichnet iſt. Dieſes findet ſich im 5ten, 6ten, 24ſten, 25ſten Jahrgange. Addirt man dieſe zu 1759, ſo fällt man auf die Jahre 1764, 1765, 1783, 1784. Und um dieſe Zeit würden die Pleiaden von dem Monde bedeckt erſcheinen, wenn auch die Grenze ihrer Möglichkeit auf ein Jahr eingeſchränkt wären.

§. 213.

Auf dieſe Art läßt ſich das Jahr, wo eine Bedeckung möglich iſt, gleichſam durch einen beyläufigen Ueberſchlag finden, wiewohl man für ſolche Sterne deren Breite nahe an die oben (§. 204) beſtimmte $6^\circ\ 36'\ 13''$ kömmt, dieſer Ueberſchlag weniger beyläufig ſeyn muß, weil da die Schranken der Möglichkeit ſehr enge ſind. Man ſucht aber das Jahr dennoch anfangs nur beyläufig, und berechnet ſodann, wie wir es oben bey den Finſterniſſen geſehen haben, für die Finſterniſſe, zwiſchen welche

die Bedeckung erfolgt, oder nach dem Ueberſchlage vermuthet wird, das argum. latit. und den Ort des Knoten, ſo läßt ſich das übrige aus der zehnten Tafel, wo die tägliche Bewegung des Knoten angezeichnet iſt, nachholen.

§. 214.

Z. E. es ſey die Frage vom Aldebaran. Die Breite deſſelben iſt 5° 29′ 49″ ſüdlich, und ſeine Länge gegen das Jahr 1775 iſt 2ſ 6° 36′ 50″. Dieſe Breite iſt gröſſer als die gröſte mögliche Breite des Mondes, ſie iſt aber noch über einen Grad geringer als die 6° 36′ 13″ (§. 204). Demnach ſind die Bedeckungen noch ſehr wohl möglich, ſo, daß einige nach einander erfolgen können. Wir werden uns am ſicherſten an das Mittel halten, und demnach das argum. latit. = 9ſ, oder 270 Grad ſetzen, weil dieſes dem Monde die gröſte ſüdliche Breite giebt. Zieht man dieſe 9ſ von der Länge des Aldebaran 2ſ $6\frac{1}{2}$° ab, ſo bleiben 5ſ $6\frac{1}{2}$° für den Ort, wo der ☊ ſeyn muß, und zwar giebt dieſes die Zeit der gröſten möglichen Bedeckung. Soll nun dieſe Zeit für die auf 1759 folgende Jahre gefunden werden, ſo nimmt man aus der erſten Tafel bey 1759 den Ort der ☉ = 8ſ $27\frac{1}{2}$°, und zieht denſelben von dem ſo eben beſtimmten Ort des ☊ = 5ſ $6\frac{1}{2}$° ab. Mit dem Ueberreſte 8ſ 9° geht man in die zweyte

Tafel

Tafel und ſucht die Jahrgänge auf, wo ☋ bey ⊙ = $8^s\ 9^\circ$, oder ☊ bey ⊙ = $2^s\ 9^\circ$, oder wenigſtens nicht um viele Grade davon weg iſt. Dieſes findet ſich in dem ſechszehnten Jahrgang bey dem Neumond No. 188; denn wird das arg. latit. + $6^s\ 3'\ 42''$ von ⊙ = $2^s\ 12^\circ\ 4'\ 4''$ abgezogen, ſo bleibt $2^s\ 6^\circ\ 0'\ 22''$ welches von den $2^s\ 9^\circ$ kaum um 3 Grad entfernt iſt. Dieſe 3 Grade mögen aber, in Abſicht auf die Bewegung des ☊, faſt 2 Monat austragen, und ſo kann die Sache folgendermaſſen genauer beſtimmt werden.

§. 215.

Man ſchreibt nemlich aus der erſten Tafel bey 1759 das argum. latit. die Tage vom Ende des Jahrs und den Ort der ⊙, welcher zugleich der Ort des Mondes iſt, aus. Eben dieſes thut man auch bey dem Neumond No. 188 der zweyten Tafel. Die Rechnung iſt wie bey der Berechnung der Finſterniſſe folgende:

		argum. latit.	T. St. , "	☉	
	1775 / 1759	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27	Tab. 1.
	16	☊ + 6 3 42	73 0 1 6	2 12 4 4	T. 2. No. 188.
		☋ + 6 2 43	49 18 54 5	11 9 37 31	
☽ =		11 9 37 31			
☊ =		5 3 34 48			
		5 6 36 50			
		3 2 2			
		1 35 19	— 30 0 0 0	— 1 5 17 31	Tab. 10.
		1 26 43	+ 19 18 54 5	+ 10 4 20 0	
		1 25 47	— 27 0 0 0	— 11 25 45 46	Tab. 10.
		56	— 7 5 5 55	+ 10 8 34 14	
		56	— 7 0 0	— 3 50 35	Tab. 10.
		0	— 7 12 5 55	+ 10 4 43 39	
				2 6 36 50	long. aldebaran
		5 6 36 50	— 7 12 5 55	4 1 53 11	diſt. aldeb. — ☽.
		— 28 36	+ 9 0 0 0	3 28 35 15	Tab. 10.
		5 6 8 14	1 11 54 5	3 17 56	
		— 48	+ 6 0 0	3 17 39	Tab. 10.
		5 6 7 26	1 17 54 5	17	
		0	+ 31	17	
☊ =		5 6 7 26	1 17 54 36	0	
				2 6 36 50	long. ☽

Man findet nemlich zuerſt für den eccliptiſchen Neumond No. 188, welcher 1775. 49 Tage, 18 St. 54′ 5″ nach der mittlern Bewegung und Biſſextilform eintrift, den Ort der

☉ und des ☽ $11^s\ 9^\circ\ 37'\ 31''$

des ☊ 5 3 34 48.

§. 216.

Da nun aber der Ort des ☊ für die geſuchte Zeit $= 5^s\ 6^\circ\ 36'\ 50''$ ſeyn ſoll, ſo zieht man den

den erſtern von dieſem ab, und der Ueberreſt 3° 2′ 2″ zeigt nach der zehnten Tafel, daß der ☋ um 57 T. 7 St. früher in 5ſ 6° 36′ 50″ geweſen. Für dieſen Zwiſchenraum wird ebenfalls aus der zehnten Tafel die mittlere Bewegung des ☽ ausgeſchrieben, und von dem ☽ abgezogen, welches, wie man aus der Rechnung ſieht, mit dem Abziehen bey dem ☊ zugleich geſchehen kann. Man findet dadurch den Ort des ☽ = 10. 4. 43. 39, und die Zeit 7 T. 12 St. 5′ 55″ vor dem Anfang des Jahrs 1775, und zu dieſer Zeit iſt der ☊ in 5ſ 6° 36′ 50″. Da aber der Mond alsdann nicht in ☌ mit dem Aldebaran iſt, ſo zieht man den Ort des ☽ von der Länge des Aldebaran ab, und der Ueberreſt 4. 1. 53. 11 iſt der Bogen, den der ☽ noch zu durchlaufen hat, bis er in ☌ mit dem Aldebaran kömmt. Aus der zehnten Tafel ergiebt ſich nun wiederum, daß dieſes 9 T. 6 St. 0′ 31″ nachher, und demnach 1775. 1 T. 17 St. 54′ 36″ alten Calenders und Biſſextilform geſchieht, wo der Mond nach ſeiner mittlern Bewegung in 2ſ 6° 36′ 50″, der ☊ aber in 5ſ 6° 7′ 36″ iſt. Dieſes iſt demnach die Zeit der mittlern ☌ des ☽ und des Aldebaran. Für dieſe Zeit können auf eben die Art die übrigen Umſtände des mittlern Mond- und Sonnenlaufes berechnet werden. Die Hauptfrage aber iſt, ſodann daraus die eigentliche Zeit der wahren ☌ in orbita und die übrigen wahren Umſtände des

Sonn- und Mondlaufes zu finden. Dieſes ſetzt beſondere Formeln und Tafeln voraus, von denen nun die Rede ſeyn ſoll.

§. 217.

Die aufzulöſende Aufgabe iſt überhaupt folgende: **Wenn die Zeit gegeben, da der Mond nach ſeiner mittlern Bewegung in einem fürgegebenen Punct ſeiner Bahn iſt, die Zeit zu finden, da derſelbe, nach ſeiner wahren Bewegung, in eben dieſen Punct ſeiner Bahn iſt.** Die Auflöſung dieſer Aufgabe iſt der oben (§. 82) für die Syzigien gegebenen ganz ähnlich, und noch dadurch einfacher, daß der fürgegebene Punct als unbeweglich angeſehen werden kann. Denn der Zwiſchenraum beyder Zeiten beläuft ſich höchſtens auf 13 bis 14 Stunden, und in dieſer Zeit iſt das Fortrücken der Sterne ganz unmerklich. Man nimmt daher ſchlechthin die Proſtaphaereſis des Monds für die Zeit da derſelbe nach ſeiner wahren Bewegung, in dem fürgegebenen Punct iſt, und dividirt ſie durch ſeine mittlere ſtündliche Bewegung. Man ſetze demnach die Zeit der wahren ☌ ſey τ Stunden nach der mittlern ☌, und zur Zeit der mittlern ☌ ſey

der mittlere Ort der ☉ = ☉

des ☊ = ☊

die

die mittlere anom. ☉ = a
des ☽ = M
das mittlere arg. latit. = λ
☽ − ☉ = E

ſo iſt zur Zeit der wahren ☌ (§. 66)
der mittlere Ort der ☉
$= ☉ + (2' \; 27'' \; 50''' \; 58^{IV})\tau$
des ☊
$= ☊ − (0 \; 7 \; 56 \; 35)\tau$
die mittlere anom. ☉
$= a + (2 \; 27 \; 50 \; 31)\tau$
des ☽
$= M + (32 \; 39 \; 46 \; 30)\tau$
das mittlere argum. latit.
$= \lambda + (33 \; 4 \; 24 \; 9)\tau$
der mittlere Abſtand ☽ − ☉
$= ☽ − ☉ + (30 \; 28 \; 36 \; 36)\tau$

Und die mittlere ſtündliche Bewegung des ☽
$= 32' \; 56'' \; 27''' \; 34^{IV}$

Dieſe Werthe müſſen in der Formel des §. 47. geſetzt werden, welche die Proſtaphäreſis ☾ − L''' ausdrückt, und ſo erhält man

$(32 \; 56 \; 27 \; 34)\tau$

$= 22652''$

= 22652″ ſin(M + 32′ 39″ 46‴ 30ⁱᵛ τ)	+	122″ ſin(E +	30′ 28″ 36‴ 36ⁱᵛ τ)
− 773 ſin(2M + 65 19 33 0 τ)	−	2319 ſin(2E +	60 57 13 12 τ)
+ 36 ſin(3M + 97 59 19 30 τ)	−	23 ſin(4E +	121 54 26 24 τ)
− 680 ſin(a + 2 27 50 31 τ)	+	4586 ſ(2E − M +	27 27 26 42 τ)
+ 10 ſin(2a + 4 55 41 2 τ)	−	31 ſ(4E − 2M +	54 54 53 24 τ)
+ 105 ſ(M + a + 35 7 37 1 τ)	+	175 ſ(2E + M +	93 26 59 42 τ)
− 145 ſ(M − a + 30 11 55 59 τ)	−	210 ſ(2E − 2M −	4 2 19 48 τ)
+ 150 ſ(2E − a + 58 29 22 41 τ)	−	24 ſ(E − M −	2 1 9 54 τ)
+ 46 ſ(2E − M + a + 29 55 17 13 τ)	+	52 ſ(4E − M +	88 24 39 56 τ)
− 235 ſ(2E − M − a + 24 59 36 11 τ)	−	58 ſ(2λ − M +	33 29 1 48 τ)
− 47 ſ(2☊ − 2☉ − 5 11 33 6 τ)			

§. 218.

Dieſe Gleichung habe ich anfangs, ſo wie ſie hier ſteht, aufgelöſt, und ſodann die in §. 48 erwähnten weggelaſſenen Glieder noch mitgenommen. Der Erfolg war, daß in beyden Fällen theils einerley, theils verſchiedene Glieder in der herausgebrachten Formel entweder unmerklich klein oder nett = 0 wurden. Dieſe konnte ich demnach ſämtlich weglaſſen. Und ſo erhielt ich für die Zeit, welche zur Zeit der mittlern ☌ hinzugethan werden muß, in Secunden-Zeit ausgedrückt, folgende Formel:

+ 41332'' ſin. M	+ 128'' ſin (a + M)
+ 838 ſin 2 M	+ 204 ſin (a — M)
+ 19 ſin 3 M	+ 212 ſin (2 E — a)
— 1239 ſin a	— 298 ſin (2 E + M)
+ 18 ſin 2 a	+ 428 ſ(a — 2 E + M)
+ 223 ſin E	+ 71 ſ(a + 2 E — M)
— 3500 ſin 2 E	+ 85 ſ(2 ☉ — 2 ☊)
+ 8 ſin 4 E	+ 105 ſ(M — 2 λ)
+ 8522 ſ(2 E — M)	+ 26 ſ(2 E + M — a)
+ 23 ſ2(2 E — M)	+ 27 ſ(M — 4 E)
— 43 ſ(E — M)	
— 304 ſ2 (E — M)	

§. 219.

Unter den hiebey weggelaſſenen Gliedern ſind folgende die beträchtlichſten

— 35''

$$-35'' \sin(2E+2M)$$
$$+18 \sin(4E-M-a)$$
$$+17 \sin(2E-2M-a)$$
$$+12 \sin(E+M)$$
$$-13 \sin(2M-a)$$
$$-9 \sin(2E+3M)$$
$$-9 \sin(4E-2M-a)$$
$$-11 \sin 2\lambda$$
$$+8 \sin(2E+M+a)$$
&c.

Das erſte dieſer Glieder lieſſe ich weg, weil es ſchlechthin nur von den $19''\,\text{ſ}(2☽-2S+2M) = 19''\,\text{ſ}(2E+2M)$ (§. 48) herrührt, weil es ſonſt $= 0$ würde geweſen ſeyn.

§. 220.

Nach der (§. 218) angegebenen Formel habe ich die 33ſte Tafel nach ihren verſchiedenen Argumenten berechnet. Es ſind eigentlich fünf gröſſere Tafeln und zehn kleinere, nach folgender Ordnung:

$$\text{I}^{\circ}.\ \left.\begin{array}{l} +41332 \sin M \\ +838\,\text{ſ}\,2M \\ +19\,\text{ſ}\,3M \end{array}\right\}$$

$$\text{II}^{\circ}.\ \left.\begin{array}{l} +223 \sin E \\ -3500\,\text{ſ}\,2E \\ +8\,\text{ſ}\,4E \end{array}\right\}$$

$$\text{III}^{\circ}.\ \left.\begin{array}{l} +8522\,\text{ſ}(2E-M) \\ +23\,\text{ſ}(4E-2M) \end{array}\right\}$$

IV°.

$$\begin{aligned} &\text{IV}^\circ. - 1239 \sin a \\ &\quad\;\; + \;\;\; 18\, \text{ſ}\, 2a \end{aligned}\Big\}$$

$$\begin{aligned} &\text{V}^\circ. - \;\; 43 \sin (E-M) \\ &\quad\;\; - \; 304\, \text{ſ}\,(2E-2M) \end{aligned}\Big\}$$

$$\begin{aligned}
&\text{VI}^\circ. + 128 \sin (a' + M) \\
&\text{VII}^\circ. + 204 \sin (a - M) \\
&\text{VIII}^\circ. + 212 \sin (2E - a) \\
&\text{IX}^\circ. + 298 \sin (\text{VI}^{\text{ſ}} + 2E + M) \\
&\text{X}^\circ. + 428 \sin (a - 2E + M) \\
&\text{XI}^\circ. + 71 \sin (a + 2E - M) \\
&\text{XII}^\circ. + 85 \sin (2 \odot - 2 \Omega) \\
&\text{XIII}^\circ. + 105 \sin (M - 2\lambda) \\
&\text{XIV}^\circ. + 26 \sin (2E + M - a) \\
&\text{XV}^\circ. + 27 \sin (M - 4E)
\end{aligned}$$

Dem neunten Argumente 2 E + M habe ich ſechs Zeichen beygefügt, damit das Zeichen — ebenfalls in + verwandelt, und damit die letzten 10 Argumente in eine Tafel und unter einerley Rubrique gebracht werden konnten.

§. 221.

Die ganze Rechnung werde ich nun noch durch das ſechſte der am Ende befindlichen Beyſpiele erläutern. Es betrift die Bedeckung des Aldebaran vom Monde, welche, wie wir oben (§. 215. 216) geſehen haben, nach der mittlern Bewegung 1775, Jan. 1 T. 17 St. 54′ 36″ alten Calenders, Biſſextilform, mittlerer Zeit und Pariſer Uhr eintrift. Es wird, wie

wie vorhin, aus der erſten Tafel die Epoche 1759, und aus der zwoten Tafel der Neumond No. 188 ausgeſchrieben, und dadurch für dieſen Neumond

die Zeit 1775.	49	18	54	5	
☊	5	3	34	48	
⊙	11	9	37	31	= ☽
an. ⊙	8	0	32	1	
an. ☽	7	14	39	55	

gefunden. Dieſer Neumond iſt demnach 48 T. 0 St. 59′ 29″ früher als die fürgegebene Zeit der mittlern ☌. Man ſchreibt demnach aus der zehnten Tafel aus, wie viel für 48 T. 0 St. 59′ 29″ von ⊙, a, M, ☽ muß abgezogen und hingegen zu ☊ addirt werden, um die mittlern Umſtände des Sonn- und Mondlaufes für die Zeit der mittlern ☌ ☽ et aldeb. zu finden. Es iſt demnach für dieſelbe

die Zeit 1775.	1	17	54	34
☊ =	5	6	7	26
⊙ =	9	22	16	22
a =	6	13	11	0
M =	10	17	0	24
☽ =	2	6	36	49

Hieraus findet ſich

☽ — ⊙ = E =	4	14	20	27
☽ — ☊ = λ =	9	0	29	23
⊙ — ☊ =	4	16	8	56

Mit dieſen Datis geht man in die 33ſte Tafel, und

und ſchreibt, der Ordnung nach, die Argumente und die denſelben entſprechenden Gleichungen aus, wie ſie in dem Beyſpiel auf dem untern Viertel der erſten Hälfte des Blatts ſtehen. Die Gleichungen werden in eine Summe zuſammen gerechnet, und ſo findet ſichs, daß die wahre ☌ in orbita um 8 St. 44′ 13″ früher geſchieht, und demnach 1775. 1 T. 9 St. 10′ 31″ alten Calenders, Biſſextilform, mittlerer Zeit, Pariſer Uhr, eintrift. Zu dieſer Zeit hat der ☽ in ſeiner Bahn einerley Länge mit dem Aldebaran in der Ecliptic, demnach $2^s\ 6^\circ\ 36'\ 49''$ nach der wahren Bewegung.

§ 222.

Da man aber für eben dieſe Zeit die übrigen Umſtände des Mond- und Sonnenlaufes wiſſen muß, ſo geht man wiederum in die zehnte Tafel und ſchreibt da aus, wie viel für die — 8 St. 44′ 13″, um welche die wahre ☌ früher geſchieht, von ☉, a, M, ☽ abgezogen und hingegen zu ☊ addirt werden muß. Und ſo findet ſich, wie in dem Beyſpiele zu ſehen, für die Zeit der wahren ☌ der mittlere Ort

des ☊	=	5	6	8	36
der ☉	=	9	21	54	50
a	=	6	12	49	28
M	=	10	12	15	2
☽	=	2	1	49	0.

§. 223.

Hiedurch findet ſich nach Anleitung der
Tab. 11. die Gleichung ☉ = + 26′ 14″
13. . . . des ☊ = − 2 22
und damit der wahre Ort der
☉ = 9 22 21 4
☊ = 5 6 6 14
Da nun auch der wahre Ort des Mondes
L‴ = 2 6 36 49
iſt, ſo laſſen ſich hieraus die Argumente für Tab. 14 und 29 formiren, und
reduct. ad eccl. = + 0 0 14
lat. ☽ = − 5 9 25
finden, wie dieſes mitten auf der letzten Hälfte des Blatts in dem Beyſpiele zu ſehen.

§. 224.

Die Gleichung der Zeit, welche nach Tab. 12
= − 9′ 24″
gefunden wird; ingleichem die reduct. eccl. ad aequatorem, welche nach Tab. 23
= + 1 47 37
gefunden wird, und die aſc. rect. ☉
= 9 24 8 41
giebt, habe ich, Raums halber, in dem Beyſpiele weggelaſſen. Es iſt aber für ſich klar, daß man beyde gebraucht.

§. 225.

Für die übrigen unten auf der letzten Hälfte des Blatts beſtimmte Umſtände, gebraucht man die vorhin (§. 222) gefundenen Data, und ſo erhält man nach

Tab. 30	die Parall. ☽	=	54′ 31″
• • 19	der Semid. ☽	=	14 52
• • 31	der Horar. ☽	=	30 3
• • 32	das incr. lat. horar.	=	+0 5.

Und damit ſind die zu einer Projection erforderlichen Umſtände des Sonn- und Mondlaufes beſtimmt. In Abſicht auf den Aldebaran gebraucht es noch deſſen aſc. recta, welche 1775 = $2^s\ 5°\ 45'\ 25''$ iſt, die Declination = $16°\ 2'\ 32''$, und der Winkel, den der aus dem Pol der Ecliptic durch den Aldebaran gezogene Bogen mit dem durch den Aldebaran gehenden Mittagskreis daſelbſt macht, und welcher = $10°\ 15'\ 13''$ gefunden wird.

§. 226.

Ich werde aber, um die Projectionsart zu erläutern, mich dieſes Beyſpiels nicht bedienen. Denn auſſer daß die berechnete Bedeckung des Aldebaran fürnemlich nur in den Südländern ſichtbar iſt, ſo wird es dienlicher ſeyn, die oben (§. 193) berechnete Bedeckung der Pleiaden vorzunehmen, weil dabey mehrere Sterne zugleich vorkommen. Die Berechnung war für

den hellen Stern der Pleiaden, oder die Alcione. Ich ſetzte dabey die Zeit der wahren ☌ in orbita als beyläuftig bekannt voraus, und ſo lieſſen ſich die Umſtände des Sonnen- und Mondlaufes, und damit auch die eigentliche Zeit der ☌ berechnen, und gleichſam nachholen. Um aber auch den Gebrauch der 33ſten Tafel bey dieſem Fall zu zeigen, ſo habe ich die Berechnung nochmals vorgenommen, und in dem ſiebenten der am Ende befindlichen Beyſpiele vorgeſtellt. Dieſes Beyſpiel iſt von dem ſechſten, in Abſicht auf die Anordnung, weiter nicht verſchieden, als in zweyen Stücken. Einmal habe ich die Länge der Alcione 1. 26. 57. 38 von dem Orte des Neumondes 11. 11. 11. 34 abgezogen, welche zunächſt auf die verlangte ☌ folgt. Der Unterſchied 9. 14. 13. 56 war demnach der Bogen, den der Mond von der Zeit der ☌ bis zu dem Neumonde nach ſeiner mittlern Bewegung durchläuft; und aus der zehnten Tafel findet ſichs, daß dieſes in 21 T. 13 St. 42′ 40″ geſchieht. Dadurch lieſſen ſich auch die übrigen Data für die Zeit der mittlern ☌

1783. 29 T. 17 St. 52′ 12″

☊ =	11ˢ	29°	54′	22″
☉ =	10	19	55	52
a =	7	10	41	42
M =	11	8	41	57
☽ =	1	26	57	38

finden. Und vermittelſt der 33ſten Tafel fand

ſichs

ſichs hieraus, daß die wahre ☌ in orbita 5 St. 13′47″ früher geſchieht, und demnach, ſo viel dieſe Zeit nach der zehnten Tafel austrägt, die zwote Reduction vorgenommen werden muß, um endlich für die Zeit der wahren ☌ in orbita den wahren Ort

des ☊ = 11 39 48 14
der ☉ = 10 20 59 18
des ☽ = 1 26 57 38

ſo wie auch die übrigen in dem Beyſpiele zu erſehende Stücke zu finden.

§. 227.

Das andere iſt, daß die Zeit der wahren ☌ in dem Beyſpiele ohne alle Reduction gelaſſen worden, um den Raum für das übrige aufzubehalten. Ich werde ſie demnach hier nachholen. Die Zeit iſt

		T.	St.	′	″	
	1783.	29	12	38	25	
hievon gehen ab		—	6	0	0	wegen der Biſſextilform
		—		14	40	wegẽ der Gleich. der Zeit
dies giebt	1783.	29	6	23	45	
hingegen komen hinzu	+	11	0	0	0	wegen des alten Calend.
	+			44	25	wegen der Berliner Uhr.
Dies giebt	1783.	40	7	8	10	

oder nach Tab. 3.

1738. Febr. 9 7 8 10

welches von der obigen Beſtimmung (§. 201) nur um 9″ verſchieden iſt.

§. 228.

Nun findet ſich für den wahren Ort der Sonne

		s	°	′	″
		10	20	59	18
die red. ad eccl. Tab. 23	= +		2	23	44
demnach die aſc. recta	=	10	23	23	2
Es iſt aber die aſc. recta der Alcione	=	1	23	38	40
Diff.	=	3	0	15	38

Um ſo viel iſt demnach, für die Zeit da Alcione in ☌ mit dem ☽ iſt, die Sonne ſchon abendwerts fortgerückt. Verwandelt man demnach dieſen Bogen in Zeit, ſo giebt derſelbe

6 St. 1′ 2″

Da nun die ☌ Abends um

7 · 8 10

geſchieht, ſo iſt die

Diff. 1 · 7 8

Und um ſo viel Zeit wäre Alcione abendwerts vom Mittage weg, wenn die tägliche Umwälzung der Sterne nicht um $\frac{1}{365}$ten Theil geſchwinder wäre. Der Unterſchied beträgt 11″, und damit iſt Alcione um 1 St. 6′ 57″ früher am Mittagskreiſe, als die ☌ eintrift. Demnach culminiret ſie um

6 St. 1′ 13″

Dieſes iſt nun die Zeit, die in der Projection zum Grunde gelegt wird.

§. 229.

§. 229.

Ferner iſt die Breite

des Mondes	= 4 25 50
der Alcione	= 4 1 34
alſo der Mond nördlicher um	0 24 16.

§. 230.

Endlich iſt die Declination der Alcione = 23° 26′ 30″, und der Winkel, welchen die zween aus dem Weltpole und dem Pol der Ecliptic durch die Alcione gehende Circul daſelbſt machen = 13° 41′ 22″. Aus dieſen Stücken wird ſich nun die Projection ergeben.

§. 231.

Man mache in der zwölften Figur nach einer angenommenen Scala ε, die Halbmeſſer A C = C B der Mondparallaxe 54′ 28″ gleich, und ziehe E C R durch C auf A B ſenkrecht, ſo ſtellt A B den Parallelkreis der Ecliptic vor, welcher durch die Alcione geht, und C E läuft in den Nordpol der Ecliptic. Auf eben der Scala ε nimmt man die reduct. ☽ ad eccl. 6′ 20″, und trägt ſie, weil ſie negativ iſt, aus C vorwärts in D. Eigentlich ſollte ſie in Verhältnis des Halbmeſſers zum Coſinus der Breite des Mondes 0, 9970 vermindert werden; es trägt dieſes aber kaum 1 Secunde aus, und ſo kann es unterbleiben. Fig. 12.

Aus D wird D L ſenkrecht gezogen, und dem vorhin (§. 229) gefundenen Unterſchied der Breite gleich gemacht, ſo ſtellt L den Ort des Mondes zur Zeit der ☌ in orbita vor. Es fällt aber L aufwerts, weil der Mond nördlicher iſt. Seine Breite iſt ebenfalls im Zunehmen, und ſo wird das incr. latit. horar. = + 1′ 26″ aus L in F aufwerts getragen, und F H mit A C B parallel gezogen. Aus L in H trägt man ſodann den horar. ☽ = 29′ 46″ und zieht durch L H die gerade Linie n L H c, welche die Mondbahn vorſtellt. In der Figur iſt ſowohl L F als L H doppelt gröſſer genommen, damit alles beſſer auseinander fiele, und ſelbſt auch die Linie L H ſich genauer ziehen lieſſe. Der horar. ☽ iſt auf der Scala ζ in Minuten getheilt; und ſo läßt ſich die Mondbahn dergeſtalt in Stunden und Minuten theilen, daß L auf 7 St. 8′ 10″, als die Zeit der ☌ in orbita (§. 227) fällt. Uebrigens habe ich den beyden Scalen, ſo wie der ganzen Figur, eine ſolche Gröſſe gegeben, daß ſich die bey der fünften Figur gezeichneten zwo Scalen γ, δ dabey gebrauchen lieſſen, ſo wie es auch vorhin bey der ſiebenten und achten Figur geſchehen (§. 140).

§. 232.

Man mache nun ferner den Winkel E C V = 13° 41′ 21″ (§. 230) und ziehe durch P C die gerade Linie N P C m, und durch die Linie

nie J C K ſenkrecht, ſo ſtellt N m die Welt-axe, und J K den durch die Alcione gehenden Parallelkreis des Aequators vor. Daß dieſe Axe von E gegen B zu falle, erhellet aus der ſechſten Figur, weil die Länge der Alcione zwiſchen ♈ und ♋ fällt.

§. 233.

Man nehme nun die Declination der Alcione 23° 26′ 30″, und trage ihren Zuſatz zu 90° oder 66° 33′ 30″ von der Scala δ (Fig. 5) aus C in P, und zwar deswegen aufwerts, weil die Declination nördlich iſt. Denn wäre ſie ſüdlich, ſo müſte man ſie herunterwerts, und hingegen die Summe von derſelben und von 90° aufwerts tragen. Gegenüber aus C in n trage man von gleicher Scala δ die doppelte Declination, ſo wird ſich aus m durch JPK ein Circul ziehen laſſen, welcher den von der Alcione 90 Grad abſtehenden Mittagskreis in der ſtereographiſchen Projection vorſtellt, und P ſtellt den Nordpol der Erde vor.

§. 234.

Um nun auch den Parallelkreis von Berlin zu entwerfen, ſo nehme man die Berliner Aequatorshöhe 37° 27′ 30″, und addirt ſie zu dem compl. declin. 66° 33′ 30″. Die Summe 104° 1′ 0″ wird von der Scala δ aus C in N, und dann auch die Differenz

29° 6′ 0″ aus C in Q getragen. Wäre die Differenz negativ geweſen, ſo hätte ſie aus C gegen m getragen werden müſſen. Und wäre die Declination ſüdlich geweſen, ſo hätte man anſtatt 90° — 23° 26′ 30″ die Summa 90° + 23° 26′ 30″ nehmen müſſen. Es ergeben ſich aber alle dieſe Abänderungen, in jedem Fall, aus bloſſer Betrachtung der Umſtände, von ſelbſt. Nun wird auf Q N, als auf einem Halbmeſſer, der Circul Q M N S beſchrieben, und dieſer ſtellt den Berliner Parallelcircul ſtereographiſch vor. Er wird eben, ſo wie oben (§. 132), in Stunden getheilt. Man zieht nemlich durch M S die gerade Linie M T, und beſchreibt auf dieſer, als auf einem Halbmeſſer, den Circul S a G, und theilt dieſen in 24 gleiche Theile oder Stunden, oder eigentlich in 23 St. 56′ 4″, als den Sterntag, ein, aber dergeſtalt, daß der Punct G, wo der Circul die Axe ſchneidet, auf die vorhin (§. 228) gefundene 6 St. 1′ 13″ als die Zeit der Culmination der Alcione falle. Durch die Theilungspuncte, dergleichen z. E. a iſt, werden gerade Linien in den Pol P gezogen, welche den Parallelkreis M Q S in Stunden theilen werden, ſo wie ſie dabey gezeichnet ſind. Da man die Projection gröſſer machen muß, als ſie in der Figur iſt, ſo muß man die Eintheilung wenigſtens von 10 zu 10 Minuten vornehmen.

§. 235.

§. 235.

Hieraus wird ſich nun auch die ſcheinbare Mondbahn, ſo wie ſie zu Berlin geſehen wird, entwerfen laſſen. Man ziehe z. E. für 10 Uhr die Linie C b, und mit derſelben c d parallel. Man trage C b auf die Scala δ (Fig. 5) und ſo viele Grade ſie daſelbſt abſchneidet, ſo viel nehme man auf der Scala γ, und trage ſie aus c in d; ſo wird d der Punct der ſcheinbaren Mondbahn für 10 Uhr ſeyn. Auf gleiche Art verfahre man von Stund zu Stund, oder bey gröſſern Projectionen von 10 zu 10 Minuten, und ſo wird die ſcheinbare Mondbahn d f q conſtruirt und zugleich auch eingetheilt ſeyn. Man ſieht aus der Figur, daß es eine merklich krumme Linie iſt, und die Stunden darauf ungleich ſind. Beydes rührt von der Parallaxe her, weil der Mond die Zeit über nicht in gleicher Höhe bleibt.

§. 236.

Ungeachtet nun dieſe Projection unmittelbar für die Alcione eingerichtet iſt, ſo hindert dennoch nichts, daß ſie nicht auch für die übrigen Pleiaden dienen ſollte. Denn A B iſt der Parallelkreis der Ecliptic, welcher durch die Alcione geht, und C E läuft in den Pol der Ecliptic. Man nehme demnach den Unterſchied der Länge zwiſchen der Alcione und den übrigen Pleiaden, dieſen Unterſchied vermindere

mindere man in der vorhingedachten Verhältnis des Halbmeſſers zum coſin. declin. (§. 231) und trage ihn aus C gegen B, wenn er poſitiv iſt, gegen A aber wenn er negativ iſt. Durch die Puncte, ſo man hiedurch findet, ziehe man Linien durch A B ſenkrecht, und auf dieſe trage man den Unterſchied der Breite zwiſchen der Alcione und der vorhabenden Pleiade, und zwar heraufwerts, wenn dieſe nördlicher iſt, und herunterwerts, wenn ſie ſüdlicher iſt, ſo werden die ſämtliche Pleiaden, wie ſie in der Figur gezeichnet ſind, eingetragen werden können. Will man aber dieſes genauer haben, ſo berechne man die Diſtanz der Alcione von jeder der übrigen Pleiaden, und dem Winkel, um welchen jede von dem Mittagskreiſe der Alcione weſt- oder oſtwerts abliegt. Dieſer Winkel läßt ſich ſodann conſtruiren, und die Diſtanz, von der Scala ε genommen, aus C auftragen.

§. 237.

Nimmt man nun den Halbmeſſer des Monds 30′ 3″ auf der Scala ε, ſo kann man aus jedem Punct f der ſcheinbaren Mondbahn einen Circul beſchreiben, welcher den Mond vorſtellen wird, und zwar ſo, wie derſelbe bey den Sternen vorbey geht. So wie dieſer Circul in der Figur gezeichnet iſt, bedeckt er die Electra, und fängt an die Merope zu bedecken. Man ſieht auch leicht, daß Alcione

bald

bald darauf auch wird bedeckt werden, zumal da der Mittelpunct des Mondes nahe vorbey geht. Gegen 9 Uhr werden auch Atlas und Pleione bedeckt, und damit in allem fünf Pleiaden, nebſt dem nächſt bey der Alcione befindlichen Sternchen. So bald einmal Electra angefangen hat bedeckt zu werden, iſt immer wenigſtens eine der Pleiaden unter dem Monde, und gegen 8¾ Uhr bedeckt der Mond die Alcione, Pleione und den Atlas zugleich. Die Erſcheinung dauert von 6 Stunden 12′ bis 9 Stunden 43′ in einem fort. Die Celeno, Maia, Taigete, Aſterope bleiben zu Berlin über dem Monde nordwerts, und erſcheinen daher nur in ſüdlichern Gegenden von dem Monde bedeckt.

§. 238.

Man ſetze nun einen Ort der ebenfalls auf dem Berliniſchen Parallelcircul, aber um 15° oder 1 Stunde weſtlicher liegt. Dieſes iſt um Sonnenzeit, und ſo iſt daſelbſt 6 Uhr, wenn es zu Berlin bereits 7 Uhr iſt. Nun culminirt die Alcione zu Berlin um 6 Stunden 1′ 13″ (§. 228). Um dieſe Zeit iſt es demnach daſelbſt erſt 5 St. 1′ 13″. Und eben daſelbſt erfolgt die Culmination nach der dortigen Sonnenuhr um nicht gar eine Stunde ſpäter, nemlich um 5 St. 1′ 3″. Denn da der Stern zu ſeiner täglichen Umwälzung nur 23 Stunden 56′ 4″ Sonnenzeit gebraucht, ſo verkürzt

er

er jede Zeit um eben ſo viel, und dieſes trägt für die 15° oder für die Stunde, um welche der Ort weſtlicher liegt, 10 Secunden aus. Der Erfolg iſt nun dieſer, daß in Q 5 St. 1′ 3″ müſſen geſchrieben, und die Zeit von da an fortgezählt werden, anſtatt daß es für Berlin von 6 St. 1′ 13″ an geſchahe. Sodann muß man auf der Linie n L S c, wo die Stunden 5, 6, 7, 8, 9, 10 angezeichnet ſtehen, jede derſelben um 1 vermindern, und demnach 4, 5, 6, 7, 8, 9 hinſchreiben, und ſo das übrige wie vorhin vornehmen.

§. 239.

Wollte man aber die Projection für einen Ort noch mitnehmen, der zwar nicht in dem Berliner Parallelkreiſe, aber unter dem Berliner Mittagskreiſe liegt, ſo bleibt, in Abſicht auf die Zeit, alles wie bey Berlin. Man muß aber ſtatt des Berliner Parallelkreiſes M Q S N denjenigen conſtruiren und eintheilen, den die Polhöhe des fürgegebenen Ortes erfordert.

§. 240.

Man kann aber übrigens auch für den erſten Fall (§. 238) die Stunden auf M Q S laſſen, wie ſie ſind. Dieſes iſt aber eben ſo viel als wenn man ſetzte, daß an dem um 15 Grad weſtlicher liegenden Ort, die Uhr um 10″ verrückt wäre, ſo, daß ſie anſtatt 5 St. 1′ 3″ zu zeigen, 5 St. 1′ 13″ zeigte. Darüber

kann

kann man immer Rechnung tragen. Hingegen müſſen ſodann auch auf n L S c ſtatt der Stunden 4, 5 ‥ 9, die Zeiten 4 St. 0′ 10″; 5 St. 0′ 10″ hingeſchrieben, oder die Stunden ſelbſt um ſo viel vorwerts gerückt werden. Der Erfolg iſt ſodann, daß die ganze ſcheinbare Mondbahn q d, ſo eingetheilt, wie die für Berlin iſt, um 1 St. — 10″ = 59′ 50″ der Scala ζ in einer mit n L S c parallelen Richtung gegen B zu, verſchoben werden muß oder kann, um nach der um 10″ zu früh gehenden Uhr alle Umſtände der Bedeckung für den um 15 Grade auf dem Berliner Parallelcircul weſtlicher liegenden Ort anzugeben.

Tafeln

Tafeln

für die

Neu- und Vollmonde,

Sonn- und Mondsfinſterniſſe,

Umſtände des Sonn- und Mond-
laufes auſſer den Syzigien,

Bedeckungen der Fixſterne von
dem Monde,

Halbmeſſer, Parallaxe und
ſtündliche Bewegung,

Stündliche Veränderung der
Breite ꝛc.

nebſt den

in der Abhandlung erwähnten

Beyſpielen.

Jahre	arg. latit. ☽	′	″	Vom Anfang des Jahrs T.	St.	′	″	Vom Ende des Jahrs T.	St.	′	″
− 747	☊ −	8	27	62	14	52	19	302	15	7	41
− 718	☋ −	5	14	42	7	41	39	327	22	18	21
− 689	☊ −	2	0	22	0	30	58	343	5	29	2
− 660	☋ +	1	13	1	17	20	18	363	12	39	42
− 632	☊ +	4	26	346	16	9	38	18	13	50	22
− 603	☋ +	7	40	326	8	58	57	38	21	1	3
− 574	☊ +	10	53	306	1	48	17	59	4	11	53
− 545	☋ +	14	6	285	18	37	36	79	11	22	24
− 527	☋ −	14	4	296	14	20	23	68	15	39	37
− 498	☊ −	10	51	276	7	9	43	88	22	50	17
− 469	☋ −	7	38	255	23	59	3	109	6	0	57
− 440	☊ −	4	25	235	16	48	22	129	13	11	38
− 411	☋ −	1	12	215	9	37	42	149	20	22	18
− 382	☊ +	2	2	195	2	27	1	170	3	32	59
− 353	☋ +	5	15	174	19	16	21	190	10	43	39
− 324	☊ +	8	28	154	12	5	41	210	17	54	19
− 295	☋ +	11	42	134	4	55	0	231	1	5	0
− 266	☊ +	14	55	113	21	44	20	251	8	15	40
− 248	☊ −	13	14	124	17	27	8	240	12	32	52
− 219	☋ −	10	1	104	10	16	28	260	19	43	32
− 190	☊ −	6	48	84	3	5	48	281	2	54	12
− 161	☋ −	3	35	63	19	55	8	301	10	4	52
− 132	☊ −	0	22	43	12	44	28	321	17	15	32
− 103	☋ +	2	51	23	5	33	47	342	0	26	13
− 74	☊ +	6	5	2	22	23	7	362	7	36	53
− 46	☋ +	9	18	347	21	12	27	17	8	47	33
− 17	☊ +	12	31	327	14	1	47	37	15	58	13
+ 1	☋ −	15	38	338	9	44	35	26	20	16	25
+ 30	☊ −	12	25	318	2	33	54	47	3	26	6
+ 59	☋ −	9	11	297	19	23	15	67	10	36	45

Tafel.

Mittlerer Ort der ☉				Mittl. anom. der ☉				Mittl. anom. des ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
11	20	58	6	9	9	45	44	8	1	29	19
10	13	10	57	8	19	27	9	4	3	54	0
9	23	23	49	7	29	8	15	0	6	18	41
9	3	36	40	7	8	49	31	8	8	43	22
8	13	49	31	6	18	30	46	4	11	8	3
7	24	2	23	5	28	12	2	0	13	32	43
7	4	15	14	5	7	53	17	8	15	57	24
6	14	28	5	4	17	34	33	4	18	22	5
6	25	16	19	4	28	3	6	4	15	30	45
6	5	29	11	4	7	44	21	0	17	55	26
5	15	42	2	3	17	25	36	8	20	20	8
4	25	54	53	2	27	6	52	4	22	44	49
4	6	7	45	2	6	48	8	0	25	9	30
3	16	20	36	1	16	29	23	8	27	34	11
2	26	33	27	0	26	10	39	4	29	58	52
2	6	46	19	0	5	51	54	1	2	23	33
1	16	59	10	11	15	33	10	9	4	48	14
0	27	12	1	10	25	14	25	5	7	12	55
1	8	0	14	11	5	42	58	5	4	21	35
0	18	13	6	10	15	24	13	1	6	46	16
11	28	25	57	9	25	5	28	9	9	10	56
11	8	38	48	9	4	46	43	5	11	35	37
10	18	51	39	8	14	27	59	1	14	0	18
9	29	4	31	7	24	9	14	9	16	24	59
9	9	17	22	7	3	50	30	5	18	49	40
8	19	30	13	6	13	31	45	1	21	14	20
7	29	43	5	5	23	13	1	9	23	39	1
8	10	31	19	6	3	41	34	9	20	47	41
7	20	44	11	5	13	22	49	5	23	12	22
7	0	57	2	4	23	4	5	1	25	37	3

Jahre	arg. latit. ☽		′	″	Vom Anfang des Jahrs T.	St.	′	″	Vom Ende des Jahrs T.	St.	′	″
88	☋	−	5	58	277	12	12	32	87	17	47	28
117	☊	−	2	45	257	5	1	52	108	0	58	8
146	☋	+	0	28	236	21	51	11	128	8	8	49
175	☊	+	3	42	216	14	40	31	148	15	19	29
204	☋	+	6	55	196	7	29	50	168	22	30	10
233	☊	+	10	8	176	0	19	10	189	5	40	50
262	☋	+	13	21	155	17	8	30	209	12	51	30
280	☋	−	14	39	166	12	51	17	198	17	8	43
309	☊	−	11	25	146	5	40	37	219	0	19	23
338	☋	−	8	12	125	22	29	57	239	7	30	3
367	☊	−	5	8	105	15	19	17	259	14	40	43
396	☋	−	1	55	85	8	8	36	279	21	51	24
425	☊	+	1	18	65	0	57	56	300	5	2	4
454	☋	+	4	32	44	17	47	16	320	12	12	44
483	☊	+	7	45	24	10	36	36	340	19	23	24
512	☋	+	10	58	4	3	25	55	361	2	34	5
540	☊	+	14	12	349	2	15	15	16	3	44	45
558	☊	−	13	58	359	21	58	2	5	8	1	58
587	☋	−	10	45	339	14	47	22	25	15	12	38
616	☊	−	7	31	319	7	36	41	45	22	23	19
645	☋	−	4	18	299	0	26	1	66	5	33	59
674	☊	−	1	5	278	17	15	21	86	12	44	39
703	☋	+	2	9	258	10	4	40	106	19	55	20
732	☊	+	5	22	237	2	54	0	127	3	6	0
761	☋	+	8	35	217	19	43	20	147	10	16	40
790	☊	+	11	49	197	12	32	39	167	17	27	21
819	☋	+	15	2	177	5	21	59	188	0	38	1
837	☋	−	13	8	188	1	4	46	177	4	55	14
866	☊	−	9	55	167	17	54	6	197	12	5	54
895	☋	−	6	41	147	10	43	25	217	19	16	35

Mittlerer Ort der ☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
6	11	9	53	4	2	45	20	9	28	1	44
5	21	22	44	3	12	26	35	6	0	26	25
5	1	35	36	2	22	7	51	2	2	51	6
4	11	48	27	2	1	49	6	10	5	15	47
3	22	1	18	1	11	30	22	6	7	40	28
3	2	14	9	0	21	11	37	2	10	5	8
2	12	27	0	0	0	52	53	10	12	29	49
2	23	15	14	0	11	21	24	10	9	38	29
2	3	28	5	11	21	2	40	6	12	3	10
1	13	40	57	11	0	43	56	2	14	27	51
0	23	53	49	10	10	25	12	10	16	52	32
0	4	6	40	9	20	6	27	6	19	17	13
11	14	19	32	8	29	47	43	2	21	41	54
10	24	32	24	8	9	28	58	10	24	6	35
10	4	45	15	7	19	10	14	6	26	31	16
9	14	58	6	6	28	51	29	2	28	55	57
8	25	10	58	6	8	32	45	11	1	20	38
9	5	59	11	6	19	1	18	10	28	29	18
8	16	12	2	5	28	42	33	7	0	53	59
7	26	24	53	5	8	23	48	3	3	18	40
7	6	37	44	4	18	5	4	11	5	43	20
6	16	50	35	3	27	46	19	7	8	8	1
5	27	3	26	3	7	27	35	3	10	32	42
5	7	16	18	2	17	8	50	11	12	57	23
4	17	29	9	1	26	50	6	7	15	22	4
3	27	42	0	1	6	31	21	3	17	40	44
3	7	54	52	1	16	59	54	11	20	11	25
3	18	43	6	0	26	41	10	11	17	20	5
2	28	55	57	0	6	22	25	7	19	44	46
2	9	8	48	11	16	3	41	3	22	9	27

Jahre	arg. latit. ☽				Vom Anfang des Jahrs				Vom Ende des Jahrs			
			′	″	T.	St.	′	″	T.	St.	′	″
924	☊	—	3	28	127	3	32	46	238	2	27	14
953	☋	—	0	15	106	20	22	6	258	9	37	54
982	☊	+	2	58	86	13	11	25	278	16	48	35
1011	☋	+	6	12	66	6	0	45	298	23	59	15
1040	☊	+	9	25	45	22	50	5	319	7	9	55
1669	☋	+	12	38	25	15	39	24	339	14	20	36
1087	☋	+	15	32	36	11	22	12	328	18	37	48
1116	☊	—	12	19	16	4	11	31	349	1	48	29
1144	☋	—	9	6	361	3	0	51	4	2	59	9
1173	☊	—	5	52	340	19	50	10	24	10	9	50
1202	☋	—	2	39	320	12	39	30	44	17	20	30
1231	☊	+	0	34	300	5	28	50	65	0	31	10
1260	☋	+	3	47	279	22	18	9	85	7	41	51
1289	☊	+	7	0	259	15	7	29	105	14	52	31
1318	☋	+	10	14	239	7	56	49	125	22	3	11
1347	☊	+	13	27	219	0	46	8	146	5	13	52
1365	☊	—	14	53	229	20	28	56	135	9	31	4
1394	☋	—	11	29	209	13	18	16	155	16	41	44
1423	☊	—	8	16	189	6	7	36	175	23	52	24
1452	☋	—	5	2	168	22	56	55	196	7	3	5
1481	☊	—	1	49	148	15	46	15	216	14	13	45
1510	☋	+	1	24	128	8	35	34	236	21	24	26
1539	☊	+	4	38	108	1	24	54	257	4	35	6
1568	☋	+	7	51	87	18	14	14	277	11	45	46
1597	☊	+	11	4	67	11	3	33	297	18	56	27
1626	☋	+	14	17	47	3	52	53	318	2	7	7
1644	☋	—	13	52	57	23	35	41	307	6	24	19
1673	☊	—	10	39	37	16	25	0	327	13	35	0
1702	☋	—	7	25	17	9	14	20	347	20	45	40
1730	☊	—	4	12	362	8	3	39	2	21	56	21

Mittlere Ort der ☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
1	19	21	40	10	25	44	56	11	24	34	8
0	29	34	31	10	5	26	11	7	26	58	49
0	9	47	23	9	15	7	27	3	29	23	30
11	20	0	14	8	24	48	42	0	1	48	11
11	0	13	5	8	4	29	58	8	4	12	52
10	10	25	57	7	14	11	13	4	6	37	33
10	21	14	11	7	24	39	46	4	3	46	13
10	1	27	2	7	4	21	2	0	6	10	54
9	11	39	53	6	14	2	17	8	8	35	35
8	21	52	45	5	23	43	33	4	11	0	16
8	2	5	36	5	3	24	48	0	13	24	57
7	12	18	27	4	13	6	3	8	15	49	38
6	22	31	19	3	22	47	19	4	18	14	19
6	2	44	10	3	2	28	34	0	20	39	0
5	12	57	1	2	12	9	50	8	23	3	41
4	23	9	53	1	21	51	5	4	25	28	22
5	3	58	6	2	2	19	38	4	22	37	1
4	14	10	57	1	12	0	54	0	25	1	42
3	24	23	48	0	21	42	9	8	27	26	23
3	4	36	40	0	1	23	25	4	29	51	4
2	14	49	31	11	11	4	40	1	2	15	45
1	25	2	22	10	20	45	55	9	4	40	26
1	5	15	14	10	0	27	11	5	7	5	7
0	15	28	5	9	10	8	26	1	9	29	48
11	25	40	56	8	19	49	42	9	11	54	29
11	5	53	48	7	29	30	57	5	14	19	9
11	16	42	2	8	9	59	30	5	11	27	49
10	26	54	53	7	19	40	46	1	13	52	30
10	7	7	45	6	29	22	1	9	16	17	11
9	17	20	36	6	9	3	17	5	18	41	52

Jahre	arg. latit. ☽				Vom Anfang des Jahrs				Vom Ende des Jahrs			
			′	″	T.	St.	′	″	T.	St.	′	″
1759	☋	—	0	59	342	0	52	59	23	5	7	1
1788	☊	+	2	14	321	17	42	19	43	12	17	41
1817	☋	+	5	28	301	10	31	38	63	19	28	22
1846	☊	+	8	41	281	3	20	58	84	2	39	2
1875	☋	+	11	54	260	20	10	18	104	9	49	42
1904	☊	+	15	7	240	12	59	37	124	17	0	23
1922	☊	—	13	3	251	8	42	24	113	21	17	36
1951	☋	—	9	49	231	1	31	44	134	4	28	16
1980	☊	—	6	36	210	18	21	4	154	11	38	56
2009	☋	—	3	22	190	11	10	23	174	18	49	37
2038	☊	—	0	9	170	3	59	43	195	2	0	17
2067	☋	+	3	4	149	20	49	3	215	9	10	57
2096	☊	+	6	18	129	13	38	22	235	16	21	38
2125	☋	+	9	31	109	6	27	42	255	23	32	18
2154	☊	+	12	44	88	23	17	2	276	6	42	58
2172	☊	—	15	26	99	18	59	49	265	11	0	11
2201	☋	—	12	12	79	11	49	8	285	18	10	52
2230	☊	—	8	59	59	4	38	28	306	1	21	32
2259	☋	—	5	46	38	21	27	48	326	8	32	12
2288	☊	—	2	32	18	14	17	7	346	15	42	53
2316	☋	+	0	41	363	13	6	27	1	16	53	33
2345	☊	+	3	54	343	5	55	47	22	0	4	13
2374	☋	+	7	8	322	22	45	6	42	14	14	54
2403	☊	+	10	21	302	15	34	26	62	14	25	34
2432	☋	+	13	34	282	8	23	46	82	21	36	14
2450	☋	—	14	36	293	4	6	34	72	1	53	26
2479	☊	—	11	22	272	20	55	53	92	9	4	7
2508	☋	—	8	9	252	13	45	13	112	16	14	47
2537	☊	—	4	56	232	6	34	33	132	23	25	27
2566	☋	—	1	42	211	23	23	52	153	6	36	8

Mittlerer Ort der ☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
8	27	33	27	5	18	44	32	1	21	6	33
8	7	46	18	4	28	25	47	9	23	31	14
7	17	59	10	4	8	7	3	5	25	55	55
6	28	12	1	3	17	48	18	1	28	20	36
6	8	24	52	2	27	29	34	10	0	45	17
5	18	37	44	2	7	10	49	6	3	9	58
5	29	25	59	2	17	39	22	6	0	18	37
5	9	38	50	1	27	20	38	2	2	43	18
4	19	51	41	1	7	1	53	10	5	7	59
4	0	4	33	0	16	43	9	6	7	32	40
3	10	17	24	11	26	24	24	2	9	57	21
2	20	30	15	11	6	5	39	10	12	22	2
2	0	43	7	10	15	46	55	6	14	46	43
1	10	55	58	9	25	28	10	2	17	11	24
0	21	8	49	9	5	9	26	10	19	36	5
1	1	57	3	9	15	37	59	10	16	44	44
0	12	9	55	8	25	19	14	6	19	9	25
11	22	22	46	8	5	0	30	2	21	34	6
11	2	35	37	7	14	41	45	10	23	58	47
10	12	48	29	6	24	23	1	6	26	23	28
9	23	1	20	6	4	4	16	2	28	48	9
9	3	14	11	5	13	45	31	11	1	12	50
8	13	27	3	4	23	26	47	7	3	37	31
7	23	39	54	4	3	8	2	3	6	2	12
7	3	52	45	3	12	49	18	11	8	26	53
7	14	40	59	3	23	17	50	11	5	35	33
6	24	53	50	3	2	59	5	7	8	0	14
6	5	6	41	2	12	40	21	3	10	24	55
5	15	19	32	1	22	21	36	11	12	49	36
4	25	32	24	1	2	2	52	7	15	14	17

Neumonde No.	arg. latit. ☽	°	′	″	T.	St.	′	″
0	☊	0	0	0	0	0	0	0
1					29	12	44	1
2					59	1	28	6
3					88	14	12	9
4					118	2	56	12
5					147	15	40	15
	☋							
6	+	4	1	24	177	4	24	18
7					206	17	8	20
8					236	5	52	23
9					265	18	36	26
10					295	7	20	29
11					324	20	4	32
	☊							
12	+	8	2	47	354	8	48	38
					Zweytes			
13					18	15	32	38
14					48	4	16	41
15					77	17	0	44
16					107	5	44	46
17	−	18	36	3	136	18	28	49
	☋							
18	+	12	4	11	166	7	12	52
19					195	19	56	55
20					225	8	40	58
21					254	21	25	1
22					284	10	9	4
23	−	14	34	39	313	22	53	7
	☊							
24	+	16	5	35	343	11	37	10

Tafel

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	29	6	24	0	29	6	19	0	25	49	0
1	28	12	49	1	28	12	38	1	21	38	1
2	27	19	13	2	27	18	57	2	17	27	1
3	26	25	37	3	26	25	16	3	13	16	2
4	25	32	1	4	25	31	35	4	9	5	2
5	24	38	26	5	24	37	54	5	4	54	3
6	23	44	50	6	23	44	13	6	0	43	3
7	22	51	14	7	22	50	32	6	26	32	4
8	21	57	39	8	21	56	51	7	22	21	4
9	21	4	3	9	21	3	10	8	18	10	4
10	20	10	27	10	20	9	29	9	13	59	5
11	19	16	51	11	19	15	48	10	9	48	5
Jahr.											
0	18	23	16	0	18	22	7	11	5	37	6
1	17	29	30	1	17	28	26	0	1	26	6
2	16	36	4	2	16	34	45	0	27	15	7
3	15	42	29	3	15	41	4	1	23	4	7
4	14	48	53	4	14	47	23	2	18	53	7
5	13	55	17	5	13	53	42	3	14	42	8
6	13	1	42	6	13	0	1	4	10	31	8
7	12	8	6	7	12	6	20	5	6	20	9
8	11	14	30	8	11	12	39	6	2	9	9
9	10	20	54	9	10	18	58	6	27	58	10
10	9	27	19	10	9	25	17	7	23	47	10
11	8	33	33	11	8	31	36	8	19	36	11

Drittes

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
25		7	18	21	12
26		37	7	5	15
27		66	19	49	18
28		96	8	33	21
29	− 10 33 16	125	21	17	24
	☋				
30	+ 20 6 58	155	10	1	27
31		184	22	45	30
32		214	11	29	33
33		244	0	13	36
34		273	12	57	39
35	− 6 31 52	303	1	41	42
	☊				
36		332	14	25	45
37		362	3	9	47

Viertes

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
38		26	9	53	50
39		55	22	37	53
40		85	11	21	56
41	− 2 30 28	115	0	5	59
	☋				
42		144	12	50	2
43		174	1	34	5
44		203	14	18	8
45		233	3	2	11
46		262	15	46	14
	☊				
47	+ 1 30 56	292	4	30	16
48		321	17	14	19
49		351	5	58	22

Tafel

Jahr.

⊙				anom. ⊙				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	7	40	7	0	7	37	55	9	15	25	11
1	6	46	31	1	6	44	14	10	11	14	12
2	5	52	55	2	5	50	33	11	7	3	12
3	4	59	20	3	4	56	51	0	2	52	13
4	4	5	44	4	4	3	10	0	28	41	13
5	3	12	8	5	3	9	29	1	24	30	13
6	2	18	33	6	2	15	48	2	20	19	14
7	1	24	57	7	1	22	7	3	16	8	14
8	0	31	21	8	0	28	26	4	11	57	15
8	29	37	45	8	29	34	45	5	7	46	15
9	28	44	10	9	28	41	4	6	3	35	16
10	27	50	34	10	27	47	23	6	29	24	16
11	26	56	58	11	26	53	42	7	25	13	16

Jahr.

0	26	3	22	0	26	0	1	8	21	2	17
1	25	9	47	1	25	6	20	9	16	51	17
2	24	16	11	2	24	12	39	10	12	40	18
3	23	22	35	3	23	18	58	11	8	29	18
4	22	29	0	4	22	25	17	0	4	18	19
5	21	35	24	5	21	31	36	1	0	7	19
6	20	41	48	6	20	37	55	1	25	56	20
7	19	48	12	7	19	44	14	2	21	45	20
8	18	54	37	8	18	50	33	3	17	34	21
9	18	1	1	9	17	56	52	4	13	23	21
10	17	7	25	10	17	3	11	5	9	12	22
11	16	13	50	11	16	9	30	6	5	1	22

Neumonde No.		°	′	″	T.	St.	′	″
50					15	12	42	25
51					45	1	26	28
52					74	14	10	31
	☋							
53	+	5	32	19	104	2	54	34
54					133	15	38	37
55					163	4	22	40
56					192	17	6	43
57					222	5	50	46
58					251	18	34	49
	☊							
59	+	9	33	43	281	7	18	51
60					310	20	2	54
61					340	8	46	57

Sechſtes

62					4	15	31	0
63					34	4	15	3
64	−	17	5	7	63	16	59	6
	☋							
65	+	13	35	7	93	5	43	9
66					122	18	27	12
67					152	7	11	15
68					181	19	55	17
69					211	8	39	20
70	−	13	3	44	240	21	23	23
	☊							
71	+	17	36	30	270	10	7	26
72					299	22	51	29
73					329	11	35	32
74					359	0	19	35

Tafel

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	15	20	14	0	15	15	49	7	0	50	22
1	14	26	38	1	14	22	8	7	26	39	23
2	13	33	2	2	13	28	27	8	22	28	23
3	12	39	27	3	12	34	46	9	18	17	24
4	11	45	51	4	11	41	5	10	14	6	24
5	10	52	15	5	10	47	24	11	9	55	25
6	9	58	40	6	9	53	43	0	5	44	25
7	9	5	4	7	9	0	2	1	1	33	25
8	8	11	28	8	8	6	21	1	27	22	26
9	7	17	52	9	7	12	40	2	23	11	26
10	6	24	17	10	6	18	59	3	19	0	27
11	5	30	41	11	5	25	18	4	14	49	27

Jahr.

0	4	37	5	0	4	31	37	5	10	38	28
1	3	43	29	1	3	37	56	6	6	27	28
2	2	49	54	2	2	44	15	7	2	16	29
3	1	56	18	3	1	50	34	7	28	5	29
4	1	2	42	4	0	56	53	8	23	54	30
5	0	9	7	5	0	3	12	9	19	43	30
5	29	15	31	5	29	9	31	10	15	32	31
6	28	21	55	6	28	15	50	11	11	21	31
7	27	28	19	7	27	22	9	0	7	10	31
8	26	34	44	8	26	28	28	1	2	59	32
9	25	41	8	9	25	34	47	1	28	48	32
10	24	47	32	10	24	41	6	2	24	37	33
11	23	53	56	11	23	47	25	3	20	26	33

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
75		23	7	3	38
76	− 9 2 20	52	19	47	41
	☋				
77		82	8	31	44
78		111	21	15	46
79		141	9	59	49
80		170	22	43	52
81		200	11	27	55
82	− 5 0 56	230	0	11	58
	☊				
83		259	12	56	1
84		289	1	40	4
85		318	14	24	7
86		348	3	8	10

Achtes

87		12	9	52	13
88	− 0 59 33	41	22	36	16
	☋				
89		71	11	20	18
90		101	0	4	21
91		130	12	48	24
92		160	1	32	27
93		189	14	16	30
	☊				
94	+ 3 1 51	219	3	0	33
95		248	15	44	36
96		278	4	28	39
97		307	17	12	42
98		337	5	56	45

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	'	"	ſ	°	'	"	ſ	°	'	"
0	23	0	21	0	22	53	44	4	16	15	34
1	22	6	45	1	22	0	3	5	12	4	34
2	21	13	9	2	21	6	22	6	7	53	34
3	20	19	34	3	20	12	41	7	3	42	35
4	19	25	58	4	19	19	0	7	29	31	35
5	18	32	22	5	18	25	19	8	25	20	36
6	17	38	46	6	17	31	38	9	21	9	36
7	16	45	11	7	16	37	57	10	16	58	37
8	15	51	35	8	15	44	15	11	12	47	37
9	14	57	59	9	14	50	34	0	8	36	38
10	14	4	24	10	13	56	53	1	4	25	38
11	13	10	48	11	13	3	12	2	0	14	39
Jahr.											
0	12	17	12	0	12	9	31	2	26	3	39
1	11	23	36	1	11	15	50	3	21	52	40
2	10	30	1	2	10	22	9	4	17	41	40
3	9	36	25	3	9	28	28	5	13	30	40
4	8	42	49	4	8	34	47	6	9	19	41
5	7	49	14	5	7	41	6	7	5	8	41
6	6	55	38	6	6	47	25	8	0	57	42
7	6	2	2	7	5	53	44	8	26	46	42
8	5	8	26	8	5	0	3	9	22	35	43
9	4	14	51	9	4	6	22	10	18	24	43
10	3	21	15	10	3	12	41	11	14	13	43
11	2	27	39	11	2	19	0	0	10	2	44

Neuntes

Neumonde No.	arg. latit. ☽	°	′	″	T.	St.	′	″
99					1	12	40	48
	☋							
100	+	7	3	15	31	1	24	50
101					60	47	8	53
102					90	2	52	56
103					119	15	36	59
104					149	4	21	2
105	−	19	35	35	178	17	5	5
	☊							
106	+	11	4	38	208	5	49	8
107					237	18	33	11
108					267	7	17	14
109					296	20	1	17
110					326	8	45	19
111	−	15	34	12	355	21	29	22

Zehntes

Neumonde No.	arg. latit. ☽	°	′	″	T.	St.	′	″
	☋							
112	+	15	6	2	20	4	13	25
113					49	16	57	28
114					79	5	41	31
115					108	18	25	34
116					138	7	9	37
117	−	11	32	48	167	19	53	40
	☊							
118	+	19	7	26	197	8	37	43
119					226	21	21	46
120					256	10	5	48
121					285	22	49	51
122					315	11	33	54
123	−	7	31	24	345	0	17	57
	☋							

Tafel

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	1	34	3	0	1	25	19	1	5	51	44
1	0	40	28	1	0	31	38	2	1	40	45
1	29	46	52	1	29	37	57	2	27	29	45
2	28	53	16	2	28	44	16	3	23	18	46
3	27	59	40	3	27	50	35	4	19	7	46
4	27	6	5	4	26	56	54	5	14	56	47
5	26	12	29	5	26	3	13	6	10	45	47
6	25	18	53	6	25	9	32	7	6	34	48
7	24	25	18	7	24	15	51	8	2	23	48
8	23	31	42	8	23	22	10	8	28	12	49
9	22	38	6	9	22	28	29	9	24	1	49
10	21	44	30	10	21	34	48	10	19	50	49
11	20	50	55	11	20	41	7	11	15	39	50
Jahr.											
0	19	57	19	0	19	47	26	0	11	28	50
1	19	3	43	1	18	53	45	1	7	17	51
2	18	10	8	2	18	0	4	2	3	6	51
3	17	16	32	3	17	6	23	2	28	55	52
4	16	22	56	4	16	12	42	3	24	44	52
5	15	29	20	5	15	19	1	4	20	33	52
6	14	35	45	6	14	25	20	5	16	22	53
7	13	42	9	7	13	31	39	6	12	11	53
8	12	48	33	8	12	37	58	7	8	0	54
9	11	54	58	9	11	44	17	8	3	49	54
10	11	1	22	10	10	50	36	8	29	38	55
11	10	7	46	11	9	56	55	9	25	27	55

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
124		9	7	2	0
125		38	19	46	3
126		68	8	30	6
127		97	21	14	9
128		127	9	58	12
129	− 3 30 1	156	22	42	15
	☊				
130		186	11	26	18
131		216	0	10	20
132		245	12	54	23
133		275	1	38	26
134		304	14	22	29
	☋				
135	+ 0 31 23	334	3	6	32
136		363	15	50	35

Zwölftes

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
137		27	22	34	38
138		57	11	18	41
139		87	0	2	44
140		116	12	46	47
	☊				
141	+ 4 32 47	146	1	30	49
142		175	14	14	52
143		205	2	58	55
144		234	15	42	58
145		264	4	27	1
146		293	17	11	4
	☋				
147	+ 8 34 10	323	5	55	7
148		352	18	39	10

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	'	"	ſ	°	'	"	ſ	°	'	"
0	9	14	10	0	9	3	14	10	21	16	56
1	8	20	35	1	8	9	33	11	17	5	56
2	7	26	59	2	7	15	52	0	12	54	57
3	6	33	23	3	6	22	11	1	8	43	57
4	5	39	47	4	5	28	30	2	4	32	58
5	4	46	12	5	4	34	49	3	0	21	58
6	3	52	36	6	3	41	8	3	26	10	58
7	2	59	0	7	2	47	27	4	21	59	59
8	2	5	25	8	1	53	46	5	17	48	59
9	1	11	49	9	1	0	5	6	13	38	0
10	0	18	13	10	0	6	24	7	9	27	0
10	29	24	37	10	29	12	43	8	5	16	1
11	28	31	2	11	28	19	2	9	1	5	1
Jahr.											
0	27	37	26	0	27	25	20	9	26	54	1
1	26	43	50	1	26	31	39	10	22	43	2
2	25	50	15	2	25	37	58	11	18	32	2
3	24	56	39	3	24	44	17	0	14	21	3
4	24	3	3	4	23	50	36	1	10	10	3
5	23	9	27	5	22	56	55	2	5	59	4
6	22	15	52	6	22	3	14	3	1	48	4
7	21	22	16	7	21	9	33	3	27	37	5
8	20	28	40	8	20	15	52	4	23	26	5
9	19	35	4	9	19	22	11	5	19	15	6
10	18	41	29	10	18	28	30	6	15	4	6
11	17	47	53	11	17	34	49	7	10	53	7

Dreyzehntes

Neumonde	arg. latit. ☽							
No.		°	′	″	T.	St.	′	″
149					17	1	23	13
150					46	14	7	16
141					76	2	51	19
152	—	18	4	40	105	15	35	21
	☊							
153	+	12	35	34	135	4	19	24
154					164	17	3	27
155					194	5	47	30
156					223	18	31	33
157					253	7	15	36
158	—	14	3	16	282	19	59	39
	☋							
159	+	16	36	58	312	8	43	42
160					341	21	27	45

Vierzehntes

161					6	4	11	48
162					35	16	55	50
163					65	5	39	53
164	—	10	1	53	94	18	23	56
	☊							
165					124	7	7	59
166					153	19	52	2
167					183	8	36	5
168					212	21	20	8
169					242	10	4	11
170	—	6	0	29	271	22	48	14
	☋							
171					301	11	32	17
172					331	0	16	20
173					360	13	0	22

Tafel

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	16	54	17	0	16	41	8	8	6	42	7
1	16	0	42	1	15	47	27	9	2	31	7
2	15	7	6	2	14	53	46	9	28	20	8
3	14	13	30	3	14	0	5	10	24	9	8
4	13	19	54	4	13	6	24	11	19	58	9
5	12	26	19	5	12	12	43	0	15	47	9
6	11	32	43	6	11	19	2	1	11	36	10
7	10	39	7	7	10	25	21	2	7	25	10
8	9	45	31	8	9	31	40	3	3	14	10
9	8	51	56	9	8	37	59	3	29	3	11
10	7	58	20	10	7	44	18	4	24	52	11
11	7	4	44	11	6	50	37	5	20	41	12
Jahr.											
0	6	11	9	0	5	56	56	6	16	30	12
1	5	17	33	1	5	3	15	7	12	19	13
2	4	23	57	2	4	9	34	8	8	8	13
3	3	30	21	3	3	15	53	9	3	57	14
4	2	36	45	4	2	22	12	9	29	46	14
5	1	43	10	5	1	28	31	10	25	35	15
6	0	49	34	6	0	34	50	11	21	24	15
6	29	55	59	6	29	41	9	0	17	13	16
7	29	2	23	7	28	47	28	1	13	2	16
8	28	8	47	8	27	53	47	2	8	51	16
9	27	15	11	9	27	0	6	3	4	40	17
10	26	21	36	10	26	6	25	4	0	29	17
11	25	28	0	11	25	12	44	4	26	18	18

Zweyte
Funfzehntes

Neumonde No.	arg. latit. ☽	°	′	″	T.	St.	′	″
174					24	19	44	25
175					54	8	28	28
176	−	1	59	5	83	21	12	31
	☊							
177					113	9	56	34
178					142	22	40	37
179					172	11	24	40
180					202	0	8	43
181					231	12	52	46
	☋							
182	+	2	2	18	261	1	36	48
183					290	14	20	51
184					320	3	4	54
185					349	15	48	57
					Sechzehntes			
186					13	22	33	0
187					43	11	17	3
	☊							
188	+	6	3	42	73	0	1	6
189					102	12	45	9
190					132	1	29	12
191					161	14	13	15
192					191	2	57	18
193					220	15	41	20
	☋							
194	+	10	5	6	250	4	25	23
195					279	17	9	26
196					309	5	53	29
197					338	18	37	32

Tafel.
Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	24	34	24	0	24	19	3	5	22	7	18
1	23	40	49	1	23	25	22	6	17	56	19
2	22	47	13	2	22	31	41	7	13	45	19
3	21	53	37	3	21	38	0	8	9	34	19
4	21	0	1	4	20	44	19	9	5	23	20
5	20	6	26	5	19	50	38	10	1	12	20
6	19	12	50	6	18	56	57	10	27	1	21
7	18	19	14	7	18	3	16	11	22	50	21
8	17	25	38	8	17	9	35	0	18	39	22
9	16	32	3	9	16	15	54	1	14	28	22
10	15	38	27	10	15	22	13	2	10	17	23
11	14	44	51	11	14	28	32	3	6	6	23

Jahr.

0	13	51	16	0	13	34	51	4	1	55	24
1	12	57	40	1	12	41	10	4	27	44	24
2	12	4	4	2	11	47	29	5	23	33	25
3	11	10	28	3	10	53	48	6	19	22	25
4	10	16	53	4	10	0	7	7	15	11	25
5	9	23	17	5	9	6	25	8	11	0	26
6	8	29	41	6	8	12	44	9	6	49	26
7	7	36	5	7	7	19	3	10	2	38	27
8	6	42	30	8	6	25	22	10	28	27	27
9	5	48	54	9	5	31	41	11	24	16	28
10	4	55	18	10	4	38	0	0	20	5	28
11	4	1	43	11	3	44	19	1	15	54	28

Siebenzehntes

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T. St. ′ ″
198		3 1 21 35
199	— 16 33 44	32 14 5 38
	☊	
200	+ 14 6 30	62 2 49 41
201		91 15 33 44
202		121 4 17 47
203		150 17 1 50
204		180 5 45 52
205	— 12 32 21	209 18 29 55
	☋	
206	+ 18 7 53	239 7 13 58
207		268 19 58 1
208		298 8 42 4
209		327 21 26 7
210		357 10 10 10
		Achtzehntes
211	— 8 30 57	21 16 54 13
	☊	
212		51 5 38 16
213		80 18 22 19
214		110 7 6 21
215		139 19 50 24
216		169 8 34 27
217	— 4 29 33	198 21 18 30
	☋	
218		228 10 2 33
219		257 22 48 36
220		287 11 30 39
221		317 0 14 42
222		346 12 58 45

Tafel.

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	3	8	7	0	2	50	38	2	11	43	29
1	2	14	31	1	1	56	57	3	7	32	29
2	1	20	55	2	1	3	16	4	3	21	30
3	0	27	20	3	0	9	35	4	29	10	30
3	29	33	44	3	29	15	54	5	24	59	31
4	28	40	8	4	28	22	13	6	20	48	31
5	27	46	33	5	27	28	32	7	16	37	32
6	26	52	57	6	26	34	51	8	12	26	32
7	25	59	21	7	25	41	10	9	8	15	33
8	25	5	45	8	24	47	29	10	4	4	33
9	24	12	10	9	23	53	48	10	29	53	34
10	23	18	34	10	23	0	7	11	25	42	34
11	22	24	58	11	22	6	26	0	21	31	34

Jahr.

0	21	31	23	0	21	12	45	1	17	20	35
1	20	37	47	1	20	19	4	2	13	9	35
2	19	44	11	2	19	25	23	3	8	58	36
3	18	50	35	3	18	31	42	4	4	47	36
4	17	57	0	4	17	38	1	5	0	36	37
5	17	3	24	5	16	44	20	5	26	25	37
6	16	9	48	6	15	50	39	6	22	14	37
7	15	16	12	7	14	56	58	7	18	3	38
8	14	22	37	8	14	3	17	8	13	52	38
9	13	29	1	9	13	9	36	9	9	41	39
10	12	35	25	10	12	15	55	10	5	30	39
11	11	41	50	11	11	22	14	11	1	19	40

Neumonde No.	arg. latit. ☽	°	′	″	T.	St.	′	″
223	—	0	28	10	10	19	42	48
	☊							
224					40	8	26	51
225					69	21	10	54
226					99	9	54	56
227					128	22	38	59
228					158	11	23	2
	☋							
229	+	3	33	14	188	0	7	5
230					217	12	51	8
231					247	1	35	11
232					276	14	19	14
233					306	3	3	17
234					335	15	47	20
	☊							
235	+	7	34	38	365	4	31	22
					Zwanzigſtes			
236					29	11	15	25
237					58	23	59	28
238					88	12	43	31
239					118	1	27	34
240	—	19	4	13	147	14	11	37
	☋							
241	+	11	36	2	177	2	55	40
242					206	15	39	43
243					236	4	23	46
244					265	17	7	49
245					295	5	51	51
246	—	15	2	49	324	18	35	54
	☊							
247	—	15	37	25	354	7	19	57

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	10	48	14	0	10	28	33	11	27	8	40
1	9	54	38	1	9	34	52	0	22	57	41
2	9	1	2	2	8	41	11	1	18	46	41
3	8	7	27	3	7	47	30	2	14	35	42
4	7	13	51	4	6	53	49	3	10	24	42
5	6	20	15	5	6	0	8	4	6	13	43
6	5	26	39	6	5	6	27	5	2	2	43
7	4	33	4	7	4	12	46	5	27	51	43
8	3	39	28	8	3	19	5	6	23	40	44
9	2	45	52	9	2	25	24	7	19	29	44
10	1	52	17	10	1	31	43	8	15	18	45
11	0	58	41	11	0	38	2	9	11	7	45
0	0	5	5	11	29	44	21	10	6	56	46

Jahr.

0	29	11	29	0	28	50	40	11	2	45	46
1	28	17	54	1	27	56	59	11	28	34	46
2	27	24	18	2	27	3	18	0	24	23	47
3	26	30	42	3	26	9	37	1	20	12	47
4	25	37	7	4	25	15	56	2	16	1	48
5	24	43	31	5	24	22	15	3	11	50	48
6	23	49	55	6	23	28	34	4	7	39	49
7	22	56	19	7	22	34	53	5	3	28	49
8	22	2	44	8	21	41	12	5	29	17	50
9	21	9	8	9	20	47	31	6	25	6	50
10	20	15	32	10	19	53	50	7	20	55	51
11	19	21	56	11	19	0	8	8	16	44	51

Neumonde No.	arg. latit. ☽ °	'	"	T.	St.	'	"
248				18	14	4	0
249				48	2	48	3
250				77	15	32	6
251				107	4	16	9
252	−11	1	25	136	17	0	12
	☋						
253	+19	38	49	166	5	44	15
254				195	18	28	18
255				225	7	12	21
256				254	19	56	23
257				284	8	40	26
258	−7	0	1	313	21	24	29
	☊						
259				343	10	8	32
				Zwey und zwan-			
260				7	16	52	35
261				37	5	36	38
262				66	18	20	41
263				96	7	4	44
264	−2	58	38	125	19	48	47
	☋						
265				155	8	32	50
266				184	21	16	52
267				214	10	0	55
268				243	22	44	58
269				273	11	29	1
	☊						
270	+1	2	46	303	0	13	4
271				332	12	57	7
272				362	1	41	10

zigſtes Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	18	28	21	0	18	6	27	9	12	33	52
1	17	34	45	1	17	12	46	10	8	22	52
2	16	41	9	2	16	19	5	11	4	11	52
3	15	47	34	3	15	25	24	0	0	0	53
4	14	53	58	4	14	31	43	0	25	49	53
5	14	0	22	5	13	38	2	1	21	38	54
6	13	6	46	6	12	44	21	2	17	27	54
7	12	13	11	7	11	50	40	3	13	16	55
8	11	19	25	8	10	56	59	4	9	5	55
9	10	25	49	9	10	3	18	5	4	54	55
10	9	32	23	10	9	9	37	6	0	43	56
11	8	38	48	11	8	15	56	6	26	32	56

zigſtes Jahr.

0	7	45	12	0	7	22	15	7	22	21	57
1	6	51	36	1	6	28	34	8	18	10	57
2	5	58	1	2	5	34	53	9	13	59	58
3	5	4	25	3	4	41	12	10	9	48	58
4	4	10	49	4	3	47	31	11	5	37	59
5	3	17	13	5	2	53	50	0	1	26	59
6	2	23	38	6	2	0	9	0	27	16	0
7	1	30	2	7	1	6	28	1	23	5	0
8	0	36	26	8	0	12	47	2	18	54	1
8	29	42	51	8	29	19	6	3	14	43	1
9	28	49	15	9	28	25	25	4	10	32	1
10	27	55	39	10	27	31	44	5	6	21	2
11	27	2	3	11	26	38	3	6	2	10	2

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
273		26	8	25	13
274		55	21	9	16
275		85	9	53	19
	☋				
276	+ 5 4 10	114	22	37	21
277		144	11	21	24
278		174	0	5	27
279		203	12	49	30
280		233	1	33	33
281		262	14	17	36
	☊				
282	+ 9 5 33	292	3	1	39
283		321	15	45	42
284		351	4	29	45

Vier und zwan=

285		15	11	13	48
286		44	23	57	50
287	− 17 33 17	74	12	41	53
	☋				
288	+ 13 6 57	104	1	25	56
289		133	14	9	59
290		163	2	54	2
291		192	15	38	5
292		222	4	22	8
293	− 13 31 53	251	17	6	11
	☊				
294	+ 17 8 21	281	5	50	14
295		310	18	34	17
296		340	7	18	20

zigſtes Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	'	''	s	°	'	''	s	°	'	''
0	26	8	28	0	25	44	22	6	27	59	3
1	25	14	52	1	24	50	41	7	23	48	3
2	24	21	16	2	23	57	0	8	19	37	4
3	23	27	41	3	23	3	19	9	15	26	4
4	22	34	5	4	22	9	38	10	11	15	4
5	21	40	29	5	21	15	57	11	7	4	5
6	20	46	53	6	20	22	16	0	2	53	5
7	19	53	18	7	19	28	35	0	28	42	6
8	18	59	42	8	18	34	54	1	24	31	6
9	18	6	6	9	17	41	13	2	20	20	7
10	17	12	30	10	16	47	32	3	16	9	7
11	16	18	55	11	15	53	51	4	11	58	8
zigſtes Jahr.											
0	15	25	19	0	15	0	10	5	7	47	8
1	14	31	41	1	14	6	29	6	3	36	9
2	13	38	7	2	13	12	48	6	29	25	9
3	12	44	32	3	12	19	7	7	25	14	10
4	11	50	56	4	11	25	26	8	21	3	10
5	10	57	20	5	10	31	45	9	16	52	10
6	10	3	45	6	9	38	4	10	12	41	11
7	9	10	9	7	8	44	23	11	8	30	11
8	8	16	33	8	7	50	42	0	4	19	12
9	7	22	57	9	6	57	1	1	0	8	12
10	6	29	22	10	6	3	20	1	25	57	13
11	5	53	46	11	5	9	39	2	21	46	13

Fünf und zwan=

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T. St. ′ ″
297		4 14 2 22
298		34 2 46 25
299	− 9 30 30	63 15 30 28
	☋	
300		93 4 14 31
301		122 16 58 34
302		152 5 42 37
303		181 18 26 40
304		211 7 10 43
305	− 5 29 6	240 19 54 46
	☊	
306		270 8 38 49
307		299 21 22 52
308		329 10 6 54
309		358 22 50 57

Sechs und zwan=

310		23 5 35 0
311	− 1 27 42	52 18 19 3
	☋	
312		82 7 3 6
313		111 19 47 9
314		141 8 31 12
315		170 21 15 15
316		200 9 59 18
	☊	
317	+ 2 33 41	229 22 43 21
318		259 11 27 24
319		289 0 11 26
320		318 12 55 29
321		348 1 39 32

Tafel

zigſtes Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	4	42	10	0	4	15	58	3	17	35	13
1	3	48	35	1	3	22	17	4	13	24	14
2	2	54	59	2	2	28	36	5	9	13	14
3	2	1	23	3	1	34	55	6	5	2	15
4	1	7	47	4	0	41	13	7	0	51	15
5	0	14	12	4	29	47	32	7	26	40	16
5	29	20	36	5	28	53	51	8	22	29	16
6	28	27	0	6	28	0	10	9	18	18	17
7	27	33	25	7	27	6	29	10	14	7	17
8	26	39	49	8	26	12	48	11	9	56	18
9	25	46	13	9	25	19	7	0	5	45	18
10	24	52	37	10	24	25	26	1	1	34	19
11	23	59	2	11	23	31	45	1	27	23	19

zigſtes Jahr.

0	23	5	26	0	22	38	4	2	23	12	19
1	22	11	50	1	21	44	23	3	19	1	20
2	21	18	15	2	20	50	42	4	14	50	20
3	20	24	39	3	19	57	1	5	10	39	21
4	19	31	3	4	19	3	20	6	6	28	21
5	18	37	27	5	18	9	39	7	2	17	22
6	17	43	52	6	17	15	58	7	28	6	22
7	16	50	16	7	16	22	17	8	23	55	22
8	15	56	40	8	15	28	36	9	19	44	23
9	15	3	4	9	14	34	55	10	15	33	23
10	14	9	29	10	13	41	14	11	11	22	24
11	13	15	53	11	12	47	33	0	0	11	24

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
322		12	8	23	35
	☋				
323	+ 6 35 5	41	21	7	38
324		71	9	51	41
325		100	22	35	44
326		130	11	19	45
327		160	0	3	50
328	− 20 3 45	189	12	47	52
	☊				
329	+ 10 36 29	219	1	31	55
330		248	14	15	58
331		278	3	0	1
332		307	15	44	4
333		337	4	28	7

Acht und zwan=

334	− 16 2 21	1	11	12	10
	☋				
335	+ 14 37 52	30	23	56	13
336		60	12	40	16
337		90	1	24	19
338		119	14	8	22
339		149	2	52	24
340	− 12 0 58	178	15	36	27
	☊				
341	+ 18 39 16	208	4	20	30
342		237	17	4	33
343		267	5	48	36
344		296	18	32	39
345		326	7	16	42
346	− 7 59 34	355	20	0	45
	☋				

zigſtes Jahr.

⊙				anom. ⊙				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	12	22	17	0	11	53	52	1	3	0	25
1	11	28	42	1	11	0	11	1	28	49	25
2	10	35	6	2	10	6	30	2	24	38	26
3	9	41	30	3	9	12	49	3	20	27	26
4	8	47	54	4	8	19	8	4	16	16	27
5	7	54	19	5	7	25	27	5	12	5	27
6	7	0	43	6	6	31	46	6	7	54	28
7	6	7	7	7	5	38	5	7	3	43	28
8	5	13	32	8	4	44	24	7	29	32	28
9	4	19	56	9	3	50	43	8	25	21	29
10	3	26	20	10	2	57	2	9	21	10	29
11	2	32	44	11	2	3	21	10	16	59	30
zigſtes Jahr.											
0	1	39	9	0	1	9	40	11	12	48	30
1	0	45	33	1	0	15	59	0	8	37	31
1	29	51	57	1	29	22	18	1	4	26	31
2	28	58	21	2	28	28	37	2	0	15	31
3	28	4	46	3	27	34	56	2	26	4	32
4	27	11	10	4	26	41	15	3	21	53	32
5	26	17	34	5	25	47	34	4	17	42	33
6	25	23	59	6	24	53	53	5	13	31	34
7	24	30	23	7	24	0	12	6	9	20	34
8	23	36	47	8	23	6	31	7	5	9	35
9	22	43	11	9	22	12	50	8	0	58	35
10	21	49	36	10	21	19	9	8	26	47	36
11	20	56	0	11	20	25	28	9	22	36	36

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T. St. ′ ″
347		20 2 44 48
348		49 15 28 51
349		79 4 12 54
350		108 16 56 56
351		138 5 40 59
352	− 3 58 10	167 18 25 2
	☊	
353		197 7 9 5
354		226 19 53 8
355		256 8 37 11
356		285 21 21 14
357		315 10 5 17
	☋	
358	+ 0 3 13	344 22 49 20
		Von jedem Neumond
½	☋ 15 20 7	14 18 22 1

Verwandlung (§. 20)
der Biſſextilform in gemeine Jahrform.

Im Jahr nach dem Schaltjahr	Vor dem 24. Febr.	Nach dem 24. Febr.
1	— 18 Stund.	+ 6 Stund.
2	— 12	+ 12
3	— 6	+ 18

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	20	2	24	0	19	31	47	10	18	25	37
1	19	8	48	1	18	38	6	11	14	14	37
2	18	15	13	2	17	44	25	0	10	3	37
3	17	21	37	3	16	50	44	1	5	52	38
4	16	28	1	4	15	57	3	2	1	41	38
5	15	34	26	5	15	3	22	2	27	30	39
6	14	40	50	6	14	9	41	3	23	19	39
7	13	47	14	7	13	16	0	4	19	8	40
8	12	53	38	8	12	22	19	5	14	57	40
9	12	0	3	9	11	28	37	6	10	46	40
10	11	6	27	10	10	34	56	7	6	35	41
11	10	12	51	11	9	41	15	8	2	24	41
zum nächſten Vollmonde.											
0	14	33	12	0	14	33	9	6	12	54	30

Verwandlung (§. 20)
der gemeinen Jahrform in Biſſextilform.

Im Jahr nach dem Schaltjahr	Vor dem 24 Febr.	Nach dem 24. Febr.
1	+ 18 St.	— 6 St
2	+ 12	— 12
3	+ 6	— 18

Dritte Tafel

Geſammlete Tage der Schaltjahrform.

Jan.	Febr.	Mart.	Apr.	Mai	Jun.	Jul.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	—	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	—	91	—	152	—	213	244	—	305	—	366

Vierte Tafel.

Oerter	Unterſchied des Mittags St.	′	″		Polhöhe °	′	″
Paris - - -	0	0	0		48	50	14
Berlin - -	0	44	25	O	52	32	30
Bologna - -	0	36	5	O	44	29	40
Breſt - - -	0	27	23	W	48	23	0
Brüſſel - -	0	8	7	O	50	51	0
Conſtantinopel	1	46	14	O	41	1	10
Copenhagen	0	41	41	O	55	40	45
Danzig - -	1	4	44	O	54	22	0
Genf - - -	0	17	0	O	46	12	0
Goettingen	0	30	16	O	51	32	18
Greenwich	0	9	10	W	51	28	30
Leipzig - -	0	40	0	O	51	19	41
Madrit - -	0	24	18	W	40	25	0
Marſeille -	0	12	9	O	43	17	45
München -	0	37	0	O	48	9	55
Neapolis -	0	47	35	O	40	50	15
Nüremberg	0	34	56	O	49	27	17
Padua - -	0	38	22	O	45	22	26
Pekin - - -	7	37	10	O	39	54	0
Petersburg -	1	52	0	O	59	56	0
Prag - - -	0	49	40	O	50	4	30
Rom - - -	0	40	37	O	41	54	11
Stockholm -	1	2	51	O	59	20	30
Schwezingen	0	24	35	O	49	56	30
Strasburg - -	0	21	45	O	48	34	35
Tyrnau - -	1	0	55	O	48	23	30
Warſchau -	1	15	0	O	52	14	0
Wien - - -	0	56	10	O	48	12	32
Upſal - - -	1	1	10	O	59	51	50
Uraniburg -	0	42	10	O	55	54	15
Liſſabon - -	0	45	50	W	38	42	20
London - -	0	9	40	W	51	31	0

Argum.

	O			I			II		
	+			+			+		
	St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″
0	0	0	0	5	13	18	8	47	6
1	0	11	3	5	22	30	8	51	42
2	0	22	6	5	31	34	8	56	6
3	0	33	8	5	40	32	9	0	20
4	0	44	10	5	49	21	9	4	24
5	0	55	12	5	58	3	9	8	16
6	1	6	10	6	6	38	9	11	56
7	1	17	8	6	16	4	9	15	28
8	1	28	4	6	23	21	9	18	46
9	1	38	58	6	31	33	9	21	53
10	1	49	50	6	39	35	9	24	52
11	2	0	40	6	47	27	9	27	37
12	2	11	26	6	55	12	9	30	12
13	2	22	10	7	2	47	9	32	36
14	2	32	52	7	10	13	9	34	48
15	2	43	29	7	17	31	9	36	49
16	2	54	2	7	24	38	9	38	39
17	3	4	32	7	31	37	9	40	18
18	3	14	57	7	38	26	9	41	46
19	3	25	19	7	45	5	9	43	4
20	3	35	34	7	51	34	9	44	9
21	3	45	46	7	57	54	9	45	4
22	3	55	53	8	4	2	9	45	49
23	4	5	54	8	10	2	9	46	21
24	4	15	50	8	15	51	9	46	43
25	4	25	41	8	21	29	9	46	54
26	4	35	25	8	26	58	9	46	54
27	4	45	3	8	32	15	9	46	43
28	4	54	34	8	37	23	9	46	22
29	5	3	59	8	42	20	9	45	50
30	5	13	18	8	47	6	9	45	7
	—			—			—		
	XI			X			IX		

anom. med. ☽

III +			IV +			V +			
St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″	
9	45	7	8	7	18	4	33	31	30
9	44	14	8	1	46	4	25	2	29
9	43	10	7	56	6	4	16	30	28
9	41	55	7	50	18	4	7	53	27
9	40	30	7	44	22	3	59	13	26
9	38	55	7	38	19	3	50	30	25
9	37	10	7	32	10	3	41	42	24
9	35	14	7	25	52	3	32	52	23
9	33	8	7	19	28	3	23	59	22
9	30	53	7	12	58	3	15	3	21
9	28	26	7	6	20	3	6	4	20
9	25	50	6	59	35	2	57	2	19
9	23	6	6	52	45	2	47	57	18
9	20	10	6	45	48	2	38	50	17
9	17	5	6	38	44	2	29	41	16
9	13	51	6	31	35	2	20	31	15
9	10	26	6	24	19	2	11	18	14
9	6	54	6	16	58	2	2	2	13
9	3	11	6	9	31	1	52	45	12
8	59	19	6	1	58	1	43	27	11
8	55	19	5	54	21	1	34	8	10
8	51	11	5	46	37	1	24	47	9
8	46	51	5	38	48	1	15	24	8
8	42	24	5	30	55	1	6	1	7
8	37	49	5	22	57	0	56	37	6
8	33	4	5	14	53	0	47	12	5
8	28	11	5	6	46	0	37	47	4
8	23	10	4	58	34	0	28	21	3
8	18	0	4	50	18	0	18	54	2
8	12	43	4	41	57	0	9	27	1
8	7	18	4	33	31	0	0	0	0
— VIII			— VII			— VI			

Sechſte Tafel, für die Zeit

Argum.

	O			I			II		
	St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″
0	0	0	0	2	2	22	3	33	54
1	0	4	15	2	6	4	3	36	7
2	0	8	30	2	9	44	3	38	15
3	0	12	46	2	13	22	3	40	20
4	0	17	1	2	16	58	3	42	20
5	0	21	16	2	20	32	3	44	18
6	0	25	30	2	24	3	3	46	12
7	0	29	44	2	27	32	3	48	0
8	0	33	57	2	30	58	3	49	44
9	0	38	10	2	34	21	3	51	25
10	0	42	22	2	37	42	3	53	2
11	0	46	33	2	41	0	3	54	34
12	0	50	44	2	44	16	3	56	3
13	0	54	54	2	47	29	3	57	27
14	0	59	3	2	50	38	3	58	47
15	1	3	11	2	53	45	4	0	2
16	1	7	18	2	56	48	4	1	14
17	1	11	23	2	59	49	4	2	20
18	1	15	28	3	2	47	4	3	23
19	1	19	31	3	5	41	4	4	21
20	1	23	33	3	8	32	4	5	15
21	1	27	33	3	11	20	4	6	5
22	1	31	32	3	14	4	4	6	49
23	1	35	29	3	16	46	4	7	30
24	1	39	26	3	19	23	4	8	6
25	1	43	19	3	21	57	4	8	38
26	1	47	10	3	24	28	4	9	5
27	1	51	1	3	26	55	4	9	27
28	1	54	50	3	29	19	4	9	45
29	1	58	37	3	31	38	4	9	58
30	2	2	22	3	33	54	4	10	7
	+			+			+		
	XI			X			IX		

anom. med. ⊙

III			IV			V			
St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″	
4	10	7	3	39	18	2	7	46	30
4	10	11	3	37	9	2	3	54	29
4	10	11	3	34	55	2	0	0	28
4	10	6	3	32	37	1	56	4	27
4	9	56	3	30	15	1	52	6	26
4	9	42	3	27	49	1	48	5	25
4	9	24	3	25	19	1	44	2	24
4	9	0	3	22	45	1	39	58	23
4	8	33	3	20	7	1	35	52	22
4	8	0	3	17	26	1	31	43	21
4	7	23	3	14	40	1	27	33	20
4	6	41	3	11	51	1	23	21	19
4	5	55	3	8	59	1	19	7	18
4	5	4	3	6	2	1	14	52	17
4	4	9	3	3	2	1	10	36	16
4	3	9	2	59	59	1	6	18	15
4	2	5	2	56	52	1	1	58	14
4	0	59	2	53	41	0	57	38	13
3	59	45	2	50	28	0	53	16	12
3	58	25	2	47	11	0	48	54	11
3	57	2	2	43	50	0	44	30	10
3	55	35	2	40	27	0	40	5	9
3	54	4	2	37	1	0	35	40	8
3	52	28	2	33	31	0	31	14	7
3	50	48	1	29	59	0	26	47	6
3	49	4	2	26	24	0	22	20	5
3	47	17	2	22	45	0	17	53	4
3	45	23	2	19	4	0	13	25	3
3	43	25	2	15	21	0	8	57	2
3	41	24	2	11	34	0	4	28	1
3	39	18	2	7	46	0	0	0	0
+ VIII			+ VII			+ VI			

Siebente Tafel, für die Zeit der Syzigien §. 89.

Arg. Anom. ☉ + Anom. ☽

	O — VI +		I — VII +		II — VIII +		
0	0′	0″	3′	30″	6′	4″	30
1	0	7	3	36	6	7	29
2	0	15	3	43	6	11	28
3	0	22	3	49	6	14	27
4	0	29	3	55	6	18	26
5	0	37	4	0	6	21	25
6	0	44	4	7	6	24	24
7	0	51	4	13	6	27	23
8	0	58	4	19	6	29	22
9	1	5	4	24	6	32	21
10	1	13	4	30	6	35	20
11	1	20	4	36	6	37	19
12	1	27	4	41	6	39	18
13	1	35	4	46	6	42	17
14	1	42	4	52	6	44	16
15	1	49	4	57	6	46	15
16	1	56	5	2	6	48	14
17	2	3	5	7	6	49	13
18	2	10	5	12	6	51	12
19	2	17	5	17	6	52	11
20	2	24	5	22	6	54	10
21	2	30	5	26	6	55	9
22	2	37	5	31	6	56	8
23	2	44	5	35	6	57	7
24	2	51	5	40	6	58	6
25	2	57	5	44	6	59	5
26	3	4	5	48	6	59	4
27	3	11	5	52	6	59	3
28	3	17	5	56	7	0	2
29	3	24	6	0	7	0	1
30	3	30	6	4	7	0	0
	V — XI +		IV — X +		III — IX +		

Achte Tafel, für die Zeit der Syzigien §. 89.

Arg. Anom. ☉ — Anom. ☽

	O — VI +		I — VII +		II — VIII +		
0	0′	0″	5′	16″	9′	7″	30
1	0	11	5	26	9	13	29
2	0	22	5	35	9	18	28
3	0	33	5	44	9	23	27
4	0	44	5	54	9	28	26
5	0	55	6	3	9	32	25
6	1	6	6	12	9	37	24
7	1	17	6	20	9	42	23
8	1	28	6	29	9	46	22
9	1	39	6	38	9	50	21
10	1	50	6	46	9	54	20
11	2	1	6	55	9	58	19
12	2	12	7	3	10	1	18
13	2	22	7	11	10	4	17
14	2	23	7	19	10	8	16
15	2	44	7	27	10	11	15
16	2	54	7	35	10	13	14
17	3	5	7	42	10	16	13
18	3	15	7	50	10	18	12
19	3	26	7	57	10	20	11
20	3	36	8	4	10	22	10
21	3	47	8	11	10	24	9
22	3	57	8	18	10	26	8
23	4	7	8	25	10	27	7
24	4	17	8	31	10	29	6
25	4	27	8	38	10	30	5
26	4	37	8	44	10	31	4
27	4	47	8	50	10	31	3
28	4	57	8	56	10	32	2
29	5	6	9	2	10	32	1
30	5	16	9	7	10	32	0
	V — XI +		IV — X +		III — IX +		

Neunte Tafel
für die Zeit der Syzigien, §. 89.

		2 anom. ☽ + An. ⊙	Anom. ⊙ — 2 an. ☽	2(☽—☊) — An. ☽	2(☊—⊙)	Für den Voll=mond anom. ☽		
O. IV	0	0″	0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″	30	
— +	3	3	2	0 6	0 5	0 6	27	
	6	6	3	0 12	0 10	0 12	24	
	9	8	5	0 18	0 14	0 18	21	
	12	11	7	0 24	0 19	0 24	18	
	15	14	8	0 29	0 24	0 29	15	
	18	16	10	0 35	0 28	0 35	12	
	21	19	11	0 40	0 33	0 40	9	
	24	21	13	0 46	0 37	0 46	6	
	27	24	15	0 51	0 41	0 51	3	+ —
I. VII	0	26	16	0 57	0 46	0 57	0	XI. V
— +	3	29	17	1 1	0 50	1 1	27	
	6	31	19	1 7	0 54	1 7	24	
	9	33	20	1 11	0 58	1 11	21	
	12	35	21	1 16	1 2	1 16	18	
	15	37	23	1 20	1 5	1 20	15	
	18	39	24	1 24	1 8	1 24	12	
	21	41	25	1 28	1 11	1 28	9	
	24	43	26	1 32	1 14	1 32	6	
	27	44	27	1 36	1 17	1 36	3	+ —
II. VIII	0	46	28	1 39	1 20	1 39	0	X. IV
— +	3	47	29	1 42	1 22	1 42	27	
	6	48	29	1 44	1 24	1 44	24	
	9	49	30	1 46	1 26	1 46	21	
	12	50	30	1 48	1 27	1 48	18	
	15	51	31	1 50	1 29	1 50	15	
	18	52	31	1 51	1 30	1 51	12	
	21	52	32	1 52	1 31	1 52	9	
	24	53	32	1 53	1 31	1 53	6	
	27	53	32	1 54	1 32	1 54	3	+ —
	30	53	32	1 54	1 32	1 54	0	IX. III

Zehnte Tafel
Tägliche Bewegung.

Tag	☊	☉	Ap.	Anom. ☽	☽
	° ′ ″	ſ ° ′ ″	☉	ſ ° ′ ″	ſ ° ′ ″
1	0 3 11	0 0 59 8	0	0 13 3 54	0 13 10 35
2	0 6 21	0 1 58 17	0	0 26 7 48	0 26 21 10
3	0 9 32	0 2 57 25	0	1 9 11 42	1 9 31 45
4	0 12 43	0 3 56 33	0	1 22 15 36	1 22 42 20
5	0 15 53	0 4 55 42	1	2 5 19 30	2 5 52 55
6	0 19 4	0 5 54 50	1	2 18 23 24	2 19 3 30
7	0 22 14	0 6 53 58	1	3 1 27 18	3 2 14 5
8	0 25 25	0 7 53 7	1	3 14 31 11	3 15 24 40
9	0 28 36	0 8 52 15	2	3 27 35 5	3 28 35 15
10	0 31 46	0 9 51 23	2	4 10 38 59	4 11 45 50
11	0 34 57	0 10 50 32	2	4 23 42 53	4 24 56 25
12	0 38 8	0 11 49 40	2	5 6 46 47	5 8 7 0
13	0 41 18	0 12 48 48	2	5 19 50 41	5 21 17 35
14	0 44 29	0 13 47 57	2	6 2 54 35	6 4 28 10
15	0 47 40	0 14 47 5	3	6 15 58 29	6 17 38 45
16	0 50 50	0 15 46 13	3	6 29 2 23	7 0 49 20
17	0 54 1	0 16 45 22	3	7 12 6 17	7 13 59 55
18	0 57 11	0 17 44 30	3	7 25 10 11	7 27 10 30
19	1 0 22	0 18 43 38	3	8 8 14 6	8 10 21 6
20	1 3 33	0 19 42 47	4	8 21 18 0	8 23 31 41
21	1 6 43	0 20 41 55	4	9 4 21 54	9 6 42 16
22	1 9 54	0 21 41 3	4	9 17 25 47	9 19 52 51
23	1 13 5	0 22 40 12	4	10 0 29 41	10 3 3 26
24	1 16 15	0 23 39 20	4	10 13 33 35	10 16 14 1
25	1 19 25	0 24 38 28	4	10 26 37 29	10 29 24 36
26	1 22 37	0 25 37 37	5	11 9 41 23	11 12 35 11
27	1 25 47	0 26 36 45	5	11 22 45 17	11 25 45 46
28	1 28 58	0 27 35 53	5	0 5 49 11	0 8 56 21
29	1 32 9	0 28 35 2	5	0 18 53 5	0 22 6 56
30	1 35 19	0 29 34 10	5	1 1 56 59	1 5 17 31
60	3 10 38	1 29 8 20	11	2 3 53 58	2 10 35 2
90	4 45 57	2 28 42 30	16	3 5 50 56	3 15 52 32
120	6 21 17	3 28 16 40	21	4 7 47 55	4 21 10 3
150	7 56 36	4 27 50 50	27	5 9 44 54	5 26 27 34
180	9 31 55	5 27 24 59	32	6 11 41 52	7 1 45 5

Zehnte Tafel
Stündliche Bewegung.

Stunden	☊ ′	☊ ″	☉ et a ′	☉ et a ″	Anom. ☽ °	Anom. ☽ ′	Anom. ☽ ″	☽ °	☽ ′	☽ ″
1	0	8	2	28	0	32	39	0	32	56
2	0	16	4	56	1	5	19	1	5	53
3	0	24	7	23	1	37	59	1	38	49
4	0	32	9	51	2	10	39	2	11	46
5	0	40	12	19	2	43	18	2	44	42
6	0	48	14	47	3	15	59	3	17	39
7	0	56	17	15	3	48	38	3	50	35
8	1	4	19	43	4	21	18	4	23	32
9	1	12	22	11	4	53	58	4	56	28
10	1	19	24	38	5	26	38	5	29	25
11	1	27	27	6	5	59	17	6	2	21
12	1	35	29	34	6	31	57	6	35	18
13	1	43	32	2	7	4	37	7	8	14
14	1	51	34	30	7	37	16	7	41	10
15	1	59	36	58	8	9	56	8	14	7
16	2	7	39	25	8	42	36	8	47	3
17	2	15	41	53	9	15	16	9	20	0
18	2	23	44	21	9	47	55	9	52	56
19	2	31	46	49	10	20	35	10	25	53
20	2	39	49	17	10	53	15	10	58	49
21	2	47	51	45	11	25	55	11	31	46
22	2	55	54	13	11	58	34	12	4	42
23	3	3	56	40	12	31	15	12	37	39
24	3	11	59	8	13	3	54	13	10	35

Zehnte Tafel

Bewegung in einzeln Minuten ꝛc.

Min.	☊	☉ et a		An. ☽		☽		M.	☊	☉ et a		An. ☽		☽	
	"	'	"	'	"	'	"		"	'	"	'	"	'	"
1	0	0	2	0	33	0	33	31	4	1	16	16	52	17	1
2	0	0	5	1	5	1	6	32	4	1	19	17	25	17	34
3	0	0	7	1	38	1	39	33	4	1	21	17	58	18	7
4	1	0	10	2	11	2	12	34	4	1	24	18	31	18	40
5	1	0	12	2	44	2	45	35	5	1	26	19	3	19	13
6	1	0	15	3	16	3	18	36	5	1	29	19	36	19	46
7	1	0	17	3	49	3	51	37	5	1	31	20	9	20	19
8	1	0	20	4	21	4	24	38	5	1	34	20	41	20	52
9	1	0	22	4	53	4	56	39	5	1	36	21	14	21	25
10	1	0	25	5	26	5	29	40	5	1	39	21	47	21	58
11	1	0	27	5	59	6	2	41	5	1	41	22	20	22	31
12	2	0	30	6	32	6	35	42	6	1	43	22	52	23	4
13	2	0	32	7	4	7	8	43	6	1	46	23	24	23	36
14	2	0	34	7	37	7	41	44	6	1	48	23	57	24	9
15	2	0	37	8	10	8	14	45	6	1	51	24	29	24	42
16	2	0	39	8	43	8	47	46	6	1	53	25	2	25	15
17	2	0	42	9	15	9	20	47	6	1	56	25	35	25	48
18	2	0	44	9	48	9	53	48	6	1	58	26	8	26	21
19	3	0	47	10	21	10	26	49	6	2	1	26	40	26	54
20	3	0	49	10	53	10	59	50	7	2	3	27	13	27	27
21	3	0	52	11	26	11	32	51	7	2	6	27	46	28	0
22	3	0	54	11	59	12	5	52	7	2	8	28	19	28	33
23	3	0	57	12	32	12	38	53	7	2	11	28	51	29	6
24	3	0	59	13	4	13	11	54	7	2	13	29	24	29	39
25	3	1	2	13	37	13	44	55	7	2	15	29	57	30	12
26	3	1	4	14	9	14	16	56	7	2	18	30	29	30	45
27	4	1	6	14	41	14	49	57	8	2	20	31	2	31	18
28	4	1	9	15	14	15	22	58	8	2	23	31	35	31	51
29	4	1	11	15	47	15	55	59	8	2	25	32	8	32	24
30	4	1	14	16	20	16	28	60	8	2	28	32	39	32	56

	O			I			II		
	—			—			—		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″
0	0	0	0	0	56	49	1	39	10
1	0	1	59	0	58	33	1	40	11
2	0	3	57	1	0	15	1	41	10
3	0	5	56	1	1	56	1	42	7
4	0	7	54	1	3	36	1	43	3
5	0	9	53	1	5	15	1	43	56
6	0	11	51	1	6	53	1	44	48
7	0	13	49	1	8	29	1	45	38
8	0	15	47	1	10	5	1	46	26
9	0	17	44	1	11	39	1	47	12
10	0	19	41	1	13	12	1	47	57
11	0	21	38	1	14	44	1	48	39
12	0	23	35	1	16	14	1	49	20
13	0	25	31	1	17	43	1	49	58
14	0	27	27	1	19	11	1	50	35
15	0	29	22	1	20	37	1	51	10
16	0	31	16	1	22	2	1	51	43
17	0	33	10	1	23	26	1	52	13
18	0	35	3	1	24	48	1	52	41
19	0	36	56	1	26	8	1	53	7
20	0	38	48	1	27	27	1	53	32
21	0	40	40	1	28	45	1	53	56
22	0	42	30	1	30	1	1	54	16
23	0	44	21	1	31	15	1	54	33
24	0	46	11	1	32	28	1	54	49
25	0	47	59	1	33	39	1	55	3
26	0	49	47	1	34	49	1	55	15
27	0	51	34	1	35	57	1	55	25
28	0	53	20	1	37	3	1	55	33
29	0	55	5	1	38	7	1	55	39
30	0	56	49	1	39	10	1	55	42
	+			+			+		
	XI			X			IX		

Tafel
puncts der Sonne, §. 3 und 84.

III			IV			V			
—			—			—			
°	'	''	°	'	''	°	'	''	
1	55	42	1	41	16	0	58	56	30
1	55	44	1	40	16	0	57	9	29
1	55	43	1	39	14	0	55	21	28
1	55	40	1	38	10	0	53	32	27
1	55	35	1	37	4	0	51	42	26
1	55	28	1	35	57	0	49	51	25
1	55	19	1	34	47	0	47	59	24
1	55	8	1	33	36	0	46	6	23
1	54	55	1	32	23	0	44	12	22
1	54	40	1	31	8	0	42	18	21
1	54	22	1	29	51	0	40	23	20
1	54	2	1	28	33	0	38	26	19
1	53	40	1	27	13	0	36	29	18
1	53	16	1	25	51	0	34	31	17
1	52	50	1	24	28	0	32	33	16
1	52	22	1	23	3	0	30	34	15
1	51	52	1	21	37	0	28	34	14
1	51	20	1	20	9	0	26	35	13
1	50	46	1	18	39	0	24	34	12
1	50	9	1	17	8	0	22	32	11
1	49	30	1	15	36	0	20	31	10
1	48	50	1	14	2	0	18	29	9
1	48	8	1	12	26	0	16	27	8
1	47	23	1	10	49	1	14	24	7
1	46	37	1	9	11	0	12	21	6
1	45	48	1	7	32	0	10	18	5
1	44	58	1	5	51	0	8	15	4
1	44	6	1	4	9	0	6	11	3
1	43	11	1	2	26	0	4	7	2
1	42	14	1	0	42	0	2	4	1
1	41	16	0	58	56	0	0	0	0
+			+			+			
VIII			VII			IV			

Zwölfte Tafel, Verwandlung der

I. Argum. Anom. med. ⊙

	O		I		II		III		IV		V		
	+		+		+		+		+		+		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	0	0	3	47	6	37	7	43	6	45	3	56	30
1	0	8	3	54	6	41	7	43	6	41	3	49	29
2	0	16	4	1	6	45	7	43	6	37	3	41	28
3	0	24	4	8	6	48	7	43	6	33	3	34	27
4	0	32	4	14	6	52	7	42	6	28	3	27	26
5	0	40	4	21	6	56	7	42	6	24	3	19	25
6	0	47	4	28	6	59	7	41	6	19	3	12	24
7	0	55	4	34	7	3	7	41	6	14	3	4	23
8	1	3	4	40	7	6	7	40	6	10	2	57	22
9	1	11	4	47	7	9	7	39	6	5	2	49	21
10	1	19	4	53	7	12	7	37	5	59	2	42	20
11	1	27	4	59	7	15	7	36	5	54	2	34	19
12	1	34	5	5	7	17	7	34	5	49	2	26	18
13	1	42	5	11	7	20	7	33	5	43	2	18	17
14	1	50	5	17	7	22	7	31	5	38	2	10	16
15	1	58	5	22	7	25	7	29	5	32	2	2	15
16	2	5	5	28	7	27	7	27	5	26	1	54	14
17	2	13	5	34	7	29	7	25	5	21	1	46	13
18	2	20	5	39	7	31	7	23	5	15	1	38	12
19	2	28	5	46	7	32	7	21	5	9	1	30	11
20	2	35	5	50	7	34	7	18	5	2	1	22	10
21	2	43	5	55	7	36	7	15	4	56	1	14	9
22	2	50	6	0	7	37	7	13	4	50	1	6	8
23	2	57	6	5	7	38	7	10	4	43	0	58	7
24	3	5	6	10	7	39	7	6	4	37	0	49	6
25	3	12	6	15	7	40	7	3	4	30	0	41	5
26	3	19	6	19	7	41	7	0	4	23	0	33	4
27	3	26	6	24	7	42	6	56	4	17	0	25	3
28	3	33	6	28	7	42	6	53	4	10	0	16	2
29	3	40	6	32	7	43	6	49	4	3	0	8	1
30	3	47	6	37	7	43	6	45	3	56	0	0	0
	—		—		—		—		—		—		
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

II. Arg. Longit. vera ⊙

	O	I	II	III	IV	V	
	+	+	+	—	—	—	
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
0	0 0	8 23	8 45	0 0	8 45	8 23	0
1	0 20	8 33	8 35	0 21	8 55	8 12	1
2	0 40	8 43	8 24	0 43	9 3	8 0	2
3	0 59	8 53	8 12	1 5	9 12	7 48	3
4	1 19	9 1	8 0	1 26	9 19	7 35	4
5	1 39	9 9	7 47	1 47	9 26	7 22	5
6	1 58	9 17	7 34	2 9	9 32	7 9	6
7	2 18	9 23	7 20	2 30	9 37	6 54	7
8	2 37	9 30	7 5	2 51	9 42	6 40	8
9	2 56	9 35	6 50	3 11	9 45	6 25	9
10	3 15	9 40	6 34	3 32	9 49	6 9	10
11	3 34	9 44	6 18	3 52	9 51	5 53	11
12	3 52	9 47	6 1	4 11	9 53	5 37	12
13	4 10	9 50	5 44	4 31	9 54	5 20	13
14	4 28	9 52	5 26	4 50	9 54	5 3	14
15	4 46	9 53	5 8	5 8	9 53	4 46	15
16	5 3	9 54	4 50	5 26	9 52	4 28	16
17	5 20	9 54	4 31	5 44	9 50	4 10	17
18	5 37	9 53	4 11	6 1	9 47	3 52	18
19	5 53	9 51	3 52	6 18	9 44	3 34	19
20	6 9	9 49	3 32	6 34	9 40	3 15	20
21	6 25	9 45	3 11	6 50	9 35	2 56	21
22	6 40	9 42	2 51	7 50	9 30	2 37	22
23	6 54	9 37	2 30	7 20	9 23	2 18	23
24	7 9	9 32	2 9	7 34	9 17	1 58	24
25	7 22	9 26	1 47	7 47	9 9	1 39	25
26	7 35	9 19	1 26	8 0	9 1	1 19	26
27	7 48	9 12	1 5	8 12	8 53	0 59	27
28	8 0	9 3	0 43	8 24	8 43	0 40	28
29	8 12	8 55	0 21	8 35	8 33	0 20	29
30	8 23	8 45	0 0	8 45	8 23	0 0	30
	+	+	+	—	—	—	
	VI	VII	VIII	IX	X	XI	

Dreyzehnte Tafel, Gleichung des ☊, §. 96.

Argum. Anom. med. ☉

	O + ′ ″	I + ′ ″	II + ′ ″	III + ′ ″	IV + ′ ″	V + ′ ″	
0	0 0	5 1	8 47	10 18	9 4	5 17	30
1	0 11	5 10	8 53	10 18	8 59	5 8	29
2	0 22	5 19	8 58	10 18	8 53	4 58	28
3	0 32	5 28	9 3	10 18	8 47	4 48	27
4	0 43	5 37	9 9	10 17	8 41	4 38	26
5	0 53	5 46	9 14	10 17	8 35	4 28	25
6	1 4	5 55	9 19	10 16	8 29	4 18	24
7	1 14	6 3	9 23	10 15	8 22	4 8	23
8	1 25	6 12	9 27	10 14	8 16	3 58	22
9	1 35	6 20	9 31	10 13	8 10	3 48	21
10	1 35	6 28	9 35	10 12	8 3	3 38	20
11	1 55	6 36	9 39	10 10	7 56	3 27	19
12	2 5	6 44	9 42	10 8	7 48	3 17	18
13	2 15	6 52	9 46	10 6	7 41	3 6	17
14	2 25	7 0	9 50	10 4	7 34	2 56	16
15	2 35	7 8	9 53	10 2	7 26	2 45	15
16	2 45	7 16	9 56	9 59	7 18	2 35	14
17	2 55	7 23	9 58	9 56	7 10	2 24	13
18	3 5	7 31	10 1	9 53	7 2	2 13	12
19	3 15	7 38	10 3	9 50	6 54	2 2	11
20	3 25	7 45	10 5	9 46	6 46	1 51	10
21	3 35	7 52	10 7	9 43	6 37	1 40	9
22	3 44	7 58	10 9	9 39	6 29	1 29	8
23	3 54	8 5	10 11	9 35	6 20	1 18	7
24	4 4	8 12	10 13	9 31	6 12	1 7	6
25	4 14	8 18	10 14	9 27	6 3	0 56	5
26	4 23	8 24	10 15	9 23	5 45	0 45	4
27	4 33	8 30	10 16	9 18	5 45	0 34	3
28	4 42	8 36	10 17	9 14	5 36	0 23	2
29	4 52	8 42	10 18	9 9	5 27	0 12	1
30	5 1	8 47	10 18	9 4	5 17	0 0	0
	— XI	— X	— IX	— VIII	— VII	— VI	

	O. VI		I. VII		II. VIII		
	′	″	′	″	′	″	
0	0	0	6	2	6	2	30
1	0	14	6	9	5	55	29
2	0	29	6	15	5	47	28
3	0	43	6	21	5	39	27
4	0	58	6	27	5	30	26
5	1	12	6	32	5	20	25
6	1	26	6	37	5	10	24
7	1	41	6	41	5	0	23
8	1	55	6	45	4	50	22
9	2	9	6	48	4	39	21
10	2	23	6	51	4	28	20
11	2	37	6	54	4	17	19
12	2	50	6	56	4	5	18
13	3	3	6	57	3	53	17
14	3	16	6	57	3	41	16
15	3	29	6	57	3	29	15
16	3	41	6	57	3	16	13
17	3	53	6	57	3	3	12
18	4	5	6	56	2	50	11
19	4	17	6	54	2	37	10
20	4	28	6	51	2	23	9
21	4	39	6	48	2	9	8
22	4	50	6	45	1	55	7
23	5	0	6	41	1	41	6
24	5	10	6	37	1	26	5
25	5	20	6	32	1	12	5
26	5	30	6	27	0	58	4
27	5	39	6	21	0	43	3
28	5	47	6	15	0	29	2
29	5	55	6	9	0	14	1
30	6	2	6	2	0	0	0
	+	+	+	+	+	+	
	XI.	V	X.	IV	IX.	III	

15. Tafel, Breite des Monds in den Syzigien, §. 98.

Argum. ☽ ver. — ☊ ver.

	O. VI			I. VII			II. VIII			
	+ −			+ −			+ −			
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
0	0	0	0	2	30	0	4	19	59	30
1	0	5	14	2	34	31	4	22	34	29
2	0	10	28	2	38	59	4	25	4	28
3	0	15	42	2	43	24	4	27	30	27
4	0	20	55	2	47	46	4	29	50	26
5	0	26	8	2	52	5	4	32	6	25
6	0	31	21	2	56	21	4	34	17	24
7	0	36	33	3	0	34	4	36	22	23
8	0	41	44	3	4	44	4	38	23	22
9	0	46	55	3	8	50	4	40	18	21
10	0	52	4	3	12	53	4	42	9	20
11	0	57	13	3	16	52	4	43	54	19
12	1	2	31	3	20	47	4	45	34	18
13	1	7	27	3	24	39	4	47	9	17
14	1	12	33	3	28	28	4	48	38	16
15	1	17	38	3	32	12	4	50	2	15
16	1	22	40	3	35	53	4	51	21	14
17	1	27	42	3	39	29	4	52	35	13
18	1	32	41	3	43	2	4	53	43	12
19	1	37	39	3	46	30	4	54	46	11
20	1	42	36	3	49	55	4	55	44	10
21	1	47	30	3	53	15	4	56	36	9
22	1	52	22	3	56	31	4	57	22	8
23	1	57	12	3	59	43	4	58	3	7
24	2	2	0	4	2	50	4	58	39	6
25	2	6	46	4	5	53	4	59	9	5
26	2	11	30	4	8	51	4	59	34	4
27	2	16	11	4	11	45	4	59	53	3
28	2	20	50	4	14	34	5	0	7	2
29	2	25	26	4	17	18	5	0	15	1
30	2	30	0	4	19	59	5	0	18	0
	− +			− +			− +			
	XI V			X. IV			IX. III			

Sechzehnte Tafel

Stündliche Veränderung der Breite ☽, §. 99. in den Syzigien.

		Argum. ☽ med. — ☋ oder VI + ☽ — ☊		M + ☊ — ☾	M — ☊ — ☽		
O. VI	0	3′	7″	20″	4″	30	
— +	3	3	7	20	4	27	
	6	3	6	20	4	24	
	9	3	5	20	4	21	
	12	3	3	20	4	18	
	15	3	1	19	4	15	
	18	2	58	19	4	12	
	21	2	54	19	4	9	
	24	2	51	18	4	6	
	27	2	47	18	4	3	— +
I. VII	30	2	42	17	3	0	XI. V
— +	3	2	37	17	3	27	
	6	2	31	16	3	24	
	9	2	25	16	3	21	
	12	2	19	15	3	18	
	15	2	12	14	3	15	
	18	2	5	13	3	12	
	21	1	58	13	3	9	
	24	1	50	12	2	6	
	27	1	42	11	2	3	— +
II. VIII	0	1	34	10	2	0	X. IV
— +	3	1	26	9	2	27	
	6	1	17	8	2	24	
	9	1	7	7	1	21	
	12	0	58	6	1	18	
	15	0	48	5	1	15	
	18	0	39	4	1	12	
	21	0	29	3	1	9	
	24	0	19	2	0	6	
	27	0	10	1	0	3	— +
	30	0	0	0	0	0	IX. III

Siebenzehnte Tafel

Stündliche Bewegung des Monds in den Syzigien, §. 100.

Argum. Anom. med. ☽

	O		I		II		III		IV		V		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	29	34	30	1	31	16	33	15	35	34	37	27	30
1	29	34	30	2	31	20	33	19	35	39	37	29	29
2	29	34	30	4	31	23	33	24	35	43	37	32	28
3	29	34	30	6	31	27	33	28	35	47	37	35	27
4	29	35	30	7	31	30	33	33	35	52	37	38	26
5	29	35	30	9	31	34	33	38	35	56	37	40	25
6	29	35	30	12	31	38	33	42	36	1	37	42	24
7	29	36	30	14	31	42	33	46	36	5	37	44	23
8	29	36	30	16	31	45	33	51	36	9	37	47	22
9	29	36	30	18	31	49	33	56	36	13	37	49	21
10	29	37	30	20	31	52	34	1	36	17	37	51	20
11	29	38	30	23	31	56	34	6	36	21	37	52	19
12	29	39	30	25	32	0	34	11	36	25	37	54	18
13	29	39	30	27	32	4	34	16	36	29	37	56	17
14	29	40	30	29	32	7	34	20	36	34	37	57	16
15	29	41	30	32	32	11	34	25	36	38	37	59	15
16	29	41	30	36	32	16	34	30	36	41	38	0	14
17	29	42	30	39	32	20	34	34	36	45	38	1	13
18	29	43	30	41	32	23	34	39	36	49	38	3	12
19	29	44	30	43	32	27	34	44	36	53	38	4	11
20	29	46	30	45	32	31	34	48	36	56	38	5	10
21	29	47	30	48	32	35	34	53	36	59	38	6	9
22	29	49	30	51	32	39	34	57	37	2	38	7	8
23	29	50	30	54	32	44	35	2	37	5	38	8	7
24	29	52	30	57	32	48	35	7	37	8	38	9	6
25	29	53	31	0	32	52	35	12	37	12	38	9	5
26	29	54	31	3	32	57	35	16	37	15	38	9	4
27	29	55	31	7	33	2	35	21	37	18	38	10	3
28	29	57	31	10	33	6	35	25	37	21	38	10	2
29	29	59	31	13	33	11	35	30	37	24	38	10	1
30	30	1	31	16	33	15	35	34	37	27	38	10	0
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

Für den Vollmond werden noch 2″ addirt.

Siebenzehnte Tafel

Stündliche Bewegung des ☽ in den Syzigien, §. 100.

		Anom. m. ⊙	ſ VI + an. ☽ − an. ⊙	Anom. ☾ + an. ⊙	ſ III. + an. ☽		
O. VI	0	3	3	1	1	30	
− +	3	3	3	1	1	27	
	6	3	3	1	1	24	
	9	3	3	1	1	21	
	12	3	3	1	1	18	
	15	3	3	1	1	15	
	18	3	3	1	1	12	
	21	3	3	1	1	9	
	24	3	3	1	1	6	
	27	3	3	1	1	3	− +
I. VII	0	3	3	1	1	0	XI. V
− +	3	3	3	1	1	27	
	6	2	2	1	1	24	
	9	2	2	1	1	21	
	12	2	2	1	1	18	
	15	2	2	1	1	15	
	18	2	2	1	1	12	
	21	2	2	1	1	9	
	24	2	2	1	1	6	
	27	2	2	1	1	3	− +
II. VIII	0	1	1	0	0	0	X. IV
− +	3	1	1	0	0	27	
	6	1	1	0	0	24	
	9	1	1	0	0	21	
	12	1	1	0	0	18	
	15	1	1	0	0	15	
	18	1	1	0	0	12	
	21	0	0	0	0	9	
	24	0	0	0	0	6	
	27	0	0	0	0	3	− +
	30	0	0	0	0	0	IX. III

18. Tafel, Parallaxe des Monds in den Syzigien,
Argum. Anom. med. ☽, §. 101.

	O		I		II		III		IV		V		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	53	57	54	21	55	31	57	17	59	17	60	52	30
1	53	57	54	23	55	34	57	21	59	20	60	54	29
2	53	57	54	24	55	37	57	25	59	24	60	57	28
3	53	57	54	26	55	40	57	29	59	28	60	59	27
4	53	57	54	27	55	43	57	33	59	32	61	1	26
5	53	58	54	29	55	46	57	37	59	35	61	3	25
6	53	58	54	31	55	50	57	41	59	39	61	5	24
7	53	58	54	33	55	53	57	45	59	43	61	7	23
8	53	59	54	35	55	56	57	49	59	46	61	9	22
9	53	59	54	37	55	59	57	53	59	50	61	11	21
10	54	0	54	39	56	3	57	57	59	53	61	12	20
11	54	0	54	41	56	6	58	1	59	57	61	14	19
12	54	1	54	43	56	10	58	5	60	0	61	15	18
13	54	1	54	45	56	13	58	9	60	3	61	17	17
14	54	2	54	48	56	17	58	13	60	7	61	18	16
15	54	3	54	50	56	20	58	17	60	10	61	19	15
16	54	4	54	53	56	24	58	21	60	13	61	21	14
17	54	5	54	55	56	28	58	25	60	16	61	22	13
18	54	6	54	58	56	31	58	29	60	19	61	23	12
19	54	7	55	0	56	35	58	33	60	22	61	24	11
20	54	8	55	3	56	39	58	37	60	25	61	25	10
21	54	9	55	5	56	42	58	41	60	28	61	26	9
22	54	10	55	8	56	46	58	45	60	31	60	26	8
23	54	11	55	10	56	50	58	49	60	34	61	27	7
24	54	12	55	13	56	54	58	53	60	37	61	27	6
25	54	14	55	16	56	58	58	57	60	39	61	28	5
26	54	15	55	19	57	2	59	1	60	42	61	28	4
27	54	16	55	22	57	5	59	5	60	45	61	28	3
28	54	18	55	25	57	9	59	9	60	47	61	29	2
29	54	19	55	28	57	13	59	13	60	50	61	29	1
30	54	21	55	31	57	17	59	17	60	52	61	29	0
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

Für den Vollmond werden noch 3″ addirt.

Neunzehnte Tafel

§. 102.

Parall. ☽ ′	″	Semid. ☽ ′	″	Parall. ☽ ′	″	Semid. ☽ ′	″
54	5	14	45	57	45	15	45
54	16	14	48	57	56	15	48
54	27	14	51	58	7	15	51
54	38	14	54	58	18	15	54
54	49	14	57	58	29	15	57
55	0	15	0	58	40	16	0
55	11	15	3	58	51	16	3
55	22	15	6	59	2	16	6
55	33	15	9	59	13	16	9
55	44	15	12	59	24	16	12
55	55	15	15	59	35	16	15
56	6	15	18	59	46	16	18
56	17	15	21	59	57	16	21
56	28	15	24	60	8	16	24
56	39	15	27	60	19	16	27
56	50	15	30	60	30	16	30
57	1	15	33	60	41	16	33
57	12	15	36	60	52	16	36
57	23	15	39	61	3	16	39
57	34	15	42	61	14	16	42
57	45	15	45	61	25	16	45

In den Mondsfinſterniſſen

I° Semidiam umbrae

= parall. ☽ + parall. ☉ — ſemid. ☉

II° Semid. penumbrae

= parall. ☽ + parall. ☉ + ſemid. ☉.

Nach Mayer muß

$= \frac{61}{60}$ (parall. ☽ + parall. ☉) $\mp$ ſemid. ☉

genommen werden.

Zwanzigſte Tafel

Arg. Anom. med. ⊙, §. 103.

		Semid. ⊙ ′	″	Horar. ⊙ ′	″		
O	0	15	47	2	23	30	
	10	15	47	2	23	20	
	20	15	48	2	23	10	
I	0	15	49	2	24	0	XI
	10	15	51	2	24	20	
	20	15	53	2	25	10	
II	0	15	55	2	25	0	X
	10	15	57	2	26	20	
	20	16	0	2	27	10	
III	0	16	3	2	28	0	IX
	10	16	6	2	29	20	
	20	16	8	2	29	10	
IV	0	16	11	2	30	0	VIII
	10	16	13	2	31	20	
	20	16	16	2	32	10	
V	0	16	17	2	32	0	VII
	10	16	18	2	33	20	
	20	16	19	2	33	10	
	30	16	20	2	33	0	VI

In den Projectionen der Erdfinſterniſſe iſt

I° Semid. telluris
= parall. ☽ — parall. ⊙

II° Semid. umbrae
= ſemid. ☽ — ſemid. ⊙

III° Semid. penumbrae
= ſemid. ☽ + ſemid. ⊙.

Ein und zwanzigſte Tafel

Declination der ☉, §. 104.

	O VI °	′	″	I VII °	′	″	II VIII °	′	″	
0	0	0	0	11	29	15	20	10	41	30
1	0	23	54	11	50	16	20	23	13	29
2	0	47	47	12	11	6	20	35	23	28
3	1	11	39	12	31	44	20	47	11	27
4	1	35	30	12	52	10	20	58	36	26
5	1	59	20	13	12	23	21	9	38	25
6	2	23	8	13	32	23	21	20	17	24
7	2	46	54	13	52	9	21	30	32	23
8	3	10	38	14	11	41	21	40	28	22
9	3	34	19	14	30	59	21	49	49	21
10	3	57	57	14	50	3	21	58	50	20
11	4	21	31	15	8	52	22	7	26	19
12	4	45	1	15	27	26	22	15	37	18
13	5	8	26	15	45	44	22	23	23	17
14	5	31	46	16	3	46	22	30	44	16
15	5	55	1	16	21	31	22	37	39	15
16	6	18	11	16	38	59	22	44	8	14
17	6	41	15	16	56	10	22	50	11	13
18	7	4	13	17	13	3	22	55	48	12
19	7	27	4	17	29	38	23	0	59	11
20	7	49	48	17	45	55	23	5	43	10
21	8	12	24	18	1	54	23	10	0	9
22	8	34	52	18	17	34	23	13	50	8
23	8	57	12	18	32	54	23	17	13	7
24	9	19	24	18	47	54	23	20	9	6
25	9	41	27	19	2	34	23	22	38	5
26	10	3	20	19	16	54	23	24	40	4
27	10	25	4	19	30	53	23	26	15	3
28	10	46	38	19	44	31	23	27	23	2
29	11	8	2	19	57	47	23	28	5	1
30	11	29	15	20	10	41	23	28	20	0
	V XI			IV X			III IX			

Zwey und zwanzigſte Tafel

Winkel der Ecliptic mit dem Mittagskreis, §. 105.

	O VI °	′	″	I VII °	′	″	II VIII °	′	″	
0	66	31	40	69	23	27	77	45	0	30
1	66	31	52	69	35	3	78	6	41	29
2	66	32	27	69	47	1	78	28	39	28
3	66	33	24	69	59	22	78	50	53	27
4	66	34	44	70	12	5	79	13	22	26
5	66	36	27	70	25	10	79	36	5	25
6	66	38	33	70	38	37	79	59	2	24
7	66	41	3	70	52	36	80	22	13	23
8	66	43	55	71	6	37	80	45	38	22
9	66	47	10	71	21	9	81	9	17	21
10	66	50	48	71	36	2	81	33	9	20
11	66	54	49	71	51	17	81	57	13	19
12	66	59	13	72	6	54	82	21	28	18
13	67	4	0	72	22	52	82	45	54	17
14	67	9	10	72	39	11	83	10	30	16
15	67	14	43	72	55	51	83	35	16	15
16	67	20	38	73	12	52	84	0	11	14
17	67	26	56	73	30	13	84	25	15	13
18	67	33	37	73	47	54	84	50	28	12
19	67	40	41	74	5	55	85	15	49	11
20	67	48	8	74	24	16	85	41	17	10
21	67	55	58	74	42	57	86	6	51	9
22	68	4	10	75	1	57	86	32	31	8
23	68	12	45	75	21	16	86	58	16	7
24	68	21	43	75	40	54	87	24	5	6
25	68	31	4	76	0	51	87	49	58	5
26	68	40	48	76	21	6	88	15	54	4
27	68	50	54	76	41	39	88	41	53	3
28	69	1	22	77	2	29	89	7	54	2
29	69	12	13	77	23	36	89	33	57	1
30	69	23	27	77	45	0	90	0	0	0
	V XI			IV X			III IX			

Drey und zwanzigſte Tafel

Reduction der Ecliptic auf den Aequator, §. 106.

	O	VI		I.	VII		II.	VIII		
	—	—		—	—		—	—		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
0	0	0	0	2	5	43	2	11	16	30
1	0	4	58	2	8	20	2	8	42	29
2	0	9	55	2	10	49	2	5	59	28
3	0	14	52	2	13	8	2	3	6	27
4	0	19	48	2	15	18	2	0	4	26
5	0	24	43	2	17	19	1	56	51	25
6	0	29	36	2	19	10	1	53	30	24
7	0	34	27	2	20	52	1	49	59	23
8	0	39	16	2	22	24	1	46	20	22
9	0	44	2	2	23	45	1	42	32	21
10	0	48	46	2	24	57	1	38	36	20
11	0	53	26	2	25	58	1	34	32	19
12	0	58	3	2	26	48	1	30	21	18
13	1	2	36	2	27	28	1	26	2	17
14	1	7	5	2	27	58	1	21	36	16
15	1	11	30	2	28	17	1	17	3	15
16	1	15	50	2	28	25	1	12	24	14
17	1	20	5	2	28	22	1	7	39	13
18	1	24	15	2	28	8	1	2	49	12
19	1	28	19	2	27	43	0	57	53	11
20	1	32	18	2	27	8	0	52	53	10
21	1	36	10	2	26	21	0	47	48	9
22	1	39	56	2	25	24	0	42	40	8
23	1	43	35	2	24	15	0	37	28	7
24	1	47	8	2	22	56	0	32	12	6
25	1	50	33	2	21	26	0	26	54	5
26	1	53	51	2	19	45	0	21	34	4
27	1	57	1	2	17	53	0	16	12	3
28	2	0	3	2	15	51	0	10	49	2
29	2	2	57	2	13	39	0	5	25	1
30	2	5	43	2	11	16	0	0	0	0
	+	+		+	+		+	+		
	V.	XI		IV	X		III.	IX		

Vier und zwanzigſte Tafel, für die Länge des ☽

Argum. Anom. med. ☽ = M

	O			I			II		
	—			—			—		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″
0	0	0	0	2	58	12	5	15	47
1	0	6	10	3	3	40	5	19	15
2	0	12	21	3	9	4	5	22	36
3	0	18	29	3	14	26	5	25	53
4	0	24	39	3	19	44	5	29	4
5	0	30	49	3	24	59	5	32	11
6	0	36	58	3	30	13	5	35	11
7	0	43	5	3	35	22	5	38	4
8	0	49	13	3	40	29	5	40	54
9	0	55	21	3	45	31	5	43	35
10	1	1	27	3	50	40	5	46	13
11	1	7	31	3	55	25	5	48	44
12	1	13	36	4	0	16	5	51	8
13	1	19	38	4	5	4	5	53	28
14	1	25	41	4	9	49	5	55	46
15	1	31	42	4	14	29	5	57	49
16	1	37	40	4	19	5	5	59	51
17	1	43	37	4	23	38	6	1	45
18	1	49	34	4	28	5	6	3	34
19	1	55	29	4	32	28	6	5	16
20	2	1	22	4	36	48	6	6	53
21	2	7	12	4	41	3	6	8	23
22	2	13	0	4	45	14	6	9	46
23	2	18	46	4	49	18	6	11	3
24	2	24	31	4	53	19	6	12	13
25	2	30	14	4	57	17	6	13	18
26	2	35	56	5	1	9	6	14	15
27	2	41	34	5	4	58	6	15	6
28	2	47	9	5	8	40	6	15	50
29	2	52	42	5	12	16	6	16	27
30	2	58	12	5	15	47	6	16	56
	+			+			+		
	XI			X			IX		

III			IV			V			
°	′	″	°	′	″	°	′	″	
6	16	56	5	38	7	3	20	31	30
6	17	19	5	35	0	3	14	32	29
6	17	36	5	31	47	3	8	31	28
6	17	46	5	28	27	3	2	25	27
6	17	49	5	25	1	2	56	14	26
6	17	44	5	21	29	2	50	0	25
6	17	33	5	17	51	2	43	42	24
6	17	16	5	14	7	2	37	21	23
6	16	51	5	10	16	2	30	56	22
6	16	18	5	6	16	2	24	28	21
6	15	40	5	2	11	2	17	54	20
6	14	55	4	57	59	2	11	19	19
6	14	1	4	53	42	2	4	43	18
6	13	1	4	49	19	1	58	4	17
6	11	54	4	44	50	1	51	21	16
6	10	40	4	40	16	1	44	34	15
6	9	20	4	35	36	1	37	46	14
6	7	51	4	30	49	1	30	56	13
6	6	16	4	25	56	1	24	3	12
6	4	34	4	20	58	1	17	10	11
6	2	43	4	15	53	1	10	14	10
6	0	47	4	10	42	1	3	17	9
5	58	43	4	5	28	0	56	20	8
5	56	33	4	0	8	0	49	21	7
5	54	15	3	54	44	0	42	20	6
5	51	52	3	49	14	0	35	17	5
5	49	21	3	43	39	0	28	15	4
5	46	45	3	38	0	0	21	12	3
5	44	0	3	32	14	0	14	8	2
5	41	7	3	26	25	0	7	4	1
5	38	7	3	20	31	0	0	0	0
+			+			+			
VIII			VII			VI			

Fünf und zwanzigſte Tafel, für die Länge des ☽

Arg. ☽ med. — ☉ med. = E

	O		I		II	
	+		+		±	
	′	″	′	″	′	″
0	0	0	33	52	32	26
1	1	23	34	30	31	41
2	2	47	35	5	30	54
3	4	9	35	38	30	5
4	5	31	36	5	29	12
5	6	53	36	33	28	18
6	8	14	36	57	27	21
7	9	34	37	18	26	23
8	10	55	37	36	25	24
9	12	14	37	53	24	22
10	13	32	38	7	23	19
11	14	49	38	15	22	14
12	16	5	38	23	21	6
13	17	20	38	28	19	58
14	18	33	38	28	18	49
15	19	45	38	26	17	37
16	20	55	38	21	16	24
17	22	4	38	13	15	10
18	23	10	38	3	13	55
19	24	16	37	50	12	40
20	25	19	37	34	11	22
21	26	20	37	17	10	3
22	27	18	36	56	8	44
23	28	15	36	30	7	25
24	29	10	36	3	6	5
25	30	4	35	33	4	44
26	30	54	35	0	3	24
27	31	43	34	24	2	2
28	32	28	33	47	0	40
29	33	11	33	7	0	41
30	33	52	32	26	2	4
	−		−		∓	
	XI		X		IX	

III ′	III ″	IV ′	IV ″	V ′	V ″	
2	4	35	57	35	50	30
3	27	36	36	35	6	29
4	48	37	14	34	19	28
6	10	37	48	33	30	27
7	31	38	22	32	38	26
8	51	38	52	31	44	25
10	11	39	18	30	47	24
11	29	39	42	29	49	23
12	49	40	5	28	47	22
14	8	40	23	27	44	21
15	26	40	38	26	39	20
16	43	40	52	25	32	19
17	55	41	2	24	22	18
19	11	41	9	23	12	17
20	24	41	14	21	59	16
21	36	41	16	20	45	15
22	46	41	15	19	30	14
23	54	41	11	18	13	13
25	1	41	3	16	54	12
26	7	41	52	15	43	11
27	11	40	39	14	12	10
28	13	40	32	12	50	9
29	12	40	3	11	27	8
30	10	39	41	10	3	7
31	6	39	17	8	39	6
32	0	38	49	7	14	5
32	51	38	18	5	47	4
33	41	37	45	4	21	3
34	28	37	10	2	55	2
35	14	36	32	1	28	1
35	57	35	50	0	0	0
+ VIII		+ VII		+ VI		

Fünf und zwanzigſte Tafel, für die Länge des ☽

Arg. ☽ med. — ⊙ med. = E

	O		I		II	
	+		+		±	
	′	″	′	″	′	″
0	0	0	33	52	32	26
1	1	23	34	30	31	41
2	2	47	35	5	30	54
3	4	9	35	38	30	5
4	5	31	36	5	29	12
5	6	53	36	33	28	18
6	8	14	36	57	27	21
7	9	34	37	18	26	23
8	10	55	37	36	25	24
9	12	14	37	53	24	22
10	13	32	38	7	23	19
11	14	49	38	15	22	14
12	16	5	38	23	21	6
13	17	20	38	28	19	58
14	18	33	38	28	18	49
15	19	45	38	26	17	37
16	20	55	38	21	16	24
17	22	4	38	13	15	10
18	23	10	38	3	13	55
19	24	16	37	50	12	40
20	25	19	37	34	11	22
21	26	20	37	17	10	3
22	27	18	36	56	8	44
23	28	15	36	30	7	25
24	29	10	36	3	6	5
25	30	4	35	33	4	44
26	30	54	35	0	3	24
27	31	43	34	24	2	2
28	32	28	33	47	0	40
29	33	11	33	7	0	41
30	33	52	32	26	2	4
	—		—		∓	
	XI		X		IX	

III		IV		V		
—		—		—		
′	″	′	″	′	″	
2	4	35	57	35	50	30
3	27	36	36	35	6	29
4	48	37	14	34	19	28
6	10	37	48	33	30	27
7	31	38	22	32	38	26
8	51	38	52	31	44	25
10	11	39	18	30	47	24
11	29	39	42	29	49	23
12	49	40	5	28	47	22
14	8	40	23	27	44	21
15	26	40	38	26	39	20
16	43	40	52	25	32	19
17	55	41	2	24	22	18
19	11	41	9	23	12	17
20	24	41	14	21	59	16
21	36	41	16	20	45	15
22	46	41	15	19	30	14
23	54	41	11	18	13	13
25	1	41	3	16	54	12
26	7	41	52	15	43	11
27	11	40	39	14	12	10
28	13	40	32	12	50	9
29	12	40	3	11	27	8
30	10	39	41	10	3	7
31	6	39	17	8	39	6
32	0	38	49	7	14	5
32	51	38	18	5	47	4
33	41	37	45	4	21	3
34	28	37	10	2	55	2
35	14	36	32	1	28	1
35	57	35	50	0	0	0
+		+		+		
VIII		VII		VI		

Sechs und zwanzigſte Tafel, für die Länge des ☽

Arg. = 2 E — M

	0			I			II		
	—			—			—		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″
0	0	0	0	0	37	46	1	5	48
1	0	1	20	0	38	54	1	6	26
2	0	2	38	0	40	3	1	7	4
3	0	3	58	0	41	11	1	7	42
4	0	5	17	0	42	18	1	8	19
5	0	6	35	0	43	24	1	8	54
6	0	7	53	0	44	28	1	9	28
7	0	9	11	0	45	31	1	10	0
8	0	10	30	0	46	34	1	10	31
9	0	11	49	0	47	37	1	11	1
10	0	13	6	0	48	38	1	11	30
11	0	14	24	0	49	39	1	11	58
12	0	15	42	0	50	39	1	12	24
13	0	16	59	0	51	38	1	12	49
14	0	18	16	0	52	35	1	13	13
15	0	19	33	0	53	32	1	13	35
16	0	20	48	0	54	29	1	13	56
17	0	22	5	0	55	24	1	14	16
18	0	23	19	0	56	18	1	14	34
19	0	24	34	0	57	11	1	14	51
20	0	25	49	0	58	3	1	15	7
21	0	27	3	0	58	55	1	15	21
22	0	28	18	0	59	45	1	15	34
23	0	29	31	1	0	35	1	15	45
24	0	30	43	1	1	23	1	15	55
25	0	31	55	1	2	9	1	16	3
26	0	33	6	1	2	55	1	16	11
27	0	34	18	1	3	40	1	16	17
28	0	35	28	1	4	22	1	16	21
29	0	36	38	1	5	5	1	16	25
30	0	37	46	1	5	48	1	16	27
	+			+			+		
	XI			X			IX		

III −			IV −			V −			
°	′	″	°	′	″	°	′	″	
1	16	27	1	6	40	0	38	40	30
1	16	28	1	6	0	0	37	31	29
1	16	27	1	5	18	0	36	20	28
1	16	24	1	4	35	0	35	8	27
1	16	20	1	3	51	0	33	54	26
1	16	15	1	3	6	0	32	41	25
1	16	8	1	2	21	0	31	27	24
1	16	1	1	1	34	0	30	14	23
1	15	51	1	0	45	0	28	59	22
1	15	40	0	59	55	0	27	45	21
1	15	28	0	59	3	0	26	29	20
1	15	15	0	58	11	0	25	12	19
1	15	1	0	57	18	0	23	55	18
1	14	44	0	56	24	0	22	38	17
1	14	26	0	55	29	0	21	19	16
1	14	6	0	54	33	0	20	2	15
1	13	44	0	53	36	0	18	45	14
1	13	23	0	52	40	0	17	26	13
1	13	0	0	51	41	0	16	6	12
1	12	36	0	50	40	0	14	46	11
1	12	10	0	49	38	0	13	27	10
1	11	42	0	48	36	0	12	6	9
1	11	13	0	47	33	0	10	43	8
1	10	44	0	46	30	0	9	26	7
1	10	13	0	45	25	0	8	5	6
1	9	41	0	44	20	0	6	45	5
1	9	7	0	43	13	0	5	25	4
1	8	31	0	42	6	0	4	4	3
1	7	54	0	40	59	0	2	43	2
1	7	19	0	39	49	0	1	22	1
1	6	40	0	38	40	0	0	0	0
+ VIII			+ VII			+ VI			

Sieben und zwanzigſte Tafel, für die Länge des ☽

Argum. Anom. med. ☽ = a

	0		I		II	
	+		+		+	
	′	″	′	″	′	″
0	0	0	5	31	9	40
1	0	13	5	41	9	46
2	0	24	5	51	9	52
3	0	35	6	1	9	58
4	0	47	6	11	10	3
5	0	58	6	21	10	9
6	1	10	6	30	10	14
7	1	21	6	40	10	19
8	1	33	6	49	10	24
9	1	44	6	58	10	29
10	1	55	7	7	10	33
11	2	7	7	16	10	37
12	2	18	7	25	10	41
13	2	29	7	34	10	45
14	2	40	7	42	10	49
15	2	51	7	51	10	52
16	3	2	7	59	10	55
17	3	13	8	7	10	58
18	3	24	8	15	11	1
19	3	35	8	23	11	3
20	3	46	8	31	11	6
21	3	57	8	39	11	8
22	4	8	8	46	11	10
23	4	18	8	54	11	12
24	4	29	9	1	11	14
25	4	40	9	8	11	16
26	4	50	9	15	11	17
27	5	0	9	21	11	18
28	5	11	9	28	11	19
29	5	21	9	34	11	20
30	5	31	9	40	11	20
	−		−		−	
	XI		X		IX	

III		IV		V		
+		+		+		
′	″	′	″	′	″	
11	20	9	58	5	49	30
11	20	9	52	5	39	29
11	20	9	46	5	28	28
11	20	9	39	5	17	27
11	19	9	33	5	6	26
11	19	9	26	4	55	25
11	18	9	19	4	44	24
11	17	9	12	4	33	23
11	16	9	5	4	22	22
11	15	8	58	4	11	21
11	13	8	51	3	59	20
11	11	8	43	3	48	19
11	9	8	35	3	36	18
11	7	8	27	3	25	17
11	5	8	19	3	13	16
11	2	8	11	3	1	15
10	59	8	3	2	50	14
10	56	7	54	2	38	13
10	52	7	45	2	26	12
10	49	7	36	2	14	11
10	44	7	27	2	2	10
10	41	7	18	1	50	9
10	37	7	9	1	38	8
10	33	7	0	1	26	7
10	29	6	50	1	14	6
10	24	6	40	1	1	5
10	19	6	30	0	49	4
10	14	6	20	0	37	3
10	9	6	9	0	25	2
10	4	5	59	0	13	1
9	58	5	49	0	0	0
—		—		—		
VIII		VII		VI		

Acht und zwanzigſte Tafel, für die Länge des ☽

Argumente

		a + M		a — M		M + 2E		M — E	2(M — E)	
		′	″	′	″	′	″	″	′	″
O. VI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— +	3	0	5	0	8	0	9	1	0	11
	6	0	11	0	15	0	18	2	0	22
	9	0	16	0	22	0	27	4	0	33
	12	0	22	0	30	0	36	5	0	44
	15	0	27	0	38	0	45	6	0	54
	18	0	32	0	45	0	54	7	1	5
	21	0	38	0	52	1	3	8	1	15
	24	0	43	0	59	1	12	10	1	25
	27	0	48	1	7	1	20	11	1	35
I. VII	0	0	53	1	13	1	28	12	1	45
— +	3	0	57	1	19	1	35	13	1	54
	6	1	2	1	25	1	43	14	2	3
	9	1	6	1	31	1	50	15	2	12
	12	1	10	1	37	1	57	16	2	20
	15	1	14	1	42	2	3	17	2	28
	18	1	18	1	47	2	9	17	2	36
	21	1	22	1	52	2	15	18	2	43
	24	1	25	1	57	2	21	19	2	50
	27	1	28	2	2	2	27	20	2	56
II. VIII	0	1	31	2	6	2	32	21	3	2
— +	3	1	34	2	9	2	36	21	3	7
	6	1	36	2	12	2	39	22	3	12
	9	1	38	2	15	2	43	22	3	16
	12	1	40	2	18	2	46	23	3	20
	15	1	41	2	20	2	49	23	3	23
	18	1	43	2	22	2	51	23	3	25
	21	1	44	2	23	2	53	24	3	27
	24	1	44	2	24	2	54	24	3	29
	27	1	45	2	25	2	55	24	3	30
	30	1	45	2	25	2	55	24	3	30

Argumente

4E —M	2E—a		a—M +2E	a+M —2E		M—(2☽ —2☊)	2☉ —2☊		
0	0	0	0	0	0	0	0	30	
3	0	8	2	0	12	3	2	27	
6	0	15	5	0	24	6	5	24	
8	0	23	7	0	36	9	7	21	
11	0	31	10	0	49	12	10	18	
13	0	39	12	1	1	15	12	15	
16	0	46	14	1	13	18	14	12	
19	0	54	17	1	25	21	16	9	
21	1	1	19	1	36	24	19	6	
24	1	8	21	1	47	27	21	3	+ —
26	1	15	23	1	58	29	23	0	XI. V
28	1	22	25	2	8	31	25	27	
30	1	28	27	2	18	34	27	24	
33	1	34	29	2	28	36	29	21	
35	1	40	31	2	37	38	31	18	
37	1	46	33	2	45	41	33	15	
39	1	51	34	2	54	43	35	12	
41	1	56	36	3	2	45	37	9	
42	2	1	37	3	10	46	38	6	
44	2	6	39	3	17	48	39	3	+ —
45	2	10	40	3	24	50	41	0	X. IV
46	2	14	41	3	29	51	42	27	
48	2	17	42	3	34	53	43	24	
49	2	20	43	3	39	54	43	21	
50	2	23	44	3	43	55	44	18	
50	2	25	44	3	47	56	45	15	
51	2	27	45	3	50	57	46	12	
51	2	28	45	3	52	57	46	9	
52	2	29	46	3	54	58	47	6	
52	2	30	46	3	55	58	47	3	+ —
52	2	30	46	3	55	58	47	0	IX. III

Neun und zwanzigſte Tafel, für die Breite des ☽

I. Argum. L‴ — ☊′

	O. VI			I. VII			II. VIII			
	+	—		+	—		+	—		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
0	0	0	0	2	34	25	4	27	38	30
1	0	5	23	2	39	4	4	30	18	29
2	0	10	46	2	43	39	4	32	53	28
3	0	16	9	2	48	12	4	35	22	27
4	0	21	32	2	52	42	4	37	47	26
5	0	26	54	2	57	9	4	40	7	25
6	0	32	16	3	1	33	4	42	21	24
7	0	37	37	3	5	53	4	44	30	23
8	0	42	58	3	10	10	4	46	34	22
9	0	48	18	3	14	23	4	48	33	21
10	0	53	37	3	18	33	4	50	27	20
11	0	58	55	3	22	39	4	52	15	19
12	1	4	11	3	26	42	4	53	58	18
13	1	9	27	3	30	41	4	55	36	17
14	1	14	42	3	34	36	4	57	8	16
15	1	19	55	3	38	27	4	58	35	15
16	1	25	6	3	42	14	4	59	56	14
17	1	30	16	3	45	57	5	1	12	13
18	1	35	24	3	49	36	5	2	22	12
19	1	40	31	3	53	11	5	3	26	11
20	1	45	36	3	56	41	5	4	25	10
21	1	50	39	4	0	7	5	5	19	9
22	1	55	40	4	3	29	5	6	7	8
23	2	0	39	4	6	47	5	6	50	7
24	2	5	36	4	9	59	5	7	26	6
25	2	10	30	4	13	7	5	7	57	5
26	2	15	22	4	16	11	5	8	23	4
27	2	20	12	4	19	10	5	8	43	3
28	2	24	59	4	22	4	5	8	57	2
29	2	29	43	4	24	53	5	9	5	1
30	2	34	25	4	27	38	5	9	8	0
	—	+		—	+		—	+		
	XI.	V		X.	IV		IX.	III		

II. Argum. L‴ + ☊′ − 2 ☉′

	O. +	VI −	I. +	VII −	II +	VIII −	
	′	″	′	″	′	″	
0	0	0	4	25	7	39	30
1	0	9	4	33	7	43	29
2	0	19	4	41	7	48	28
3	0	28	4	49	7	52	27
4	0	37	4	56	7	56	26
5	0	46	5	4	8	0	25
6	0	55	5	11	8	4	24
7	1	5	5	19	8	7	23
8	1	14	5	26	8	11	22
9	1	23	5	34	8	14	21
10	1	32	5	41	8	18	20
11	1	41	5	48	8	21	19
12	1	50	5	55	8	24	18
13	1	59	6	2	8	27	17
14	2	8	6	9	8	30	16
15	2	17	6	15	8	32	15
16	2	26	6	22	8	34	14
17	2	35	6	28	8	36	13
18	2	44	6	34	8	38	12
19	2	52	6	40	8	40	11
20	3	1	6	46	8	42	10
21	3	10	6	52	8	43	9
22	3	18	6	57	8	45	8
23	3	27	7	3	8	46	7
24	3	35	7	8	8	47	6
25	3	44	7	14	8	48	5
26	3	52	7	19	8	48	4
27	4	1	7	24	8	49	3
28	4	9	7	29	8	49	2
29	4	17	7	34	8	50	1
30	4	25	7	39	8	50	0
	−	+	−	+	−	+	
	XI.	V	X.	IV	IX.	III	

Dreyzigſte Tafel, für die Parallaxe des ☽

I. Arg. Anom. med. ☽ = M

	O		I		II		III		IV		V		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	54	10	54	30	55	29	56	58	58	37	59	56	30
1	54	10	54	32	55	32	57	1	58	40	59	58	29
2	54	10	54	33	55	34	57	5	58	43	60	0	28
3	54	10	54	35	55	37	57	8	58	46	60	2	27
4	54	11	54	36	55	39	57	12	58	49	60	4	26
5	54	11	54	38	55	42	57	15	58	52	60	5	25
6	54	11	54	39	55	45	57	19	58	55	60	7	24
7	54	11	54	41	55	47	57	22	58	58	60	8	23
8	54	11	54	42	55	50	57	25	59	1	60	10	22
9	54	12	54	44	55	53	57	29	59	4	60	11	21
10	54	12	54	46	55	56	57	32	59	7	60	13	20
11	54	12	54	48	55	59	57	35	59	10	60	14	19
12	54	13	54	49	56	2	57	38	59	13	60	15	18
13	54	13	54	51	56	5	57	42	59	16	60	16	17
14	54	14	54	53	56	8	57	45	59	18	60	17	16
15	54	15	54	55	56	11	57	48	59	21	60	18	15
16	54	15	54	57	56	14	57	51	59	23	60	18	14
17	54	16	54	59	56	17	57	55	59	26	60	19	13
18	54	17	55	1	56	20	57	58	59	29	60	20	12
19	54	18	55	3	56	23	58	1	59	31	60	21	11
20	54	19	55	5	56	26	58	4	59	34	60	22	10
21	54	20	55	7	56	29	58	8	59	36	60	22	9
22	54	21	55	9	56	32	58	11	59	39	60	23	8
23	54	22	55	12	56	36	58	14	59	41	60	24	7
24	54	23	55	14	56	39	58	18	59	44	60	25	6
25	54	24	55	17	56	42	58	21	59	46	60	25	5
26	54	25	55	19	56	45	58	24	59	48	60	26	4
27	54	26	55	22	56	49	58	28	59	50	60	26	3
28	54	28	55	24	56	52	58	31	59	52	60	26	2
29	54	29	55	27	56	55	58	34	59	54	60	26	1
30	54	30	55	29	56	58	58	37	59	56	60	26	0
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

II. Arg. = (2 E — M) III. Arg. = ☽ — ☉ = E

	0 — 6 +	1 — 7 +	2 — 8 +	0 +	I +	II —	III —	IV +	V +	
0	38″	33″	19	25	12″	14″	27″	13″	14″	30
1	38	32	18	25	12	14	27	12	14	29
2	38	32	18	25	11	15	27	12	15	28
3	38	32	17	25	10	16	27	11	16	27
4	38	31	17	25	9	16	27	10	17	26
5	38	31	16	25	8	17	27	9	18	25
6	38	31	16	25	8	18	27	8	18	24
7	37	30	15	24	7	18	26	7	19	23
8	37	30	14	24	6	19	26	6	20	22
9	37	30	14	24	5	20	26	5	20	21
10	37	29	13	24	4	21	25	4	21	20
11	37	29	13	24	3	21	25	3	22	19
12	37	28	12	23	2	22	24	2	22	18
13	37	28	11	23	1	23	24	1	23	17
14	36	28	11	23	—	23	23	—	23	16
15	36	27	10	23	1	24	23	1	24	15
16	36	27	9	22	1	24	22	2	24	14
17	36	26	9	22	2	25	22	3	25	13
18	36	26	8	21	3	25	21	4	25	12
19	35	25	7	20	4	25	21	5	25	11
20	35	25	6	19	5	26	20	6	26	10
21	35	24	6	19	6	26	19	7	26	9
22	35	24	5	18	7	26	19	7	26	8
23	34	23	4	17	8	26	18	8	26	7
24	34	23	4	16	9	26	17	9	27	6
25	34	22	3	15	10	27	16	10	27	5
26	34	21	3	15	10	27	16	11	27	4
27	33	21	2	14	11	27	15	11	28	3
28	33	20	1	13	12	27	14	12	28	2
29	33	20	1	12	13	27	13	13	28	1
30	33	19	0	12	14	27	13	14	28	0
	11 — 5 +	10 — 4 +	9 — 3 +	+ XI	+ X	— IX	— VIII	+ VII	+ VI	

Ein und dreyzigſte Tafel, ſtündliche Bewegung

I. Arg. Anom. med. ☽ = M

	O		I		II		III		IV		V		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	29	35	29	58	31	2	32	41	34	36	36	10	30
1	29	35	29	59	31	5	32	45	34	39	36	13	29
2	29	36	30	0	31	7	32	49	34	43	36	15	28
3	29	36	30	2	31	10	32	53	34	46	36	17	27
4	29	36	30	4	31	13	32	56	34	50	36	19	26
5	29	36	30	6	31	17	33	0	34	54	36	21	25
6	29	36	30	7	31	20	33	4	34	57	36	23	24
7	29	36	30	9	31	23	33	8	35	1	36	25	23
8	29	37	30	11	31	26	33	12	35	5	36	27	22
9	29	37	30	13	31	29	33	15	35	8	36	29	21
10	29	38	30	15	31	32	33	19	35	11	36	31	20
11	29	39	30	17	31	36	33	23	35	15	36	32	19
12	29	39	30	19	31	39	33	27	35	18	36	34	18
13	29	40	30	21	31	42	33	31	35	21	36	35	17
14	29	40	30	23	31	45	33	35	35	25	36	36	16
15	29	41	30	25	31	48	33	39	35	28	36	38	15
16	29	42	30	27	31	52	33	42	35	31	36	39	14
17	29	43	30	30	31	55	33	46	35	34	36	40	13
18	29	44	30	32	31	59	33	49	35	37	36	41	12
19	29	44	30	34	32	2	33	54	35	40	36	42	11
20	29	45	30	37	32	5	33	58	35	43	36	43	10
21	29	46	30	39	32	9	34	2	35	46	36	44	9
22	29	47	30	41	32	13	34	5	35	49	36	45	8
23	29	49	30	44	32	16	34	9	35	52	36	46	7
24	29	50	30	46	32	20	34	13	35	55	36	46	6
25	29	51	30	49	32	23	34	17	35	57	36	47	5
26	29	52	30	52	32	27	34	21	36	0	36	47	4
27	29	54	30	54	32	30	34	24	36	3	36	47	3
28	29	55	30	57	32	34	34	28	36	5	36	47	2
29	29	56	31	0	32	38	34	32	36	8	36	48	1
30	29	58	31	2	32	41	34	36	36	10	36	48	0
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

II. Argum. ☽ — ⊙ = E

	O	I	II	III	IV	V	
	+	±	−	−	∓	+	
0	42″	20″	22″	42″	21″	22″	30
3	42	16	26	41	17	26	27
6	41	12	29	41	13	29	24
9	40	7	33	40	9	33	21
12	38	3	34	38	4	36	18
15	36	2	36	36	—	38	15
18	33	6	38	34	4	40	12
21	31	10	40	31	9	42	9
24	28	14	41	28	13	43	6
27	24	18	41	25	18	44	3
30	20	22	42	21	22	44	0
	+	±	−	−	∓	+	
	XI	X	IX	VIII	VII	VI	

III. Argum. 2 E — M

	O	I	II	III	IV	V	
	−	−	−	+	+	+	
0	37″	32″	19″	0″	19″	33″	30
3	37	31	17	2	20	34	27
6	37	30	16	3	22	35	24
9	37	29	14	5	24	36	21
12	36	28	12	7	25	36	18
15	36	27	10	9	27	37	15
18	36	25	8	11	28	37	12
21	35	24	6	13	29	38	9
24	34	22	4	15	31	38	6
27	33	21	2	17	32	38	3
30	32	19	0	19	33	38	0
	−	−	−	+	+	+	
	XI	X	IX	VIII	VII	VI	

		IV°	V°	VI°	VII°
		2E+M	2E−a	4E−M	M+a
O. VI	0	5″	3	1	1
− +	3	5	3	1	1
	6	5	3	1	1
	9	5	3	1	1
	12	5	3	1	1
	15	5	3	1	1
	18	4	3	1	1
	21	4	2	1	1
	24	4	2	1	1
	27	4	2	1	1
I. VII	0	4	2	1	1
− +	3	4	2	1	1
	6	4	2	1	1
	9	4	2	1	1
	12	4	2	1	1
	15	3	2	1	1
	18	3	2	1	1
	21	3	2	1	1
	24	3	2	1	1
	27	3	1	1	1
II. VIII	0	2	1	1	0
− +	3	2	1	1	0
	6	2	1	0	0
	9	2	1	0	0
	12	1	1	0	0
	15	1	1	0	0
	18	1	0	0	0
	21	1	0	0	0
	24	0	0	0	0
	27	0	0	0	0
	30				

Argumente.

VIII°	IX°	X°		
∫ VI + a — 2 E + M	∫ VI + a — M	∫ III + M		
2″	1	1	30	
2	1	1	27	
2	1	1	24	
2	1	1	21	
2	1	1	18	
2	1	1	15	
2	1	1	12	
2	1	1	9	
2	1	1	6	
2	1	1	3	— +
1	1	1	0	XI. V
1	1	1	27	
1	1	1	24	
1	1	1	21	
1	1	1	18	
1	1	1	15	
1	1	1	12	
1	1	1	9	
1	1	1	6	
1	1	1	3	— +
1	1	0	0	X. IV
1	0	0	27	
1	0	0	24	
1	0	0	21	
1	0	0	18	
0	0	0	15	
0	0	0	12	
0	0	0	9	
0	0	0	6	
0	0	0	3	— +
0	0	0	0	IX. III

Zwey und dreyzigſte Tafel, ſtündl. Veränderung

Argumente.

		I°		II°	III°
		☽ m — ☊ m = λ		ſ VI + λ + M	2E — λ
O. VI	0	2′	58″	19″	5″
+ —	3	2	58	19	5
	6	2	57	19	5
	9	2	56	19	5
	12	2	54	19	5
	15	2	52	19	5
	18	2	49	18	5
	21	2	46	18	5
	24	2	42	18	5
	27	2	38	17	4
I. VII	0	2	34	17	4
+ —	3	2	29	16	4
	6	2	24	15	4
	9	2	18	15	4
	12	2	12	14	4
	15	2	6	14	4
	18	1	59	13	3
	21	1	52	12	3
	24	1	45	11	3
	27	1	37	10	3
II. VIII	0	1	29	10	3
+ —	3	1	21	9	2
	6	1	12	8	2
	9	1	4	7	2
	12	0	55	6	2
	15	0	46	5	1
	18	0	37	4	1
	21	0	28	3	1
	24	0	18	2	0
	27	0	9	1	0
	30	0	0	0	0

Argumente.

IV°	V°	VI°		
ſ VI + λ + 2E — M	ſ VI — λ + 2E — M	2E + λ		
4″	3″	3″	30	
4	3	3	27	
4	3	3	24	
4	3	3	21	
4	3	3	18	
4	3	3	15	
4	3	3	12	
4	3	3	9	
4	3	3	6	
4	3	3	3	+ —
3	3	3	0	XI. V
3	3	3	27	
3	2	2	24	
3	2	2	21	
3	2	2	18	
3	2	2	15	
3	2	2	12	
3	2	2	9	
2	2	2	6	
2	2	2	3	+ —
2	1	1	0	X. IV
2	1	1	27	
2	1	1	24	
1	1	1	21	
1	1	1	18	
1	1	1	15	
1	1	1	12	
1	0	0	9	
0	0	0	6	
0	0	0	3	+ —
0	0	0	0	IX. III

Drey und dreyzigſte Tafel, für die Zeit der ☌

I. Arg. Anom. med. ☽

	0 +			I +			II +		
	St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″
0	0	0	0	5	56	51	10	8	41
1	0	12	31	6	7	26	10	14	20
2	0	25	2	6	17	55	10	19	46
3	0	37	33	6	28	15	10	25	1
4	0	50	3	6	38	28	10	30	5
5	1	2	32	6	48	32	10	34	56
6	1	15	0	6	58	29	10	39	35
7	1	27	26	7	8	18	10	44	2
8	1	39	51	7	17	56	10	48	16
9	1	52	13	7	27	28	10	52	19
10	2	4	33	7	36	48	10	56	9
11	2	16	50	7	46	2	10	59	47
12	2	29	4	7	55	4	11	3	10
13	2	41	16	8	3	59	11	6	21
14	2	53	25	8	12	42	11	9	21
15	3	5	31	8	21	16	11	12	9
16	3	17	31	8	29	41	11	14	43
17	3	29	27	8	37	55	11	17	4
18	3	41	20	8	45	59	11	19	14
19	3	53	10	8	53	53	11	21	11
20	4	4	52	9	1	37	11	22	54
21	4	16	29	9	9	10	11	24	25
22	4	28	2	9	16	31	11	25	44
23	4	39	30	9	23	41	11	26	49
24	4	50	52	9	30	41	11	27	42
25	5	2	9	9	37	29	11	28	22
26	5	13	17	9	44	6	11	28	50
27	5	24	24	9	50	32	11	29	4
28	5	35	18	9	56	47	11	29	6
29	5	46	8	10	2	50	11	28	56
30	5	56	51	10	8	41	11	28	33
	—			—			—		
	XI			X			IX		

= M

III + St.	′	″	IV + St.	′	″	V + St.	′	″	
11	28	33	9	44	29	5	32	39	30
11	27	58	9	38	10	5	22	26	29
11	27	10	9	31	41	5	12	8	28
11	26	10	9	25	2	5	1	46	27
11	24	58	9	18	13	4	51	17	26
11	23	32	9	11	15	4	40	45	25
11	21	54	9	4	7	4	30	6	24
11	20	4	8	56	51	4	19	25	23
11	18	2	8	49	26	4	8	38	22
11	15	48	8	41	50	3	57	49	21
11	13	22	8	34	7	3	46	56	20
11	10	44	8	26	15	3	35	58	19
11	7	53	8	18	13	3	24	56	18
11	4	50	8	10	4	3	13	53	17
11	1	37	8	1	47	3	2	43	16
10	58	12	7	53	21	2	51	33	15
10	54	33	7	44	47	2	40	19	14
10	50	47	7	36	7	2	29	2	13
10	46	46	7	27	18	2	17	42	12
10	42	35	7	18	22	2	6	22	11
10	38	11	7	9	18	1	55	1	10
10	33	37	7	0	8	1	43	35	9
10	28	52	6	50	51	1	32	10	8
10	23	56	6	41	28	1	20	42	7
10	18	50	6	31	56	1	9	12	6
10	13	33	6	22	17	0	57	42	5
10	8	6	6	12	34	0	46	10	4
10	2	25	6	2	45	0	34	38	3
9	56	36	5	52	49	0	23	6	2
9	50	38	5	42	46	0	11	33	1
9	44	29	5	32	39	0	0	0	0
— VIII			— VII			— VI			

Drey und dreyzigſte Tafel, für die Zeit der ☍

III. Argum. ☽ m — ☉ m

	O			I			II		
	—			—			✠		
	St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″
0	0	0	0	0	48	32	0	47	25
1	0	1	57	0	49	27	0	46	20
2	0	3	55	0	50	20	0	45	12
3	0	5	52	0	51	10	0	44	1
4	0	7	49	0	51	55	0	42	45
5	0	9	45	0	52	36	0	41	27
6	0	11	41	0	53	13	0	40	5
7	0	13	36	0	53	47	0	38	41
8	0	15	30	0	54	15	0	37	12
9	0	17	22	0	54	40	0	35	42
10	0	19	13	0	54	59	0	34	9
11	0	21	2	0	55	18	0	32	32
12	0	22	50	0	55	30	0	30	53
13	0	24	37	0	55	39	0	29	12
14	0	26	22	0	55	42	0	27	28
15	0	28	5	0	55	43	0	25	42
16	0	29	47	0	55	39	0	23	54
17	0	31	25	0	55	30	0	22	3
18	0	33	0	0	55	17	0	20	11
19	0	34	34	0	55	0	0	18	18
20	0	36	7	0	54	39	0	16	22
21	0	37	34	0	54	13	0	14	25
22	0	38	59	0	53	44	0	12	28
23	0	40	22	0	53	11	0	10	28
24	0	41	42	0	52	34	0	8	29
25	0	42	58	0	51	52	0	6	29
26	0	44	12	0	51	7	0	4	26
27	0	45	23	0	50	17	0	2	27
28	0	46	30	0	49	22	0	0	22
29	0	47	32	0	48	25	0	1	40
30	0	48	32	0	47	25	0	3	43
	+			+			✠		
	XI			X			IX		

III +			IV +			V +			
St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″	
0	3	43	0	53	51	0	52	16	30
0	5	46	0	54	47	0	51	10	29
0	7	49	0	55	40	0	50	0	28
0	9	53	0	56	31	0	48	45	27
0	11	52	0	57	17	0	47	28	26
0	13	53	0	57	58	0	46	8	25
0	15	53	0	58	34	0	44	45	24
0	17	52	0	59	7	0	43	18	23
0	19	50	0	59	36	0	41	47	22
0	21	47	0	59	59	0	40	14	21
0	23	43	1	0	19	0	38	39	20
0	25	37	1	0	36	0	37	0	19
0	27	27	1	0	49	0	35	18	18
0	29	17	1	0	56	0	33	36	17
0	31	6	1	0	59	0	31	50	16
0	32	52	1	0	57	0	30	1	15
0	34	36	1	0	52	0	28	10	14
0	36	18	1	0	43	0	26	18	13
0	37	57	1	0	28	0	24	24	12
0	39	34	1	0	10	0	22	28	11
0	41	9	0	59	47	0	20	31	10
0	42	38	0	59	20	0	18	31	9
0	44	6	0	58	49	0	16	30	8
0	45	31	0	58	14	0	14	29	7
0	46	53	0	57	35	0	12	28	6
0	48	11	0	56	52	0	10	25	5
0	49	27	0	56	5	0	8	22	4
0	50	39	0	55	14	0	6	17	3
0	51	46	0	54	17	0	4	11	2
0	52	50	0	53	17	0	2	5	1
0	53	51	0	52	16	0	0	0	0
− VIII			− VII			− VI			

III. Argum.

	Q +			I +			II +		
	St.	'	"	St.	'	"	St.	'	"
0	0	0	0	1	11	21	2	3	20
1	0	2	30	1	13	30	2	4	32
2	0	4	59	1	15	38	2	5	43
3	0	7	48	1	17	44	2	6	53
4	0	9	57	1	19	48	2	7	59
5	0	12	26	1	21	51	2	9	1
6	0	14	55	1	23	51	2	10	2
7	0	17	23	1	25	50	2	11	1
8	0	19	51	1	27	49	2	11	57
9	0	22	19	1	29	46	2	12	51
10	0	24	46	1	31	40	2	13	43
11	0	27	14	1	33	34	2	14	32
12	0	29	41	1	35	26	2	15	18
13	0	32	7	1	37	15	2	16	2
14	0	34	32	1	39	3	2	16	44
15	0	36	57	1	40	50	2	17	23
16	0	39	21	1	42	34	2	17	59
17	0	41	44	1	44	16	2	18	33
18	0	44	7	1	45	56	2	19	5
19	0	46	29	1	47	35	2	19	35
20	0	48	50	1	49	11	2	20	2
21	0	51	9	1	50	45	2	20	25
22	0	53	28	1	52	17	2	20	45
23	0	55	46	1	53	48	2	21	4
24	0	58	3	1	55	17	2	21	20
25	1	0	19	1	56	43	2	21	34
26	1	2	34	1	58	7	2	21	44
27	1	4	48	1	59	29	2	21	53
28	1	7	0	2	0	49	2	22	0
29	1	9	11	2	2	6	2	22	3
30	1	11	21	2	3	20	2	22	2
	— XI			— X			— IX		

2 E — M

III + St.	′	″	IV + St.	′	″	V + St.	′	″	
2	22	2	2	2	40	1	10	41	30
2	22	1	2	1	24	1	8	32	29
2	21	56	2	0	5	1	6	22	28
2	21	48	1	58	44	1	4	10	27
2	21	38	1	57	22	1	1	57	26
2	21	26	1	55	59	0	59	43	25
2	21	11	1	54	33	0	57	28	24
2	20	52	1	53	4	0	55	13	23
2	20	32	1	51	33	0	52	56	22
2	20	11	1	50	0	0	50	39	21
2	19	45	1	48	25	0	48	20	20
2	19	17	1	46	48	0	46	1	19
2	18	47	1	45	10	0	43	41	18
2	18	13	1	43	30	0	41	19	17
2	17	37	1	41	48	0	38	57	16
2	17	0	1	40	4	0	36	34	15
2	16	20	1	38	17	0	34	10	14
2	15	37	1	36	29	0	31	47	13
2	14	52	1	34	40	0	29	23	12
2	14	4	1	32	48	0	26	57	11
2	13	14	1	30	54	0	24	31	10
2	12	22	1	29	0	0	22	5	9
2	11	25	1	27	5	0	19	39	8
2	10	27	1	25	6	0	17	12	7
2	9	28	1	23	7	0	14	45	6
2	8	25	1	21	7	0	12	18	5
2	7	21	1	19	4	0	9	51	4
2	6	14	1	16	59	0	7	24	3
2	5	5	1	14	54	0	4	56	2
2	3	53	1	12	48	0	2	28	1
2	2	40	1	10	41	0	0	0	0
— VIII			— VII			— VI			

Drey und dreyzigſte Tafel, für die Zeit der ♂

IV. Argum. Anom. med. ☉

	O		I		II	
	—		—		—	
0	0′	0″	10′	5″	17′	38″
1	0	21	10	23	17	49
2	0	42	10	41	18	0
3	1	4	11	0	18	0
4	1	25	11	17	18	20
5	1	45	11	35	18	30
6	2	6	11	52	18	39
7	2	27	12	9	18	48
8	2	47	12	26	18	57
9	3	8	12	42	19	5
10	3	29	12	59	19	13
11	3	50	13	16	19	21
12	4	11	13	32	19	28
13	4	31	13	48	19	35
14	4	51	14	4	19	42
15	5	12	14	19	19	49
16	5	32	14	33	19	55
17	5	52	14	48	20	0
18	6	12	15	3	20	5
19	6	32	15	18	20	10
20	6	52	15	33	20	15
21	7	12	15	47	20	19
22	7	32	16	1	20	23
23	7	52	16	14	20	27
24	8	11	16	26	20	30
25	8	30	16	38	20	32
26	8	49	16	51	20	34
27	9	9	17	4	20	36
28	9	28	17	15	20	38
29	9	47	17	27	20	30
30	10	5	17	38	20	40
	+		+		+	
	XI		X		IX	

= a

III		IV		V		
—		—		—		
20′	40″	18′	10″	10′	36″	30
20	41	17	59	10	17	29
20	40	17	47	9	58	28
20	40	17	36	9	38	27
20	39	17	24	9	18	26
20	38	17	12	8	58	25
20	37	17	0	8	38	24
20	35	16	48	8	18	23
20	33	16	35	7	58	22
20	31	16	22	7	37	21
20	28	16	8	7	16	20
20	24	15	53	6	55	19
20	20	15	39	6	34	18
20	16	15	24	6	13	17
20	11	15	10	5	52	16
20	7	14	55	5	31	15
20	2	14	40	5	9	14
19	56	14	24	4	47	13
19	50	14	8	4	25	12
19	43	13	52	3	54	11
19	38	13	35	3	42	10
19	30	13	18	3	20	9
19	23	13	0	2	57	8
19	15	12	43	2	35	7
19	6	12	26	2	13	6
18	57	12	9	1	51	5
18	49	11	51	1	29	4
18	40	11	32	1	7	3
18	30	11	13	0	44	2
18	20	10	55	0	22	1
18	10	10	36	0	0	0
+		+		+		
VIII		VII		VI		

Drey und dreyzigſte Tafel, für die Zeit der ♂

V. Argum.

	O		I		II	
0	0′	0″	4′	44″	5′	0″
1	0	11	4	50	4	56
2	0	23	4	56	4	50
3	0	34	5	1	4	44
4	0	46	5	6	4	39
5	0	57	5	11	4	32
6	1	8	5	14	4	25
7	1	19	5	18	4	18
8	1	30	5	21	4	11
9	1	41	5	24	4	2
10	1	51	5	27	3	55
11	2	2	5	29	3	48
12	2	13	5	31	3	39
13	2	24	5	32	3	31
14	2	34	5	34	3	22
15	2	43	5	34	3	13
16	2	53	5	35	3	5
17	3	3	5	34	2	56
18	3	12	5	34	2	46
19	3	21	5	33	2	36
20	3	30	5	32	2	26
21	3	39	5	30	2	16
22	3	47	5	29	2	7
23	3	56	5	26	1	57
24	4	3	5	24	1	46
25	4	11	5	21	1	36
26	4	19	5	18	1	26
27	4	25	5	14	1	15
28	4	32	5	9	1	4
29	4	39	5	5	0	53
30	4	44	5	0	0	43
	+ XI		+ X		+ IX	

E — M

III		IV		V		
∓		+		+		
0′	43″	3′	46″	4′	2″	30
0	33	3	51	3	57	29
0	22	3	57	3	52	28
0	11	4	2	3	47	27
—	—	4	6	3	41	26
0	10	4	11	3	35	25
0	20	4	14	3	29	24
0	31	4	18	3	22	23
0	41	4	21	3	15	22
0	52	4	24	3	7	21
1	2	4	26	3	0	20
1	12	4	28	2	53	19
1	22	4	30	2	45	18
1	32	4	32	2	37	17
1	41	4	33	2	29	16
1	51	4	34	2	21	15
2	0	4	34	2	13	14
2	9	4	34	2	4	13
2	17	4	33	1	55	12
2	26	4	32	1	46	11
2	35	4	31	1	37	10
2	43	4	30	1	27	9
2	51	4	28	1	18	8
2	59	4	26	1	9	7
3	7	4	24	0	59	6
3	14	4	21	0	49	5
3	21	4	18	0	40	4
3	28	4	15	0	30	3
3	34	4	10	0	20	2
3	40	4	6	0	10	1
3	46	4	2	0	0	0
∓		—		—		
VIII		VII		VI		

Drey und dreyzigſte Tafel, für die Zeit der ☍

Die übrigen

		VI°		VII°		VIII°		IX°		X°	
		a + M		a — M		2E — a		ſ VI + 2E + M		a — 2E + M	
O. VI	0	0′	0″	0′	0″	0′	0″	0′	0″	0′	0″
+ —	3	0	6	0	11	0	11	0	16	0	22
	6	0	13	0	21	0	22	0	31	0	45
	9	0	19	0	32	0	32	0	47	1	7
	12	0	26	0	42	0	43	1	2	1	29
	15	0	32	0	53	0	54	1	17	1	51
	18	0	38	1	3	1	5	1	32	2	12
	21	0	44	1	13	1	16	1	46	2	33
	24	0	50	1	23	1	26	2	0	2	54
	27	0	56	1	32	1	36	2	15	3	14
I. VII	0	1	1	1	42	1	46	2	29	3	34
+ —	3	1	7	1	51	1	56	2	42	3	53
	6	1	12	2	0	2	5	2	55	4	12
	9	1	17	2	8	2	13	3	7	4	30
	12	1	24	2	16	2	22	3	18	4	47
	15	1	29	2	24	2	30	3	30	5	3
	18	1	33	2	32	2	38	3	41	5	18
	21	1	36	2	39	2	45	3	51	5	33
	24	1	39	2	45	2	52	4	1	5	47
	27	1	43	2	51	2	58	4	10	5	59
II. VIII	0	1	46	2	55	3	4	4	18	6	12
+ —	3	1	49	3	2	3	9	4	26	6	22
	6	1	52	3	6	3	13	4	32	6	31
	9	1	55	3	10	3	18	4	38	6	40
	12	1	57	3	14	3	22	4	43	6	47
	15	1	59	3	17	3	26	4	48	6	54
	18	2	0	3	19	3	29	4	51	6	59
	21	2	1	3	22	3	30	4	54	7	3
	24	2	2	3	23	3	31	4	56	7	6
	27	2	3	3	24	3	32	4	57	7	7
	30	2	3	3	24	3	32	4	58	7	8

Argumente.

XI°		XII°		XIII°		XIV°	XV°		
a + 2E − M		2(☉ − ☊)		M − 2λ		2E + M − a	M − 4E		
0′	0″	0′	0″	0′	0″	0″	0″	30	
0	4	0	4	0	5	1	1	27	
0	7	0	9	0	11	3	3	24	
0	11	0	13	0	16	4	4	21	
0	15	0	17	0	22	6	6	18	
0	18	0	22	0	27	7	7	15	
0	22	0	26	0	32	8	8	12	
0	25	0	30	0	38	9	9	9	
0	29	0	35	0	43	11	11	6	
0	31	0	39	0	48	12	12	3	− +
0	36	0	43	0	53	13	13	0	XI. V
0	39	0	46	0	57	14	15	27	
0	43	0	50	1	2	15	16	24	
0	45	0	54	1	6	16	17	21	
0	48	0	57	1	10	17	18	18	
0	50	1	0	1	14	18	19	15	
0	53	1	3	1	18	19	20	12	
0	55	1	6	1	22	20	21	9	
0	58	1	9	1	25	21	22	6	
1	0	1	12	1	28	21	22	3	− +
1	2	1	14	1	31	22	23	0	X. IV
1	4	1	16	1	34	23	24	27	
1	5	1	18	1	36	23	24	24	
1	7	1	20	1	38	24	25	21	
1	8	1	21	1	40	24	25	18	
1	9	1	22	1	41	25	26	15	
1	10	1	23	1	43	25	26	12	
1	10	1	24	1	44	25	26	9	
1	11	1	25	1	44	26	27	6	
1	11	1	25	1	45	26	27	3	− +
1	11	1	25	1	45	26	27	0	IX. III

Beyſpiele.

	Arg. latit.	T. St. ′ ″	Long. ☉
1771			
1759	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
12	☊ + 4 32 47	146 1 30 49	4 24 3 3
Neumond	☋ + 4 31 48	122 20 23 48	1 21 36 30
ſubtr.	☋ + 15 20 7	14 18 22 1	0 14 33 12
Vollmond	☊ — 10 48 19	108 2 1 47	1 7 3 18
☽ =	7 7 3 18	+ 18 44 25	
☊ =	7 17 51 37	Apr. 17 20 46 12	
	+ 40	— 5 0 0	— 12 19
	+ 7	— 52 0	— 2 8
	0	— 28	— 1
	+ 47	— 5 52 28	— 14 28
☊′	7 17 52 24	Apr. 17 14 53 44	1 6 48 50
	— 8 59		+ 1 41 22
☊ v.	7 17 43 25		1 8 30 12
☽ v.	7 8 30 12		
☊ — ☽	11 20 46 47 Argum.	- - - - -	- - - - -

	ſ ° ′ ″	St. ′ ″	St. ′ ″	
M =	8 18 22 6	- - -	— 9 24 7	Tab. 5
a =	9 28 1 59	+ 3 38 11		Tab. 6
a + M =	6 16 24	+ 1 59		Tab. 7
a — M =	1 9 40	- - -	— 6 43	Tab. 8
a + 2 M =	3 4 46	- - -	— 53	T. 9. col. 1
a — 2 M =	4 21 18	- - -	— 20	- - - 2
2(☽−☊)−M =	2 20 3	- - -	— 1 52	- - - 3
2(☊—☉) =	0 21 37	- - -	— 34	- - - 4
M =	8 18 22	+ 1 51		- - - 5
		+ 3 42 1	— 9 34 29	

— 9 34 29

— 5 52 28

Apr. 17 20 46 12

Apr. 17 14 53 44 ☍ Berol. temp. med.

a′ = 9 27 48 — 6 46 } Tab. 12. aequ. temp.

☉ v. = 1 8 30 + 9 32

1771. Apr. 17 14 56 30 ☍ in orbita, Berol. temp. vero ſt. Jul.

Beyſpiel, §. 106.

Anom. ☉ = a	Anom. ☽ = M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33		Tab. 1
4 23 50 36	1 10 10 3		T. 2. No. 141
10 12 35 8	3 1 16 36		
0 14 33 9	6 12 54 30		T. 2. No. 359
9 28 1 59	8 18 22 6	7 7 3 18	Tab. 3 & 4
— 12 19	— 2 43 18	— 2 44 42	
— 2 8	— 28 19	— 28 33	Tab. 10
— 1	— 15	— 15	
— 14 28	— 3 11 52	— 3 13 30	
9 27 47 31	8 15 10 14	7 3 49 48	
a′	M′	☽′	Tab. 11. 13

\- - - - - - - + 2 12 Reduct. ad Eccl. Tab. 14.

Argum. — 48 3 Latit. ☽ Tab. 15.

☽′ = 7ˢ 3° 50′		
☊′ = 7 17 52		
M′ = 8 15 10		
5 15 58	- - - + 3 2	Tab. 16. Col. 1
8 1 8	- - - + 10	- - - - 2
3 0 48	- - - 0	- - - - 3
	— 3 12	Increm. latit. horar. ☽
M′ = 8 15 10	{ + 34 24 + 2	Tab. 17
a′ = 9 27 48	— 1	- - - Col. 1
4 17 22	+ 2	- - - - - 2
6 12 58	+ 1	- - - - - 3
11 15 10	— 1	- - - - - 4
	+ 34 27	Horar. ☽ in orbita
M′ = 8 15 10	58 19	Tab. 18 Parall. ☽
	15 53	Tab. 19 Semid. ☽
a′ = 9 27 48	15 55	Tab. 20 Semid. ☉
	2 25	- - - Horar. ☉
	42 31	Tab. 19 Semid. umbrae

		T. St. ′ ″	Long. ☉
1773			
1759	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
14	☋ — 6 0 29	271 22 48 14	8 28 8 47
Neumond	☊ — 6 1 28	248 17 41 13	5 25 42 14
add.	☋ + 15 20 7	14 18 22 1	0 14 33 12
Vollmond	☋ + 9 18 39	263 12 3 14	6 10 15 26
☽	0 10 15 26	+ 6 44 25	
☊	6 0 56 47	Sept. 19 18 47 39	
	+ 1 27	— 11 0 0	— 27 6
	+ 7	— 54 0	— 2 13
	0	— 18	— 1
	+ 1 34	— 11 54 18	— 29 20
☊′	6 0 58 21	Sept. 19 6 53 21	6 9 46 6
	+ 10 18		— 1 55 44
☊ v.	6 1 8 39		6 7 50 22
☽ v.	0 7 50 22		☉ v.
☽ — ☊	6 6 41 43 Argum.	- - - - - - - - - - -	

M =	10 12 52 19	- - -	— 7 32 29	Tab. 5
a =	3 1 11 28	- - -	— 4 10 11	Tab. 6
a + M =	1 14 4	- - -	— 4 52	Tab. 7
a — M =	4 18 19	- - -	— 7 0	Tab. 8
a + 2 M =	11 26 56	+ 3		T. 9. col. 1
a — 2 M =	6 5 27	+ 3		- - - 2
2(☽—☊)—M =	2 5 45	- - -	— 1 44	- - - 3
2(☊ — ☉) =	11 11 23	+ 29		- - - 4
M =	10 12 52	+ 1 23		- - - 5

+ 1 58 — 11 56 16

— 11 56 16

— 11 54 18

Sept. 19 18 47 39

Sept. 19 6 53 21 ☍ Berol. temp. med.

a′ = 3 0 42 ... + 7 43

☉ v. = 6 7 50 ... + 2 34 Tab. 12. aequ. temp.

1773. Sept. 19 7 3 38 ☍ in orbita, temp. vero Berol. ſt. Jul.

Anom. ☉ = a	Anom. ☽ = M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33		Tab. 1
8 27 53 47	2 8 51 16		T. 2. No. 170
2 16 38 19	3 29 57 49		
0 14 33 9	6 12 54 30		T. 2. No. 359
3 1 11 28	10 12 52 19	0 10 15 26	
			Tab. 3 & 4
— 27 6	— 5 59 17	— 6 2 21	
— 2 13	— 29 24	— 29 39	Tab. 10
— 1	— 9	— 9	
— 29 20	— 6 28 50	— 6 32 9	
3 0 42 8	10 6 23 29	0 3 43 17	
a′	M′	☽′	Tab. 11. 13

- - - - - -	— 1 36	Tab. 14. Reduct. ad Eccl.
Argum.	— 34 58	Tab. 15. latit. ☽
☽′ = 0 3 43		
☊′ = 6 0 58		
M′ = 10 6 23		
0 2 45	— 3 7	Tab. 16. Col. 1
4 9 8	+ 13	- - - - - 2
7 26 22	+ 2	- - - - - 3
	— 2 52	Increm. latit. horar. ☽
M′ = 10 6 23	+ 30 54	Tab. 17
	+ 2	
a′ = 3 0 42	0	- - - Col. 1
1 5 41	— 2	- - - - - 2
1 7 5	— 1	- - - - - 3
1 6 23	— 1	- - - - - 4
	+ 30 52	Horar. ☽
M′ = 10 6 23	55 15	Parall. ☽ Tab. 18
	15 3	Semid. ☽ Tab. 19
a′ = 3 0 42	16 3	Semid. ☉ Tab. 20
	2 28	Horar. ☉ - - -
	39 22	Semid. umbrae, Tab. 19

1778	Argum. latit.	T. St. ′ ″	⊙
1759	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
19	☋ + 3 33 14	188 0 7 5	6 5 26 39
	☊ + 3 32 15	164 19 0 4	3 3 0 6
☽ =	3 3 0 6	+ 12 44 25	
☊ =	1 29 27 51	Jun. 13 7 44 29	
	+ 24	— 3 0 0	— 7 23
	+ 1	— 11 0	— 27
	0	— 40	— 2
	+ 25	— 3 11 40	— 7 52
☊′	2 29 18 16	Jun. 13 4 32 49	3 2 52 14
	— 1 7		+ 12 24
☊ v.	2 29 27 9		3 3 4 38
☽ v.	3 3 4 38		⊙ v.
☽ − ☊ =	0 3 37 29	- - - -	- - -

M = 6 23 9 16	+ - - -	— 3 34 12	Tab. 5
a = 11 23 50 59	+ 0 26 8		Tab. 6
a + M = 6 17 0	+ 2 3		Tab. 7
a — M = 5 0 42	- - -	— 5 9	Tab. 8
a + 2M = 1 10 9	- - -	— 34	T. 9. col. 1
a — 2M = 10 7 33	+ 25		- - - 2
2(☽−☊)−M = 5 13 55		— 31	- - - 3
2(☊−⊙) = 11 23 55	+ 10		- - - 4
	+ 0 28 46	— 3 40 26	
	— 3 40 26		
	— 3 11 40		
	Jun. 13 7 44 29		

Jun. 13 4 32 49 ☌ Berol. temp. med.

a′ = 11 23 43 … — 49 } Tab. 12 aequ. temp.
⊙ v. = 3 3 5 … — 1 7 }

1778 Jun. 13 4 30 53 ☌ in orbita, Berol. temp. vero ſt. Jul.

Beyſpiel, §. 125 ſeqq.

an. ☉ = a	an. ☽ = M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33		Tab. 1
6 5 6 27	5 2 2 43		T. 2 No. 229
11 23 50 59	6 23 9 16	3 3 0 6	Tab. 3. 4
— 7 23	— 1 37 59	— 1 38 49	
— 27	— 5 59	— 6 2	Tab. 10
— 2	— 22	— 22	
— 7 52	— 1 44 21	— 1 45 13	
11 23 43 7	6 21 24 55	3 1 14 53	
a′	M′	☽′	Tab. 11. 13
- - - - -	— 0 52		
	+ 18 58	red. ad eccl.	Tab. 14
☽′ = 3 1 15		latit. ☽	Tab. 15
☊′ = 2 29 28			
M′ = 6 21 25			
6 1 47	+ 3 7	Tab. 16. col. 1	
6 23 12	+ 18	- - - 2	
5 10 22	+ 4	- - - 3	
	+ 3 29	Incr. horar. latit. ☽	
M′ = 6 21 25	+ 37 48	Tab. 17	
a′ = 11 23 43	— 3	- - Col. 1	
0 27 42	— 3	- - - 2	
6 15 8	+ 1	- - - 3	
9 21 25	0	- - - 4	
	+ 37 43	Horar. ☽ in orbita	
M′ = 6 21 25	61 10	Parall. ☽	T. 18
	16 41	Semid. ☽	T. 19
a′ = 11 23 43	15 47	Semid. ☉	T. 20
	2 23	Horar. ☉	
	61 0	Semid. ♁	T. 20
	+ 0 54	Semid. umbrae	
	32 28	Semid. penumbrae	
☉ v. 3 3 4 38	23 26 9	Declin. ☉	T. 21
	88 39 53	Ang. eccl.	T. 22
	+ 0 16 37	Red. ad aequ.	T. 23

1769	Argum. latit.	T. St. ′ ″	☉
1759	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
10	☊ — 11 32 48	167 19 53 40	5 15 29 20
	☋ — 11 33 47	144 14 46 39	2 13 2 47
☽	2 13 2 47	+ 6 44 25	
☊	8 24 36 34	Mai 23 21 31 4	
	+ 2	— 12 0	— 30
	0	— 10	0
	+ 2	— 12 10	— 30
☊′	8 24 36 36	Mai 23 21 18 54	2 13 2 17
	— 4 23		+ 49 40
☊ v. =	8 24 32 13		2 13 51 57
☽ v. =	2 13 51 57		☉ v.
☽ - ☊ =	5 19 19 44 - - -	- - -	- -

M = 6 11 40 25	- - -	— 1 49 43	Tab. 5
a = 11 4 3 34	+ 1 46 57		Tab. 6
a + M = 5 15 44	- - -	— 1 44	Tab. 7
a — M = 4 22 23	- - -	— 6 26	Tab. 8
a + 2M = 11 27 24	+ 3		T. 9. col. 1
a — 2M = 10 10 43	+ 24		- - - 2
(☽ - ☊) - M = 4 25 12	- - -	— 1 4	- - - 3
2(☊ — ☉) = 0 23 8	- - -	— 37	- - - 4

+ 1 47 24
— 1 59 34

— 0 12 10
Mai 23 21 31 4

Mai 23 21 18 54 ☌ Berol. temp. med.

a = 11 4 3 ... — 3 19 }
☉ v. = 2 13 52 ... + 5 24 } Tab. 12 aequ. temp.

1769 Mai 23 21 20 59 ☌ in orbita Berol. temp. vero.

an. ☉ = a	an. ☽ = M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33		Tab. 1
5 15 19 1	4 20 33 52		T. 2 No. 117
11 4 3 33	6 11 40 25	2 13 2 47	Tab. 3, 4
— 30	— 6 32	— 6 35	
0	— 5	— 5	Tab. 10
— 30	— 6 37	— 6 40	
11 4 3 4	6 11 33 48	2 12 56 7	
a′	M′	☽′	Tab. 11. 13

	′ ″		
. . . . .	+ 2 32		
	+ 55 31	red. ad eccl.	Tab. 14
		latit. ☽	Tab. 15
☽′ = 2 13 3			
☊′ = 8 24 37			
M′ = 6 11 34			
11 18 20	-- — 3 3	Tab. 16. col. 1	
11 29 54	— 20	- - - 2	
11 6 46	— 4	- - - 3	
	— 3 27	Incr. horar. latit.	
M′ = 6 11 34	+ 38 3	Tab. 17	
a′ = 11 4 3	— 3	- - Col. 1	
1 7 31	— 2	- - - 2	
5 15 37	+ 1	- - - 3	
2 4 3	0	- - - 4	
	+ 37 59	Horar. ☽ in orbita	
M′ = 6 11 34	61 23	Parall. ☽	T. 18
	16 45	Semid. ☽	T. 19
a′ = 11 4 3	15 49	Semid. ☉	T. 20
	2 23	Horar. ☉	T. 20
	61 13	Semid. ♁	
	0 56	Semid. umbrae	T. 20
	32 34	Semid. penumbrae	
☉v. = 2 13 51 57	22 29 45	Declin. ☉	T. 21
	83 7 12	Ang. eccl.	T. 22
	— 1 22 11	Red. ad aequ.	T. 23

	Arg. latit.	T. St. , "	☉
1783	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
1759	☋ — 17 33 17	74 12 41 53	2 13 38 7
24			
	☊ — 17 34 16	51 7 34 52	11 11 11 34
☽' =	11 11 11 34	29 12 15 35	
☊ =	11 28 45 50	— 21 19 19 17	
	+ 1 6 43	— 21 0 0 0	— 20 41 55
	2 31	— 19 0 0	46 49
	3	— 19 0	47
	0	— 17	1
	+ 1 9 17		— 21 29 32
	11 29 55 7		10 19 42 2
	— 6 50		+ 1 16 19
☊' =	11 29 48 17	☉ v. =	10 20 58 21

M = 11 5 38 43	+ 2 26 33	- - -	Tab. 24
☽ − ☉ = E = 3 4 10 48	- - -	— 7 46	Tab. 25
2 E = 6 8 21 36			
2 E — M = 7 2 42 53	+ 41 47	- - -	Tab. 26
a = 7 10 27 52	- - -	— 7 31	Tab. 27
a + M = 6 16 7	+ 29	- - -	T. 28. Col. 1
a — M = 8 4 49	+ 2 11	- - -	- - - 2
M + 2 E = 5 14 0	- - -	— 48	- - - 3
M — E = 8 1 28	+ 21	- - -	- - - 4
2 (M — E) = 4 2 56	- - -	— 2 50	- - - 5
4 E — M = 1 11 4	- - -	— 35	- - - 6
2 E — a = 10 27 54	+ 1 20	- - -	- - - 7
a + 2 E — M = 2 13 11	- - -	— 44	- - - 8
a — 2 E + M = 0 7 45	- - -	— 31	- - - 9
M — 2 λ = 7 17 43	+ 43		
2 ☉ — 2 ☊ = 9 8 34	+ 46		
	+ 3 14 10	— 20 45	
	— 0 20 45		
	+ 2 53 25		

Beyſpiel, §. 193 ſeqq.

a	M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33	- - - - -	Tab. 1
2 13 12 48	6 29 25 9	- - - - -	T. 2. No. 287
8 1 57 20	8 20 31 42	11 11 11 34	
— 20 41 51	9 4 21 54	9 6 42 16	Tab. 10
46 49	10 20 35	10 25 53	
47	10 21	10 26	
1	9	9	
— 21 29 28	9 14 52 59	9 17 18 44	
7 10 27 52	11 5 38 43	1 23 52 50	
		+ 2 53 25	Tab. 11. 13
	L''' =	1 26 46 15	

L''' − ☊' = 1 26 57 58	— 6′ 21″	Reduct. ☽ ad eccl. T. 14
- - - - - - - - - - -	+ 4 19 4	
L''' + ☊ − 2 ☉ = 4 14 37 45	+ 6 18	
	+ 4 25 22	Latit. ☽. T. 29

M = 11 5 39 + 54′ 23″
2E—M = 7 2 43 + 32
E = 3 4 11 — 27

+ 54 28 Parall. ☽ Tab. 30
14 51 Semid. ☽ Tab. 19

M = 11 5 39	+29 50	λ = 1 23 58	+ 1′ 45″
E = 3 4 11	— 41	VI + λ + M = 6 29 37	— 17
2E—M = 7 2 43	+ 32		
2E + M = 5 14 0	+ 5	2E — λ = 4 14 23	— 4
2E — a = 10 27 54	— 2		
4E — M = 1 11 4	— 1	VI + λ + 2E−M = 2 26 41	+ 0
M + a = 6 16 7	+ 1		
VI + a — 2E + M = 6 7 45	+ 2	VI — λ + 2E−M = 11 8 45	+ 3
VI + a — M = 2 4 49	— 0	2E + λ = 8 2 20	— 1
III + M = 2 5 39	— 0	Incr. latit. horar.	+1 26
Horar. ☽ Tab. 31.	29 46	Tab. 32	

1775	Arg. latit.	T. St. , "	☉
1759	☋ — 0 0 59	—23 5 7 1	8 27 33 27
16	☊ + 6 3 42	73 0 1 6	2 12 4 4
	☋ + 6 2 43	49 18 54 5	11 9 37 31
☽ =	11 9 37 31	1 17 54 36	
♌ =	5 3 34 48	48 0 59 29	
	+ 2 32 30	—48 0 0 0	—1 17 18 40
	+ 8	— 59 0	— 2 28
	0	— 29	— 1
	+ 2 32 38	—48 0 59 29	—1 17 21 9
☊ =	5 6 7 26	1 17 54 34	9 22 16 22
	+ 1 4	— 8 0 0	— 19 43
	+ 6	— 44 0	— 1 48
	0	— 13	— 1
	+ 1 10	— 8 44 13	— 21 32
——	5 6 8 36	1 9 10 31	9 21 54 50
	— 2 22	— 6	+ 26 14
	5 6 6 14	1 3 10 31	9 22 21 4
	☊ v.	+ 44 25	☉ v.
		1 3 54 56	

M = 10 17 0 24	- - -	—8 3 55	Tab. 33 arg. 1
E = 4 14 20 27	+1 0 58		- - - 2
2E—M = 10 11 40 30	- - -	—1 46 28	- - - 3
a = 6 13 11 0	+ 4 51		- - - 4
E—M = 5 27 20 3	+ 27		- - - 5
a + M = 5 0 11	+ 1 1		- - - 6
a — M = 7 26 11	- - -	— 2 49	- - - 7
2E — a = 2 15 30	+ 3 26		- - - 8
VI + 2E + M = 1 15 41	+ 3 32		- - - 9
a − 2E + M = 8 1 30	- - -	— 6 17	- - - 10
a + 2E − M = 4 24 51	+ 42		- - - 11
2(☉−♌) = 9 2 18	- - -	— 1 25	- - - 12
M — 2λ = 4 16 2	+ 1 13		- - - 13
M — 4E = 1 2 30	+ 14		- - - 14
M — 4E = 4 19 39	+ 17		- - - 15
	+ 1 16 41	—10 0 54	
	—10 0 54		
	—8 44 13		

a	M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33	- - - -	Tab. 1
2 11 47 29	5 23 33 25	- - - -	T. 2. No. 188
8 0 32 1	7 14 39 55	11 9 37 31	
—1 17 18 32	—8 27 7 10	—9 2 28 2	Tab. 10
— 2 28	— 32 8	— 32 24	
— 1	— 16	— 16	
—1 17 21 1	—8 27 36 34	—9 3 0 42	
6 13 11 0	10 17 0 24	2 6 36 49	☌ med.
— 19 43	— 4 21 18	— 4 23 33	Tab. 10
— 1 48	— 23 57	— 24 9	
— 1	— 7	— 7	
— 21 32	— 4 45 22	— 4 47 49	
6 12 49 28	10 12 15 2	2 1 49 0	☌ vera
		2 6 36 49	☽ v.
		5 6 6 14	☊ v.
		9 0 30 35	

		+ 0 0 14	Red. ad Eccl.
L‴ — ☊′ =	9 0 30 35	— 5° 9′ 6	Tab. 14
L‴ + ☊ − 2☉ =	11 28 0 55	— 0 0 19	
		— 5 9 25	lat. ☽. Tab. 29

M =	10 12 15	+ 55′ 1″	′ ″	
2E—M =	10 7 23	— 26	= 54 31	Parall. ☽ T. 30
E =	4 9 54	— 4	14 52	Semid. ☽ T. 19

M =	10 12 15	+ 30 31
E =	4 9 54	— 7
2E—M =	10 7 33	— 23
2E + M =	7 2 3	+ 4
2E—a =	2 6 59	— 1
4E—M =	6 27 21	+ 1
M + a =	4 25 4	— 1
VI + a — 2E + M =	2 5 16	— 0
VI + a—M =	8 0 34	+ 0
III + M =	1 12 15	— 1
Horar. ☽ Tab. 31.		+ 30 3

λ =	8 25 40	−0′ 13″
VI + λ + M =	7 7 55	+ 0 15
2E—λ =	0 24 9	+ 5
VI + λ + 2E—M =	1 3 13	+ 3
VI — λ + 2E—M =	7 11 53	— 2
2E + λ =	5 15 28	— 3
Incr. latit. horar. Tab. 32		+ 0 5

	Argum. latit.	T. St. ′ ″	⊙
1783			
1759	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
24	☋ — 17 33 17	74 12 41 53	2 13 38 7
	☊ — 17 34 16	51 7 34 52	11 11 11 34
☽ =	11 11 11 34		
☊ =	11 28 45 50		
	+ 1 6 43	— 21 0 0 0	— 20 41 55
	+ 1 43	— 13 0 0	— 32 2
	+ 6	— 42 0	— 1 43
	+ 0	— 40	— 2
	+ 1 8 32	— 21 13 42 40	— 21 15 42
	11 29 54 22	29 17 52 12	10 19 55 52
	+ 40	— 5 0 0	— 12 19
	+ 2	— 13 0	— 32
	+ 0	— 47	— 2
	+ 42	— 5 13 47	— 12 53
	11 29 55 4	29 12 38 25	10 19 42 59
	— 6 50		+ 1 16 19
☊′ =	11 29 48 14	⊙′ =	10 20 59 18

M =	11 8 41 57	- - -	— 4 19 58	T. 33. arg. 1
E =	3 7 1 46	+ 17 56		- - - 2
2E — M =	7 5 21 35	- - -	— 1 21 50	- - - 3
a =	7 10 41 42	+ 13 47		- - - 4
E — M =	3 28 19 49	+ 3 36		- - - 5
a + M =	6 19 24	- - -	— 41	- - - 6
a — M =	8 2 0	- - -	— 3 0	- - - 7
2E — a =	11 3 22	- - -	— 1 35	- - - 8
VI + 2E + M =	11 22 45	- - -	— 35	- - - 9
a - 2E + M =	0 5 20	+ 40		- - - 10
a + 2E - M =	2 16 3	+ 1 9		- - - 11
2⊙ - 2☊ =	9 10 3	- - -	— 1 24	- - - 12
M — 2λ =	7 14 35	- - -	— 1 13	- - - 13
2E + M - a =	10 12 3	- - -	— 19	- - - 14
M — 4E =	10 10 35	- - -	— 20	- - - 15
		+ 37 8	— 5 50 55	
		— 5 50 55		
		— 5 13 47		

a	M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33	- - - -	Tab. 1
2 13 12 48	6 29 25 9		T. 2. No. 287
8 1 57 20	8 20 31 42	11 11 11 34	
		1 26 57 38	
		9 14 13 56	
— 20 41 51	— 9 4 21 54	— 9 6 42 16	
— 32 2	— 7 4 37	— 7 8 14	Tab. 10
— 1 43	— 22 52	— 23 4	
— 2	— 22	— 22	
— 21 15 38	— 9 11 49 45		
7 10 41 42	11 8 41 57	1 26 57 38	♂ med.
— 12 19	— 2 43 18	— 2 44 42	
— 32	— 7 4	— 7 8	Tab. 10
— 2	— 26	— 26	
— 12 53	— 2 50 48	— 2 52 16	
7 10 28 49	11 5 51 9	1 24 5 22	♂ vera
	L''' =	1 26 57 38	Long. verae.

L''' — ☊ = 1 27 9 24 { - - — 6' 20'' red. ad eccl.
{ + 4 19 34 Tab. 14

L''' + ☊' — 2 ☉' = 4 14 48 16 + 6 16

4 25 50 lat. ☽ T. 29

M = 11 5 51	- - + 54 23	' ''	
2E — M = 7 2 52	- - + 32	= 54 28	par. ☽. T. 30
E = 3 4 22	- - — 27	14 41	ſem. ☽ T 19

M = 11 5 51	+ 29 50	λ = 1 24 10	+ 1 45
E = 3 4 22	— 41	VI + λ + M = 7 0 1	— 17
2E — M = 7 2 52	+ 32	2E — λ = 4 14 35	— 4
2E + M = 5 14 36	+ 5	VI + λ + 2E — M = 2 27 2	+ 0
2E — a = 10 28 16	— 2	VI — λ + 2E — M = 11 8 42	+ 3
4E — M = 1 11 13	— 1	2E + λ = 8 2 55	— 1
M + a = 6 16 20	+ 1	Incr. lat. horar.	+ 1 26
VI + a — 2E + M = 6 7 37	+ 2	Tab. 32.	
VI + a — M = 2 4 38	— 0		
III + M = 2 5 51	— 0	Finis.	
Horar. ☽. Tab. 31	29 46		

Errata der Mondstafeln.

Tafeln.	anſtatt	lieſe:
1ſte Tafel 1ſte Linie	11 20 58 6	11 2 58 6
= = = 2te = =	8 19 27 9	8 19 27 0
= = beym Jahr 790	3 17 40 44	3 17 46 47
= = = = = =	Jahr 1669	1069
= = beym Jahr 1087	☋ +	☋ −
2te Tafel bey No. 1	29 12 44 1	29 12 44 3
= = = = No. 50	= = = oben feh	len die Rubriquen.
= = = = No. 101	60 47 8 53	60 14 8 53
= = = = No. 151	141	151
= = = = No. 247	☊ −	☊ +
= = = = No. 296	11 5 53 46	11 5 35 46
= = = = No. 321	0 0 11 24	0 7 11 24
6te Tafel bey IV. 24	1 29 59	2 29 59
8te Tafel bey O. 14	2 23	2 33
13te Tafel bey O. 10	1 35	1 45
= = = = IV. 26	5 45	5 54
33te Tafel 3te Seite	III. Arg.	II. Arg.
33te Tafel IV. Arg. II. 3	18 0	18 10

Errata der Beyſpiele.

Erſtes Beyſpiel	− 3 12 Incr. lat.	+ 3 12 Incr. lat.
Drittes Beyſpiel	☊ = 1 29 27 51	☊ = 2 29 27 51
= = = = =	☊′ = 2 29 18 16	☊′ = 2 29 28 16

b. III.

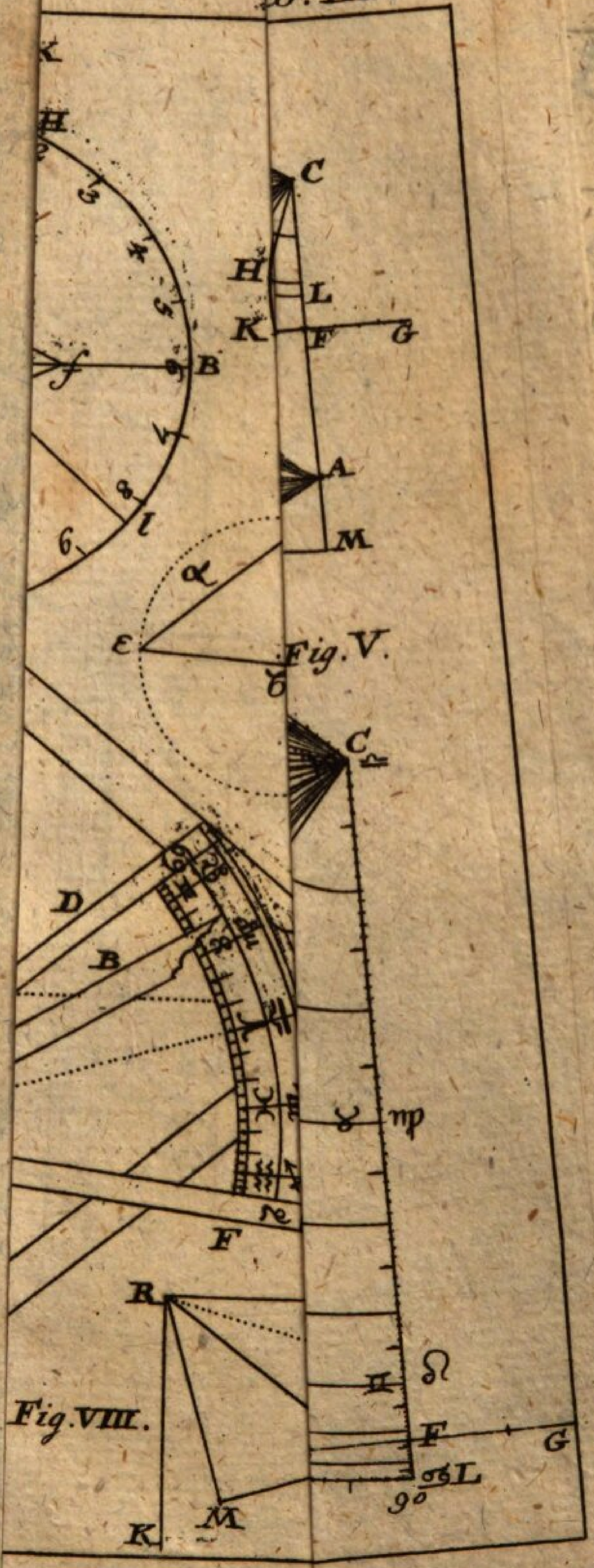


Fig. V.

Fig. VIII.

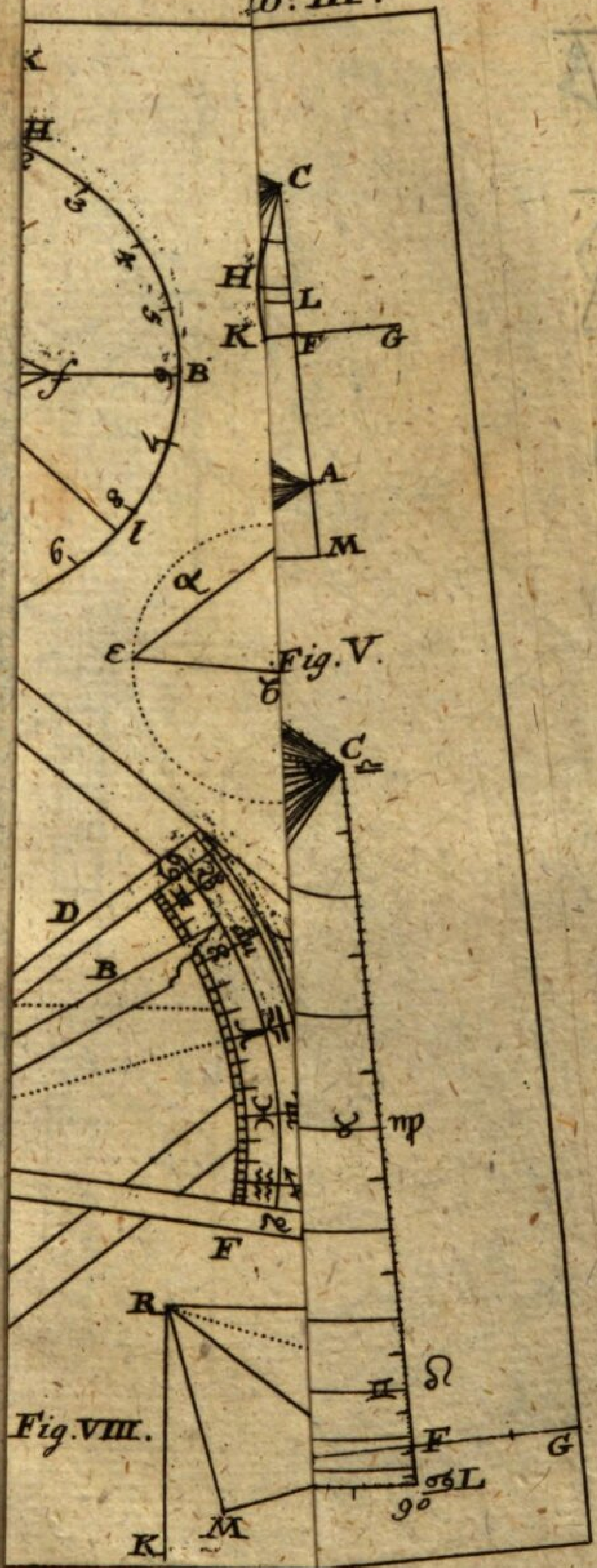
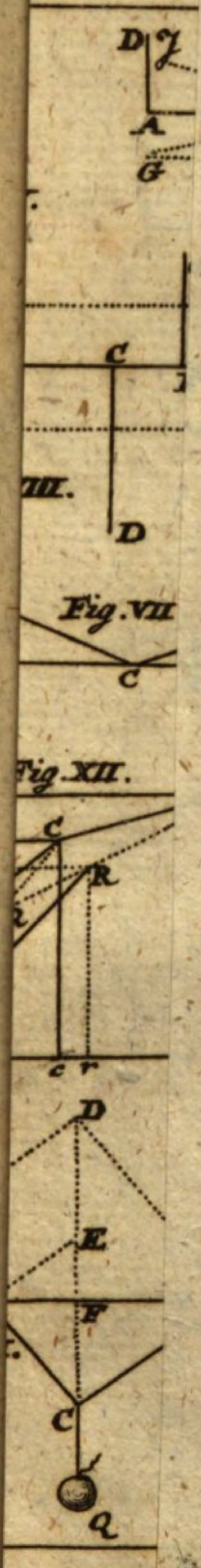


Fig. V.
Fig. VIII.

C
XI.
R

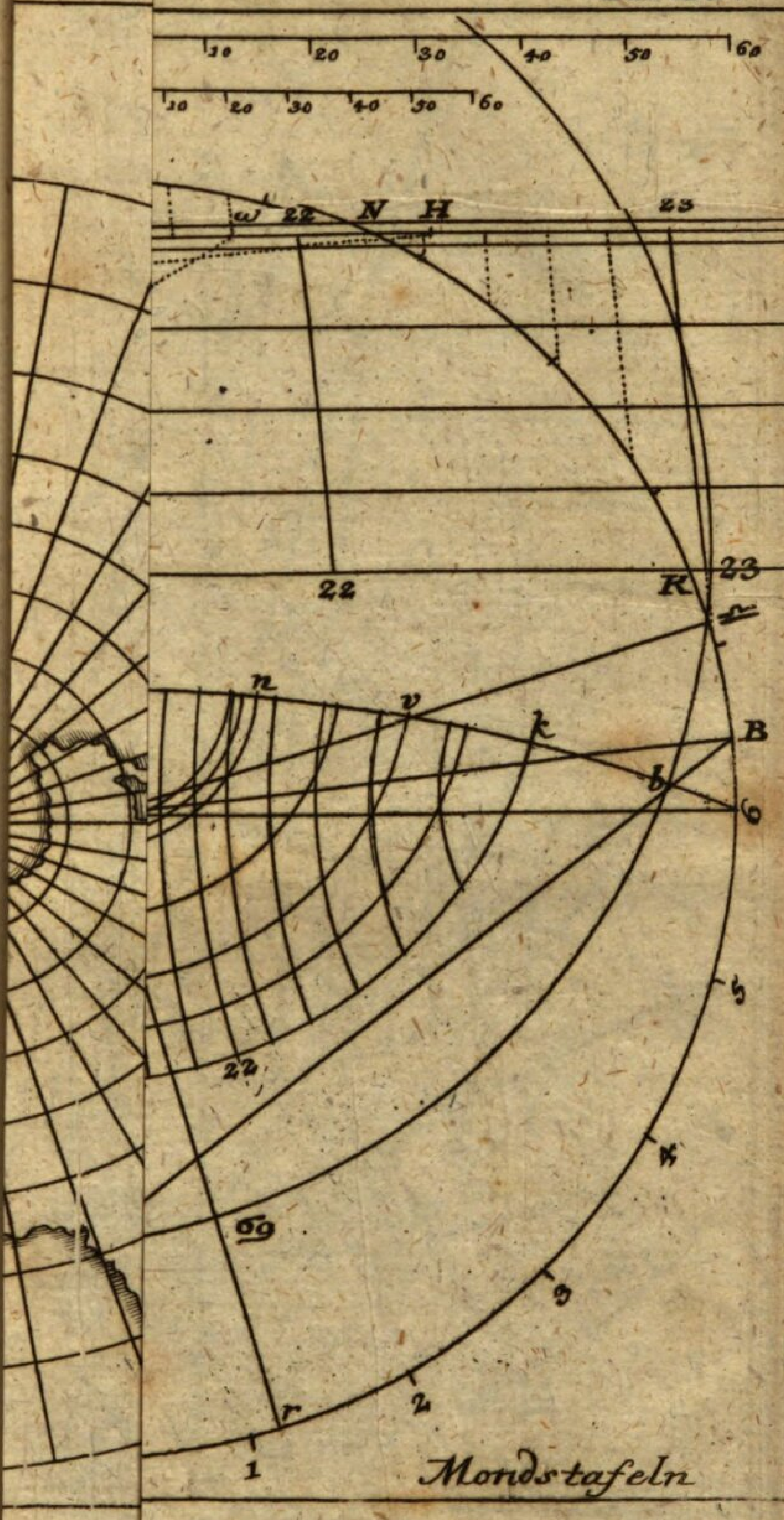
P
C
11
20
Fig.
Q
D

30
40
Hamburg
Berlin
Dresden
Prag
Regensburg
Wien
Venedig

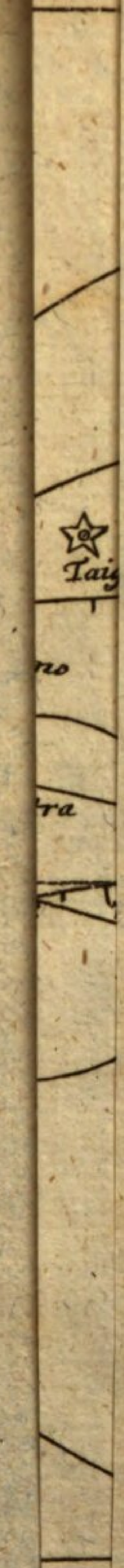

D
A
G
C
D
Fig.VII
C
Fig.XII.
C
R
c r
D
E
F
C
Q

M
g

Tab. X.



Mondstafeln


Taig
no
tra

Math

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lambert, Johann Heinrich, 1728-1777

Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung

Bd.: 2

Berlin 1770

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 478 -2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267547-2
VD18 80340245-001